



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

---

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN**

**DISEÑO DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS  
SUBACTUADOS DEL TIPO PÉNDULO INVERTIDO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

**Presenta:**

**M. en C. Oscar Octavio Gutiérrez Frías**

**Director de Tesis:**

**Dr. Carlos F. Aguilar Ibáñez**



**México, D.F.**

**Diciembre de 2009.**



**Diseño de Controladores para Sistemas Subactuados  
del Tipo Péndulo Invertido**

por

M. en C. Oscar Octavio Gutiérrez Frías

**Director de Tesis**

Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez

**Programa de Doctorado en Ciencias de la Computación**

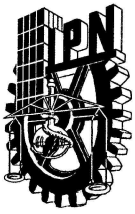
**Centro de Investigación en Computación**

**Instituto Politécnico Nacional**

**México, D.F.**

**Diciembre, 2009**





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de     México, D. F.     siendo las     9:00     a. m. del día     24     del mes de     Junio     de     2009     se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

**Centro de Investigación en Computación**

para examinar la tesis de grado titulada:

**“DISEÑO DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS SUBACTUADOS  
DEL TIPO PÉNDULO INVERTIDO”**

Presentada por el alumno:

**GUTIÉRREZ**

**FRÍAS**

**OSCAR OCTAVIO**

Apellido paterno

Materno

nombre(s)

Con registro:

B	0	6	0	9	0	3
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISIÓN REVISORA**

Presidente

Dr. Luis Pastor Sánchez Fernández

Secretario

Dr. José de Jesús Medel Juárez

Primer vocal  
(Director de Tesis)

Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez

Segundo vocal

Dr. Marco Antonio Moreno Armendáriz

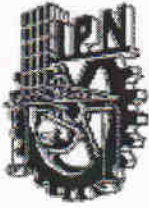
Tercer vocal

Dr. Juan Carlos Chimal Eguía

**EL PRESIDENTE DEL COLEGIO**

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**CENTRO DE INVESTIGACION**  
**EN COMPUTACION**

Dr. Jaime Álvarez Gallo **DIRECCION**



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México el día 27 del mes Junio del año 2009, el (la) que suscribe Oscar Octavio Gutiérrez Frías alumno(a) del Programa de Doctorado en Ciencias de la Computación con número de registro B060903, adscrito al Centro de Investigación en Computación, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez y cede los derechos del trabajo intitulado Diseño de Controladores para Sistemas Subactuados del Tipo Péndulo Invertido al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráfica o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director de trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección oscargf@sagitario.cic.ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Oscar Octavio Gutiérrez Frías

Nombre y Firma

# Resumen

La presente tesis doctoral está dedicada a la aplicación de la Teoría de Control No-lineal a una clase muy importante de sistemas mecánicos, denominados sistemas mecánicos subactuados, caracterizados por tener menos controles que grados de libertad. De ahí la dificultad para controlarlos y razón por la cual son considerados banco de prueba para la verificación de diversas estrategias de control.

La subclase de sistemas subactuados objeto de esta tesis es la formada por los péndulos invertidos. En particular, se estudiaron el Péndulo Invertido sobre un Carro (**PIC**), el Péndulo con Disco Inercial (**PDI**), el Péndulo Esférico Invertido (**PEI**) y el Péndulo con Masa Radialmente Móvil (**PMRM**). La aportación de esta tesis es la estabilización alrededor del punto de equilibrio inestable de estos cuatro sistemas no lineales subactuados.

La estrategia de estabilización empleada para el **PIC** se basa en el método de ajuste de modelo. Este método consiste en forzar a que el sistema en lazo cerrado se comporte como un sistema Euler-Lagrange, donde la matriz característica de inercia es constante. La técnica basada en funciones de saturación anidadas fue empleada en una segunda forma de estabilización del **PIC**. Las mismas ideas empleadas en esta segunda solución fueron aplicadas para controlar al **PDI**. El uso de funciones de saturación anidadas fue posible porque, tanto el **PIC** como el **PDI**, se pudieron expresar en forma aproximada como una cadena de integradores con una perturbación no lineal.

Para solucionar la estabilización del sistema **PEI** se propuso una estrategia de control muy simple basada en el método de Lyapunov y en combinación con el teorema de invariancia de LaSalle. La ley de control propuesta garantiza la estabilidad local y asintótica del sistema en lazo cerrado alrededor del punto de equilibrio inestable, con una región de atracción muy grande. La estabilización del sistema **PMRM** se logró mediante un controlador proporcional derivativo **PD**. El diseño de este controlador se basó en el método de Lyapunov tomando en consideración que el péndulo está restringido a moverse únicamente dentro de un conjunto admisible predefinido.

La efectividad y eficiencia de las leyes de control obtenidas para los cuatro sistemas no lineales subactuados se verificó mediante simulaciones numéricas.

# Abstract

The present doctoral dissertation is devoted to the application of the Nonlinear Control Theory to a very important class of mechanical systems known as under-actuated mechanical systems, characterized for having fewer controllers than degrees of freedom. From there the difficulties to be able to control them and, for this reason, they are considered a test bed to verify several control strategies.

The under-actuated systems class object of this dissertation is the one formed by the inverted pendulums. Particularly, the Inverted Pendulum Mounted on a Cart (**IPC**), the Inertial Wheel Pendulum (**IWP**), the Spherical Inverted Pendulum (**SIP**) and the Inverted Pendulum with Moving Mass (**IPMM**). The main contribution of this dissertation is the stabilization around the unstable equilibrium point of these four under-actuated nonlinear system.

The stabilization strategy used for the **IPC** is based on the model-matching. This method consists of forcing that the closed-loop system behaves as an Euler-Lagrange system, where the inertia characteristic matrix is constant. The technique based on nested saturation functions was used in a second stability solution for the **IPC**. The same ideas used in this second solution were applied to control the **IWP**. The application of nested saturation functions was able because, both the **IPC** and the **IWP**, could be approximatively expressed as a chain of integrators with a nonlinear perturbation.

To solve the stabilization of the **SIP** system a very simple control strategy was proposed, based on the Lyapunov method in conjunction with LaSalle's theorem. The proposed control law guarantees locally asymptotically stability of the system in closed-loop around the unstable equilibrium point, with a very large domain of attraction. The stabilization of the **IPMM** was accomplished by means of a proportional derivative controller **PD**. The design of this controller was based on the Lyapunov method, taking into consideration that the pendulum was restricted to only move inside of a predefined admissible set.

The effectiveness and efficiency of the obtained control laws of the four under-actuated nonlinear system were verified by numerical simulations.



# Glosario

## Notación Matemática

$\mathbb{R}^+$	Conjunto de números reales no negativos.
$R > 0$	Matriz simétrica definida positiva.
$R \geq 0$	Matriz simétrica semidefinida positiva.
$M(q)$	Matriz uniformemente definida positiva. (Matriz dependiente del estado $q$ donde los autovalores cumplen $\lambda_i > \epsilon, \forall i, \forall q$ para una cierta constante $\epsilon > 0$ .)
$G$	Matriz que multiplica al vector de control en sistemas del tipo $\dot{x} = f(x) + Gu$ .
$G^\perp$	Matriz cuyas filas son ortogonales a las columnas de $G$ , tal que $G^\perp G = 0$ y cuyo rango es $r = n - \text{rango}(G)$ .
$u$	Ley de control (vector).
$\tau$	Par de control (vector).
$g$	Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre de valor $9,8m/s^2$ .
$I_n$	Matriz identidad de orden $n$ .
$m_{ij}$	Elemento de la fila $i$ , columna $j$ de la matriz $M$ .
$m_i$	Fila $i$ -ésima de la matriz $M$ .
$m_{.j}$	Columna $j$ -ésima de la matriz $M$ .
$q$	Vector de coordenadas articulares dado por $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ en un sistema mecánico de $n$ grados de libertad.

$p$	Vector de momentos generalizados dado por $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ en un sistema mecánico de $n$ grados de libertad.
$\nabla_q f$	Vector gradiente de la función escalar $f: \left[ \frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n} \right]^T$
$\frac{\partial f}{\partial q_k}$	Elemento k-ésimo de $\nabla_q f$ .
$\mathcal{L}$	Función de Lagrange o Lagrangiano.
$\mathcal{L}_q$	Véase la sección 2.3.2.
$\mathcal{L}_2$	Véase la sección 2.3.2.
$H(q, \dot{q})$	Función de Hamilton de un sistema en lazo abierto.
$M(q)$	Matriz de inercia en lazo abierto.
$K(q, \dot{q})$	Energía cinética en lazo abierto.
$V(q)$	Energía potencial en lazo abierto.
$\text{rango}(A)$	Rango de la matriz $A$ .
$\sigma_m(s)$	Función de saturación lineal.

## Terminología matemática

<b>Actuador:</b>	Es aquel dispositivo o subsistema que se encarga de regular la potencia de una <i>planta</i> . La gama de actuadores que se pueden controlar es muy extensa y variada. Entre los más habituales se encuentran los destinados a producir movimientos (motores y cilindros), los destinados a trasiego de fluidos (bombas) y los de tipo térmico.
<b>Control:</b>	Es la manipulación indirecta de las magnitudes de un sistema denominado <i>planta</i> a través de otro sistema llamado <i>sistema de control</i> .
<b>Curva de nivel:</b>	Lugar geométrico de dimensión $n - 1$ en el espacio de estados donde la energía permanece constante.
<b>Conjunto de nivel:</b>	Lugar geométrico donde una función toma valores inferiores a una determinada constante.
<b>Trayectoria acotada:</b>	Trayectoria donde la norma euclidiana del vector $q$ está acotada.
<b>Conjunto abierto:</b>	Conjunto en el que para cada elemento $x$ , existe una bola de radio $r$ contenida en él.
<b>Conjunto cerrado:</b>	Conjunto cuyo complemento es un conjunto abierto.
<b>Conjunto acotado:</b>	Conjunto donde existe una cota $M \in \mathbb{R}^n$ tal que $\ x\  \leq M$ para todo elemento $x$ contenido en él.
<b>Conjunto compacto:</b>	Conjunto cerrado y acotado.
<b>Conjunto conexo:</b>	Conjunto donde para cada par de puntos existe una sucesión de segmentos que los une plenamente contenida en él.
<b>Error:</b>	Es la diferencia entre el valor leído o transmitido por el instrumento y el valor real de la variable medida.

<b>Función propia:</b>	Función $V(x)$ definida en $\mathcal{X}$ tal que los conjuntos $\{x \in \mathcal{X}   0 \leq V(x) \leq c\}$ son compactos para cada $c \in \mathbb{R}^+$ . Equivale al término <i>radialmente no acotada</i> .
<b>Linealización:</b>	En muchos casos, la proporcionalidad que existe entre la variable de entrada del transductor y su señal de salida no es lineal. Las no linealidades reales causan errores en los datos medidos, para reducir esos errores, la salida del transductor se puede linealizar como parte del proceso de acondicionamiento de señal analógica. Para corregir (linealizar) las señales de salida del transductor se emplean varias técnicas de linealización, incluyendo la modificación de los circuitos del transductor o el procesamiento analógico de la señal del transductor.
<b>Planta:</b>	Es una parte del equipo o máquina que se va a controlar.
<b>Robustez:</b>	El grado en el cual un sistema o el componente pueden funcionar correctamente en la presencia de entradas inválidas o condiciones no deseadas, a los sistemas que tienen esta propiedad se les denomina <i>sistemas tolerantes a fallas</i> .
<b>Sistema:</b>	Los sistemas físicos en un sentido más amplio, son una interconexión de componentes, dispositivos o subsistemas. Un sistema puede considerarse como un proceso en el cual las señales de entrada son transformadas por el sistema o provocan que éste responda de alguna forma, lo que da como resultado otras señales como salida.

- Sistema en lazo abierto:** Es aquel sistema en el que no hay una realimentación de la información para ajustar y mantener la salida deseada.
- Sistema en lazo cerrado:** Es aquel sistema en el que hay una realimentación de la información (por medio de sensores), que permiten ajustar y mantener la salida deseada.
- Sistema de control:** Es aquel que se encarga de gobernar la respuesta de una *planta* sin que el operador intervenga directamente sobre los elementos de salida.

## Abreviaturas y acrónimos

CD	Corriente directa.
EDO	Ecuación diferencial ordinaria.
EDP	Ecuación diferencial en derivadas parciales.
EL	Ecuaciones de Euler-Lagrange.
GL	Grado de libertad.
IDA-PBC	PBC con interconexión y asignación de amortiguamiento ( <i>Interconnection and Damping Assignment-PBC</i> ).
MATLAB	MATh LABoratory software.
MIMO	Sistema de múltiples entradas y salidas.
PBC	Control basado en pasividad.
PCH	Sistema Hamiltoniano Controlado por Puertos ( <i>Port-Controlled Hamiltonian System</i> ).
PEI	Péndulo Esférico Invertido ( <i>Spherical Inverted Pendulum</i> ).
PIC	Péndulo Invertido sobre un Carro ( <i>Inverted Pendulum Cart System</i> ).
PDI	Péndulo con Disco Inercial ( <i>Inertial Wheel Pendulum</i> ).
PMRM	Péndulo con Masa Radialmente Móvil.
PVTOL	Sistema de aterrizaje y despegue de un avión ( <i>Planar Vertical Take-off and Landing</i> ).
SISO	Sistema de una entrada y una salida.
SPI	Sistemas tipo Péndulo Invertido.
SMU	Sistema Mecánico Subactuado.

# Agradecimientos

**A mi hija Raquel:** Por ser la fuerza para continuar cada día y por el tiempo que no pude dedicarle.

**A mi esposa Rosario:** Que me tuvo paciencia y me apoyó cuando me faltaban fuerzas para seguir adelante (con  $r = \sin 2\theta$ ).

**A mi Padre:** Por que gracias a él y a Dios pude realizar mi formación profesional.

**A mi Madre:** Que aunque no esta ya conmigo, me cuida he intercede ante Dios por mi.

**A mis Hermanos:** Porque han compartido su tiempo y apoyo cuando lo he necesitado.

**Al Dr. Carlos Aguilar Ibáñez:** Mi director de tesis, porque me ha apoyado y tenido paciencia en mi trabajo, así como confianza, guiándome de una manera muy valiosa en este proyecto compartiendo su sabiduría conmigo.

**Al Dr. Santiago Suárez Castañón:** Por su valiosa ayuda, apoyo y colaboración, así como las sugerencias en la difícil preparación de los artículos que contribuyeron a esta tesis.

**A mis compañeros y amigos del CIC:** Porque me ofrecieron su valiosa amistad y siempre me dieron un consejo cuando lo necesité, y por compartir conmigo su tiempo y espacio.

**A los Sinodales:** Por sus valiosos consejos y por compartir sus conocimientos conmigo.

**Al CIC y al IPN:** Por ser las instituciones que me brindaron la oportunidad de superarme académica y profesionalmente.

**Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología:** Por el apoyo económico brindado para realizar estos estudios.

**A todas las demás personas que en algún momento me apoyaron.**



*Con amor y cariño para Raquel*

*Gracias por tu comprensión Rosario (con  $r = \sin 2\theta$ )*

*Los estudios doctorales no son más que el primer paso de una vida dedicada  
a la investigación científica y a la búsqueda de la verdad en la ciencia.*

*Anónimo*

# Índice general

Resumen	II
Abstract	IV
Glosario	VI
Agradecimientos	XII
Índice de figuras	XVIII
Índice de tablas	XX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.2.1. Objetivo general . . . . .	4
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	5
1.3. Hipótesis . . . . .	5
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	7
1.5. Contribuciones . . . . .	7
1.6. Límites y alcances . . . . .	10
1.7. Estructura de la tesis . . . . .	10
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>13</b>
2.1. Antecedentes históricos de la Teoría de Control . . . . .	13
2.2. Control de Sistemas No lineales . . . . .	19
2.2.1. Control de Sistemas No lineales Subactuados . . . . .	20
2.2.2. Control del Sistema Subactuado tipo Péndulo Invertido . . . . .	24
2.2.3. Método de Síntesis de Controladores que preservan la estructura Lagrangiana/Hamiltoniana . . . . .	28
2.2.4. Control por medio de funciones de Saturación Anidadas . . . . .	36
2.3. Fundamentos Teóricos . . . . .	39

2.3.1.	Estabilidad de Lyapunov . . . . .	39
2.3.2.	Pasividad y Disipatividad . . . . .	45
2.3.3.	Sistemas No holonómicos . . . . .	48
<b>3.</b>	<b>Sistemas Mecánicos Subactuados</b>	<b>52</b>
3.1.	Sistemas Euler-Lagrange . . . . .	52
3.2.	Sistemas Subactuados . . . . .	56
3.2.1.	Definición de Sistema Subactuado . . . . .	56
3.2.2.	Dinámica de los Sistemas Subactuados . . . . .	57
3.3.	Ejemplos de Sistemas Subactuados . . . . .	59
3.3.1.	Acrobot y Pendubot . . . . .	60
3.3.2.	Péndulo Invertido sobre un Carro (Cart-Pole System) . . . . .	63
3.3.3.	Péndulo Esférico Invertido (3D Cart-Pole System) . . . . .	66
3.3.4.	Péndulo con Disco Inercial (Inertial Wheel Pendulum) . . . . .	67
3.3.5.	Péndulo de Furuta . . . . .	70
3.3.6.	PVTOL (Planar Vertical Take-off and Landing) . . . . .	72
<b>4.</b>	<b>Estabilización del Péndulo Invertido utilizando un ajuste de modelo</b>	<b>74</b>
4.1.	Introducción . . . . .	74
4.2.	Modelo del Péndulo Invertido sobre un Carro . . . . .	75
4.3.	Estrategia de control . . . . .	78
4.3.1.	Solución de las condiciones de ajuste . . . . .	79
4.4.	Análisis de estabilidad . . . . .	81
4.5.	Resultados de la simulación . . . . .	84
<b>5.</b>	<b>Control de Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido por funciones de Saturación Anidadas</b>	<b>87</b>
5.1.	Introducción . . . . .	87
5.2.	Control del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro . . . . .	89
5.2.1.	Modelo no lineal . . . . .	89
5.2.2.	Estrategia de Control . . . . .	92
5.2.3.	Resultados de Simulación . . . . .	99
5.3.	Control del Péndulo con Disco Inercial . . . . .	101
5.3.1.	Modelo no lineal del Péndulo con Disco Inercial . . . . .	101
5.3.2.	Estrategia de control . . . . .	104
5.3.3.	Simulación Computacional . . . . .	113
<b>6.</b>	<b>Estabilización del Péndulo Esférico Invertido mediante el método de Lyapunov</b>	<b>117</b>
6.1.	Introducción . . . . .	117
6.2.	Modelo del Péndulo Esférico Invertido . . . . .	118

6.3.	Estrategia de control . . . . .	119
6.3.1.	Cómo proponer una función de Lyapunov . . . . .	119
6.3.2.	Obtención de la ley de control . . . . .	121
6.3.3.	Análisis de estabilidad . . . . .	123
6.4.	Simulaciones numéricas . . . . .	125
<b>7.</b>	<b>Control del comportamiento oscilatorio de un sistema mecánico no lineal: Caso Péndulo Invertido con Masa Móvil</b>	<b>127</b>
7.1.	Introducción . . . . .	127
7.2.	Ecuación de movimiento . . . . .	128
7.3.	Control lineal <b>PD</b> . . . . .	131
7.3.1.	Control basado en energía . . . . .	133
7.4.	Resultados de simulación . . . . .	137
7.4.1.	Parámetros de simulación . . . . .	137
7.4.2.	Comentarios sobre las simulaciones . . . . .	138
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>140</b>
8.1.	Desarrollos futuros . . . . .	143
<b>A.</b>	<b>Modelos Dinámicos de Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido</b>	<b>144</b>
A.1.	Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro . . . . .	144
A.1.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	144
A.1.2.	Inestabilidad del péndulo invertido en lazo abierto . . . . .	150
A.2.	Sistema Péndulo con Disco Inercial . . . . .	151
A.3.	Sistema Péndulo Esférico Invertido . . . . .	154
<b>B.</b>	<b>Linealización Parcial por Retroalimentación</b>	<b>157</b>
<b>C.</b>	<b>Demostraciones de lemas y comentarios adicionales</b>	<b>161</b>
C.1.	Demostración del lema 4.3.2 . . . . .	161
C.2.	Comentario 4.2.2 . . . . .	163
C.3.	Demostración del lema 6.3.1 . . . . .	165
C.4.	Demostración del lema 7.3.5 . . . . .	166
<b>D.</b>	<b>Publicaciones y congresos generados del trabajo de investigación</b>	<b>168</b>
	<b>Referencias</b>	<b>170</b>

# Índice de figuras

3.1. Acrobot. . . . .	61
3.2. Pendubot. . . . .	62
3.3. Péndulo Invertido sobre un Carro. . . . .	64
3.4. Péndulo Esférico Invertido. . . . .	66
3.5. Péndulo con Disco Inercial. . . . .	68
3.6. Péndulo de Furuta. . . . .	71
3.7. PVTOL. . . . .	72
4.1. Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro. . . . .	76
4.2. Curvas de nivel para $\alpha = 0,25$ , $\alpha = 0,5$ , $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 3$ . . . . .	81
4.3. Comportamiento en lazo cerrado de las posiciones del sistema para dos valores diferentes de $k_p$ . . . . .	85
4.4. Comportamiento en lazo cerrado de las velocidades del sistema para dos valores diferentes de $k_p$ . . . . .	86
4.5. Robustez del controlador propuesto. . . . .	86
5.1. Péndulo Invertido sobre un Carro. . . . .	89
5.2. Respuesta en lazo cerrado del ángulo y velocidad angular del péndulo. . . . .	100
5.3. Respuesta en lazo cerrado de la posición y velocidad carro. . . . .	100
5.4. Comportamiento del controlador $v$ y de la función de energía $V$ . . . . .	100
5.5. Péndulo con Disco Inercial. . . . .	101
5.6. Respuesta del sistema en lazo cerrado cuando $\delta = 35,71$ . . . . .	115
5.7. Respuesta en del sistema en lazo cerrado para $\delta = 3,5$ . . . . .	116
6.1. Sistema Péndulo Esférico Invertido. . . . .	118
6.2. Respuesta en lazo cerrado de las variables angulares del sistema. . . . .	126
6.3. Respuesta en lazo cerrado de las posiciones y velocidades del sistema. . . . .	126
7.1. Péndulo Invertido con Masa Radialmente Móvil . . . . .	129
7.2. Curvas de nivel alrededor del origen. . . . .	133
7.3. Simulación del sistema en lazo cerrado para la condición inicial $q(0)$ . . . . .	139
7.4. Simulación del sistema en lazo cerrado para la condición inicial $x(0)$ . . . . .	139

A.1. Péndulo Invertido sobre un Carro. . . . .	145
A.2. Péndulo con Disco Inercial . . . . .	152
A.3. Sistema Péndulo Esférico Invertido . . . . .	155

# Índice de tablas

2.1. Panorama histórico de la Teoría de Control . . . . .	18
---	----

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Desde muchas décadas atrás hasta la actualidad el desarrollo de técnicas de control para sistemas mecánicos es uno de los campos de investigación más activos en la ingeniería, esto debido a que su desarrollo ha permitido crear maquinas automáticas con un fuerte impacto en áreas tales como producción, almacenaje y supervisión de materiales peligrosos, construcción, tele-operación y vehículos autónomos por nombrar sólo algunas. No obstante, las soluciones a problemas existentes no se han agotado ni problemas nuevos han dejado de surgir por ello la necesidad de desarrollar nuevas técnicas de control sigue siendo una tarea vigente y en algunos casos urgente.

En esta tesis se aplica la Teoría de Control de sistemas no-lineales a una clase muy importante de sistemas mecánicos denominados **sistemas mecánicos subactuados**,<sup>1</sup> que se caracterizan fundamentalmente por tener menos actuadores que grados de libertad. En particular, me enfoqué a resolver el problema de estabilización alrededor del punto de equilibrio inestable de algunos sistemas pertenecientes a la familia de péndulos invertidos, que son una subclase de sistemas subactuados como el Péndulo Invertido sobre un Carro (**PIC**), el Péndulo con Disco Inercial (**PDI**), el Péndulo Esférico Invertido (**PEI**) y el Péndulo con Masa Radialmente Móvil (**PMRM**).

---

<sup>1</sup>Una bicicleta o una avión son ejemplo cotidianos de esta clase de sistemas.



Actualmente existen técnicas de control desarrolladas a finales del siglo pasado para sistemas completamente actuados<sup>2</sup> como los robots manipuladores clásicos. Por ejemplo, las técnicas basadas en pasividad [46, 31, 158]; la teoría de Lyapunov [112, 181] o la linealización por retroalimentación [190, 188]. Desafortunadamente, un sistema subactuado es considerablemente más complejo que un sistema completamente actuado, por lo que las técnicas usadas para controlar a estos últimos no pueden aplicarse de forma directa a un sistema subactuado.

Así, en los últimos años una serie de aplicaciones científicas, militares e industriales han motivado a los investigadores a estudiar los sistemas mecánicos subactuados, con la finalidad de desarrollar algoritmos de control que estabilicen sistemas como barcos, vehículos acuáticos, helicópteros, aeronaves, aerodeslizadores, satélites o robots, los cuales pueden ser considerados como “subactuados”, por alguna de las siguientes razones:

1. La dinámica del sistema.
2. Reducir el costo en el diseño o por un propósito práctico.
3. Falla en los actuadores.
4. Provocar la creación artificial de sistemas no-lineales complejos de bajo orden con el propósito de mejorar el control de sistemas subactuados de alto orden.

Esto ha provocado que las investigaciones se enfoquen en la obtención de algoritmos de control para sistemas no-lineales subactuados generales, pero debido a la dificultad para lograr este objetivo, se ha optado por estudiar sistemas mecánicos más simples los cuales son ejemplos representativos en el área académica y de experimentación como el Péndulo Invertido [189]; el Péndulo con Disco Inercial [187]; el Pendubot [186]; el Acrobot [183]; el Péndulo de Furuta [23]; el sistema bola-viga [170], y el sistema de aterrizaje y despegue plano de un avión (PVTOL) [90].

---

<sup>2</sup>Es decir, son sistemas con el mismo número de **actuadores** que **grados de libertad**.

Por lo anterior, en este trabajo se desarrollan estrategias de control para los Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido (**SPI**) que consisten en un péndulo situado sobre una base móvil que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación,<sup>3</sup> debido a que la aceleración del péndulo no puede ser controlada directamente, los **SPI** se consideran sistemas subactuados. Estos sistemas mecánicos son una familia de dispositivos que constituyen un banco de prueba muy completo e interesante en la Ingeniería de control no-lineal, algunos de los integrantes de esta familia son: el Péndulo Invertido sobre un Carro [20]; el Péndulo con Rueda de Inercia [187]; el Péndulo Esférico Invertido [15]; el Péndulo de Furuta [72]; el Pendubot [39], entre otros de interés para los investigadores, debido a que su modelo matemático puede modelar el comportamiento de sistemas aplicados en la vida real más complejos, como el control de cohetes [210]; el modelo del control de posición de un propulsor primario espacial para despegues [148]; los robots caminantes de dos pies [102, 217]; el movimiento de los pies del ser humano [113]; los vehículos terrestres [200]; los sistemas antisísmicos en construcciones [191, 134], o bien, los sistemas de absorción de vibraciones mecánicas. Cabe destacar que el sistema Péndulo Invertido tiene características importantes que lo convierten en un tópico de investigación muy interesante, resaltando las siguientes:

- Es un sistema multivariable subactuado con dinámicas de movimiento no-lineales.
- El sistema no es linealizable por medio de la relación de entrada-salida, esto significa que no podemos encontrar una relación directa y simple entre la salida del sistema y la entrada de control [99].
- El sistema linealizado en lazo abierto presenta las características de inestabilidad y de fase no mínima en el punto más alto del sistema [148]. Por otra parte, si se estudia la energía de sistema no-lineal, su forma representa una punto silla en el punto de equilibrio inestable demostrando la inestabilidad [57].
- El sistema pierde controlabilidad y otras propiedades geométricas cuando el sistema cruza la horizontal [128].

---

<sup>3</sup>La base móvil puede ser un carro que se mueve a lo largo de una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza horizontal o un disco que gira libremente en un eje paralelo al eje de rotación del péndulo.

Es importante comentar que estos sistemas tienen un rango de controlabilidad restringido a una pequeña vecindad alrededor del punto de equilibrio inestable [165]. Esto hace que muchas leyes clásicas de control no puedan ser completamente llevadas a cabo [175]. Por ejemplo, en general el problema de seguimiento a una trayectoria puede ser realizado alrededor de una pequeña vecindad del punto de equilibrio inestable. Además, la mayoría de estos sistemas pierden la controlabilidad en ciertas regiones del espacio de trabajo y no son robustos en presencia de fuerzas disipativas.

Lo anterior provoca que sea complicado realizar maniobras de control como las que permitan estabilizar el péndulo alrededor de la posición de equilibrio inestable y las relacionadas a la estabilización alrededor de órbitas homoclinicas [128, 174, 184]. Sin embargo, se conoce que el modelo lineal del Péndulo Invertido es localmente controlable alrededor del punto de equilibrio inestable, por lo tanto, el problema de estabilización puede ser solucionado utilizando la técnica de desplazamiento de polos [175].

Por consiguiente, lo anterior motiva la necesidad de desarrollar nuevas técnicas de control aplicadas a sistemas subactuados y en especial a los sistemas tipo Péndulo Invertido que son uno de los problemas clásicos de sistemas subactuados [20], ya que el péndulo no recibe directamente ninguna señal de control debido a que toda la acción es aplicada a la base móvil, convirtiéndose en un modelo de referencia para evaluar un amplia gama de métodos de control no-lineales [72, 54, 118].

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

- Proporcionar algunas herramientas analíticas que permitan resolver el problema de estabilización de Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido (**SPI**) alrededor del punto de equilibrio inestable tales como el Péndulo Invertido sobre un Carro, el Péndulo con Disco Inercial y el Péndulo Esférico Invertido.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Proponer un controlador estabilizador capaz de llevar el Sistema del Péndulo Invertido sobre un Carro alrededor del punto de equilibrio inestable, evitando la necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales de las condiciones de ajuste que en general son muy complejas [26, 32, 33].
- Desarrollar un controlador que estabilice al Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro alrededor del punto de equilibrio inestable por medio de un control por funciones de saturación anidadas sin que sea necesario tener una función candidata de Lyapunov para todo el sistema.
- Resolver el problema de estabilización del Péndulo con Disco Inercial por medio del método de control por funciones de saturación anidadas, considerando la presencia de fuerzas disipativas en la coordenada no actuada, ya que estas tienden a desestabilizar la solución en lazo cerrado especialmente en la posición superior [78, 209].
- Solucionar la estabilización del Péndulo Esférico Invertido alrededor del punto de equilibrio inestable utilizando el método de Lyapunov caracterizado porque el dominio de atracción puede ser tan grande como se desee.
- Proponer un controlador asintótico estabilizador para atenuar las vibraciones en un sistema mecánico subactuado no-lineal sin fricción, el cual está restringido a moverse dentro de un conjunto admisible predefinido. El sistema mencionado representa una versión simplificada de la dinámica de edificios rígidos restringidos a oscilar en el plano.

## 1.3. Hipótesis

Partiendo de la idea de que los sistemas tipo Péndulo Invertido (tales como el Péndulo Invertido sobre un Carro y el Péndulo con Disco Inercial) pueden expresarse como una cadena de integradores con una perturbación no-lineal, permitirá proponer

una estrategia de **Control basado en funciones de saturación anidadas**.

Por otra parte, si el sistema Péndulo Invertido sobre un Carro en lazo cerrado puede ser forzado a comportarse como otro sistema no-lineal con ciertas propiedades de estabilidad, entonces será posible utilizar el **ajuste de modelo**.

Además, en el caso del Péndulo Esférico Invertido, si se puede encontrar una función definida positiva, tal que su derivada sea semi-definida negativa entonces existe la posibilidad de obtener una ley de control que estabilice el sistema.

Como consecuencia, resolveremos el problema de estabilización de sistemas tipo Péndulo Invertido alrededor del punto de equilibrio inestable por medio de diversas técnicas de control.

Las siguientes consideraciones serán tomadas en cuenta para proponer las estrategias de control.

1. El Péndulo Invertido sobre un Carro y el Péndulo Esférico Invertido se pueden mover únicamente por encima del plano horizontal, es decir es válido para valores de ángulo entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .
2. Se debe considerar que el desplazamiento del carro o la base son acotados, es decir, están restringidos a moverse en cierta región definida por las características físicas del sistema.
3. En el Péndulo con Disco Inercial, el ángulo del péndulo puede variar de  $-\pi$  a  $\pi$ .
4. Además, se considera la presencia de una fuerza disipativa en la coordenada no actuada del Péndulo con Disco Inercial.

## 1.4. Planteamiento del problema

En este trabajo abordamos el problema de estabilización de Sistemas tipo Péndulo Invertido (**SPI**), el cual consiste en estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable bajo la suposición que el sistema está inicializado dentro de su dominio de atracción.

Se establece a partir del objetivo planteado una metodología a seguir como se muestra a continuación:

1. Estudio y obtención del modelo matemático del sistema mecánico.
2. Análisis de las características dinámicas del modelo obtenido.
3. Diseño de los algoritmos de control.
4. Simulación numérica de los algoritmos de control.
5. Evaluación de las estrategias de control tomando como referencia los resultados de las simulaciones numéricas.

## 1.5. Contribuciones

*La principal aportación del presente trabajo es proporcionar herramientas analíticas que permitan solucionar el problema de estabilización de Sistemas tipo Péndulo Invertido (**SPI**) alrededor del punto de equilibrio inestable.*

Para lograr lo anterior, se proponen diferentes estrategias de control. A continuación los aportes más relevantes de cada una:

1. **Ajuste de modelo** (*Model Matching*)
  - a) Desarrollar un ajuste de modelo (*Model Matching*) para obtener un controlador que lleve el Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro a su posición de equilibrio inestable.

- b) Presentar una manera sencilla de solucionar las condiciones de ajuste (*Matching Conditions*) derivadas de la energía cinética y la energía potencial de sistema, necesarias para encontrar un controlador que estabilice el Sistema Péndulo Invertido sin tener que resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales muy complejo como lo realizan en otros trabajos donde se utiliza este enfoque [26, 33, 32, 109].
- c) La estrategia de estabilización consiste en forzar al sistema en lazo cerrado a que se comporte como un sistema Euler-Lagrange, donde la matriz de inercia es constante. Proponer una matriz de inercia con esta característica elimina la necesidad de solucionar tres ecuaciones diferenciales no lineales como lo realizó Gómez-Estern [77].
- d) La estrategia de control propuesta permite que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable localmente y exponencialmente estable localmente alrededor del origen.

## 2. Control por funciones de saturación anidadas

- a) Presentar un conjunto de transformaciones que permitan aplicar un controlador basada en saturaciones anidadas para solucionar el problema de estabilización del Sistema Péndulo Invertido, así como del Péndulo con Disco Inercial.
- b) Esta técnica permite proponer un controlador estabilizador sin que sea necesario tener una función candidata de Lyapunov para el sistema completo.
- c) El análisis de estabilidad del sistema completo es sencillo comparado con el que se realiza en otros trabajos [127, 149].
- d) Además, el controlador propuesto permite que los sistemas en lazo cerrado sean asintóticamente estables de forma global y exponencialmente estables de forma local alrededor del punto de equilibrio inestable o posición vertical inestable.

- e) Físicamente, la estrategia de control consiste en llevar el péndulo cerca de la posición invertida y mover gradualmente el carro o el disco al origen.

### 3. Control basado en el método de Lyapunov

- a) Desarrollar una ley de control que estabilice al Sistema Péndulo Esférico Invertido alrededor del punto de equilibrio inestable.
- b) Proponer una metodología para obtener una función de Lyapunov definida positiva cuya derivada sea semi-definida negativa (disipativa).
- c) La ley de control propuesta garantiza la estabilidad local y asintótica del sistema en lazo cerrado.
- d) Además, el sistema en lazo cerrado tiene una región de atracción que puede ser tan grande como se desee para cualquier posición inicial por encima del plano horizontal.

Como una motivación del estudio de los sistemas tipo péndulo invertido; una aportación adicional de este trabajo, es proponer una solución sencilla al problema de atenuación de vibraciones de un péndulo invertido sin fricción con masa móvil, utilizando el enfoque basado en Lyapunov para estabilizar asintóticamente el sistema<sup>4</sup> bajo la suposición de que el sistema es inicializado en su dominio de atracción. La estrategia de control propuesta explota las propiedades físicas del sistema original que se utilizan para moldear la energía total del sistema en lazo cerrado. En lo que se refiere a la aplicabilidad de la ley de control propuesta, el modelo no lineal presentado es una versión simplificada de la dinámica de edificios rígidos, restringidos a oscilar en el plano (excitaciones externas). Siendo un problema interesante la atenuación de los efectos provocados por perturbaciones desconocidos (fuerzas sísmicas) en las estructuras civiles por medio de un control activo.

---

<sup>4</sup>El péndulo está anclado al pivote, por medio de un resorte torsional, que mantiene el sistema en la posición vertical estable, como consecuencia el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.



## 1.6. Límites y alcances

Este trabajo está enfocado a desarrollar leyes de control estabilizadoras para los Sistemas tipo Péndulo Invertido (**SPI**).

*El alcance del presente trabajo de investigación se limita, a los Sistemas tipo Péndulo Invertido por ser considerados problemas clásicos de sistemas subactuados, ya que el péndulo no recibe directamente ninguna señal de control. Es importante comentar que por medio de simulación computacional se observará el desempeño de las estrategias de control propuestas en esta tesis usando la plataforma de MATLAB<sup>TM</sup>, los objetivos y alcances de este trabajo no contemplan el desarrollo de una plataforma virtual o una implementación de las estrategias en un sistema real debido a que no se cuenta con dicho sistema, por lo tanto, se da la pauta a una serie de líneas de investigación futuras destinadas primordialmente a la extensión de los razonamientos teóricos aquí expuestos y a perfeccionar los resultados.*

## 1.7. Estructura de la tesis

Este trabajo consta de ocho capítulos complementados con cuatro apéndices. En este primer capítulo se ofrece una exposición de motivos y las contribuciones del trabajo.

El capítulo 2 muestra de manera general los antecedentes históricos de la Teoría de Control, así como una revisión del estado del arte del estudio de sistemas subactuados y en particular de los Sistemas tipo Péndulo Invertido resaltando las técnicas de control que se utilizan en las aportaciones de la tesis. Además, se presentan formalmente los fundamentos teóricos necesarios para la comprensión del texto subsiguiente.

El capítulo 3 presenta los conceptos de los sistemas Euler-Lagrange, así como la definición, características y ejemplos de los sistemas subactuados.

El capítulo 4 muestra el control de un sistema mecánicos subactuado simple empleando el método de ajuste de modelo. Se presenta el método con rigor teórico y se aplica a la resolución del problema ampliamente conocido en la comunidad del control como Péndulo Invertido sobre un Carro. Se aporta una manera sencilla de solucionar las condiciones de ajuste (*matching conditions*), con las cuales se encuentra la ley de control que estabiliza el sistema en el punto de equilibrio inestable. Lo expuesto en este capítulo ha dado lugar a una serie publicaciones [7, 11].

El capítulo 5 está dedicado a la estabilización de los sistemas subactuados Péndulo Invertido sobre un Carro y Péndulo con Disco Inercial por medio de funciones de saturación anidadas. Esta técnica parte de la idea de expresar el sistema como una cadena de cuatro integradores con una perturbación no-lineal para posteriormente proponer un controlador. Los resultados de este capítulo han sido publicados [8] y dieron la pauta para un artículo en congreso [14].

En el capítulo 6 se presenta la estabilización del Sistema Péndulo Esférico Invertido por medio del método de Lyapunov y el teorema de LaSalle. Lo expuesto en este capítulo dio lugar a una publicación [84].

El capítulo 7 aborda el problema de control de vibraciones mecánicas de un sistema no-lineal subactuado mediante el enfoque de Lyapunov, para obtener un controlador que estabilice asintóticamente el sistema. Los resultados de este capítulo han sido publicados en un artículo de congreso [4].

En el siguiente capítulo se muestra conclusiones del trabajo de investigación y se exponen algunas posibles líneas de investigación posteriores a esta tesis.

El apéndice A describe cómo se obtienen los modelos matemáticos del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro, Péndulo con Disco Inercial y Péndulo Esférico Invertido utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En el apéndice B se muestra el procedimiento de cómo realizar la linealización parcial por retroalimentación.

En el apéndice C se detallan los procedimientos de las pruebas de los *Lemas* que en los capítulos anteriores se presentan, así como un comentario del capítulo 4.

El apéndice D muestra las publicaciones en revistas y congresos derivadas del trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Estado del Arte

### 2.1. Antecedentes históricos de la Teoría de Control

La teoría de control ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. Hoy en día es parte importante e integral en los procesos industriales y de manufactura. Por ejemplo, en el diseño de los sistemas de pilotos automáticos en aeronaves y la construcción de automóviles. También es esencial en las operaciones industriales para el control de variables físicas como presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo para mantener un desempeño óptimo en los procesos productivos.

Entonces, para iniciarse en el estudio de un área la mejor manera de entenderla es examinar su evolución y los motivos para su existencia. Enseguida mostramos una breve revisión histórica del control automático.

Una interesante trabajo que muestra el panorama histórico de la teoría de Control fue escrito por O. Mayr en 1970 [139], el cual describe detalladamente el control de diversos mecanismos utilizados en la edad media, así como otros creados hace 300 años. A continuación, se describen algunos de los trabajos más significativos en el área de control automático que han tenido un impacto relevante en desarrollo de la disciplina.

Año	Propuesto	Descripción
1788	James Watt	Desarrolló el regulador de velocidad centrífugo para el control de velocidad de una máquina de vapor.
1868	J. C. Maxwell	Se le atribuye realizar el primer estudio de estabilidad en control automático en su artículo denominado “On Governors” [138], en el cual desarrolló las ecuaciones diferenciales del regulador centrífugo de Watt y linealizando dichas ecuaciones cerca del punto de equilibrio, encontró la ecuación característica del sistema, permitiéndole estudiar el efecto que tienen los parámetros del sistema en la estabilidad mostrando que el sistema es estable si las raíces tienen parte real negativa. Maxwell encontró solo resultados satisfactorios en sistemas hasta de tercer orden.
1877	E.J. Routh <sup>1</sup>	Este investigador propuso una técnica numérica para determinar cuando la ecuación característica del sistema tiene raíces con parte real negativa ( <b>estables</b> ) sin tener que obtenerlas por medio de factorización, conocido como <b>Criterio de estabilidad de Routh</b> en un ensayo denominado “Tratado sobre la estabilidad de un estado de movimiento dado” ( <i>A Treatise on the Stability of a Given State of Motion</i> ) [167]. Este criterio de estabilidad sólo se aplica a los polinomios con una cantidad finita de términos. Cuando se aplica el criterio a un sistema de control, la información sobre la estabilidad se obtiene directamente de los coeficientes de la ecuación característica.
Cont...		

<sup>1</sup>E.J. Routh fue ganador del premio Adams en 1877 por su criterio de estabilidad.

Año	Propuesto	Descripción
1893	A. M. Lyapunov	El trabajo de Lyapunov se considera uno de los más relevantes en la Teoría de Control, su estudio estuvo basado en la ecuación no-lineal de movimiento y la noción generalizada de energía [129], incluyendo resultados para ecuaciones diferenciales lineales que son equivalentes al criterio de Routh. Desafortunadamente su trabajo no apareció en la literatura de control hasta 1958.
1895	A. Hurwitz	Planteó una manera de determinar la estabilidad de la ecuación característica denominándolo <b>criterio de estabilidad de Hurwitz</b> <sup>2</sup> [94], que ofrece la condición suficiente para que todas la raíces tengan parte real negativa. El criterio define una matriz llamada <i>Matriz Hurwitz</i> con los coeficientes de la ecuación y enuncia <i>el polinomio de la ecuación característica tiene raíces con parte real negativa si y sólo si los menores principales diagonales de la matriz son todos positivos</i> . <sup>3</sup>
Cont...		

<sup>2</sup>El criterio estabilidad Hurwitz es equivalente al de Routh, y en Teoría de Control se denomina **Criterio de Routh-Hurwitz** la demostración de dicha equivalencia se puede encontrar en el libro de Ingeniería de Control Moderna del autor Katsuhiko Ogata [148].

<sup>3</sup>La ecuación característica que se cumple con el criterio de estabilidad de Hurwitz se le conoce en Teoría de Control como *polinomio Hurwitz*

Año	Propuesto	Descripción
1932	H. Nyquist	Nyquist desarrolló la Teoría de Regeneración para el diseño de amplificadores estables derivándose el <i>criterio de estabilidad de Nyquist</i> [147], el cual se basa en un teorema de la teoría de variable compleja. El criterio de Nyquist determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto y los polos en lazo abierto, este criterio es útil en la ingeniería de control, debido a que permite determinar gráficamente la estabilidad del sistema en lazo cerrado a partir de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto sin que sea necesario determinar los polos en lazo cerrado.
1940	H. W. Bode	Hendrik Wade Bode usó las gráficas de respuesta frecuencial de magnitud y fase de una función compleja e investigó la estabilidad en lazo cerrado usando las nociones de margen de ganancia y fase [41]. En 1945 aparecen los detalles completos de su trabajo en el libro “Network Analysis and Feedback Amplifier Design” [42].
Cont...		

Año	Propuesto	Descripción
1948	W. R. Evans	Propuso otro enfoque para diseñar sistemas de control. Evans trabajó en el área de control y guiado de aviones en donde se dio cuenta que la utilización de métodos frecuenciales era muy compleja, por lo cual se vio en la necesidad desarrollar técnicas y reglas para encontrar la raíces de la ecuación característica de una manera gráfica [58]. A este método se le conoce como <i>método lugar de las raíces</i> , y en él se representan las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema. El método debe su nombre al lugar de las raíces del polinomio característico del sistema en lazo cerrado cuando un determinado parámetro (por lo general la ganancia) varía de cero a infinito. Dicho gráfico muestra de manera clara la contribución de cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado.
1957	R. Bellman	Bellman aplicó la programación dinámica al control óptimo de sistemas discretos demostrando que la manera natural de solucionar el problema de control óptimo es por retrasos en el tiempo. Su procedimiento resultó en esquemas en lazo cerrado generalmente no lineales [29].
1958	L. S. Pontryagin	Desarrolló el <i>principio máximo de Pontryagin</i> , el cual soluciona el problema de control partiendo del cálculo variacional desarrollado por L. Euler (1707-1783)[163].
Cont...		



Año	Propuesto	Descripción
1960	R. E. Kalman	Kalman y sus colaboradores publicaron una serie de artículos de gran relevancia. En el primero hizo público el trabajo de Lyapunov sobre control de sistemas no lineales en el dominio de tiempo [105]. Además, abordó el tema de control óptimo proporcionando el diseño de las ecuaciones para el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) [103]. Otros trabajos interesantes fueron el filtrado óptimo y la teoría de estimación en los cuales proporcionó el diseño de las ecuaciones para el filtro de Kalman discreto [104] y posteriormente desarrolló el filtro de Kalman continuo [106].

Tabla 2.1: Panorama histórico de la Teoría de Control

Todas las técnicas previamente descritas que involucran conceptos relacionados con métodos basados en frecuencia corresponden a lo que se conoce como **Teoría de Control Clásica**, pero a partir de las nuevas e importantes herramientas teóricas que R. E. Kalman y otros investigadores introdujeron a principios de los años 60's del siglo pasado se dio el paso a una nueva era en la Teoría de Control que se ha denominado **Teoría de Control Moderna**, cuyo diseño es realizado en el dominio del tiempo y su método principal es el *modelo en espacio de estado*, el cual permite representar sistemas de múltiples entradas y salidas (**MIMO** por sus siglas en inglés) como un sistema de una entrada y una salida (**SISO**) y sus herramientas principales son el álgebra lineal y matrices.

Cabe resaltar que la Teoría de Control Moderna dio la pauta para que se generaran diversas ramas del Control Automático como son: Control Lineal [53], Control No lineal [97], Control Óptimo [207], Control Robusto [51], Control Adaptable [21], Control

Jerárquico <sup>4</sup> y Control Inteligente <sup>5</sup>

Por lo anterior, el interés de los investigadores aumentó dando lugar a nuevas disciplinas como la Mecatrónica<sup>6</sup> y debido al rápido avance en la informática y las comunicaciones, hoy día se ofrecen oportunidades sin precedentes para que el campo de control amplíe sus contribuciones,<sup>7</sup> como las que se han realizado en áreas diferentes a la ingeniería como sistemas biológicos [178, 179, 180], aplicaciones biomédicas [75, 208, 28] y sistemas socioeconómicos [44, 132, 204, 49].

## 2.2. Control de Sistemas No lineales

En esta sección se presenta una revisión de algunas investigaciones realizadas en control de sistemas subactuados que son sistemas que poseen menor cantidad de entradas de control (**actuadores**) que **grados de libertad**. Y de manera particular se presentan algunos trabajos dedicados al control de sistema tipo péndulo invertido, que son tema central de este trabajo. Por lo tanto, el enfoque principal de esta tesis es la síntesis de controladores para estabilizar sistema tipo péndulo invertido y así lograr una contribución al estado del arte en este tema.

*Por tanto, la aportación de este trabajo consiste en estudiar y desarrollar técnicas de control no lineal para resolver el problema de estabilización del sistema subactuado tipo péndulo invertido alrededor del punto de equilibrio inestable.*

---

<sup>4</sup>Un sistema de control jerárquico es una forma de sistema de control en el cual un conjunto de dispositivos y software toman la forma de un árbol en donde cada nodo opera por separado, realizando tareas de un nodo superior, ordenando las tareas de sus nodos subordinados, enviando señales resumidas a su nodo superior y recibiendo señales de sus nodos subordinados. Las hojas de los nodos son sensores o actuadores.

<sup>5</sup>Abarca diversos tópicos de inteligencia artificial para controlar un sistema dinámico como redes neuronales, lógica difusa, algoritmos genéticos, cómputo evolutivo, entre otras.

<sup>6</sup>La Mecatrónica surge de la combinación sinérgica de distintas ramas de la ingeniería, entre las que destacan la mecánica, la electrónica, la ingeniería de cómputo y los sistemas de control. Siendo su principal propósito el análisis y diseño de productos, y los procesos de manufactura automatizados.

<sup>7</sup>Un informe que presenta las conclusiones y recomendaciones de los nuevos desafíos y oportunidades que afronta la comunidad de Control, se presenta en el libro “*Control in an Information Rich World Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics, and Systems*”[22].

Para lograr este resultado es importante comentar los siguientes temas:

1. Control de Sistemas No lineales Subactuados.
2. Control del Sistemas Subactuado tipo Péndulo Invertido.
3. Método de control por moldeo de energía.
4. Control de sistemas por funciones de saturación anidadas.

En seguida, presentamos el estado del arte de cada uno de los temas mencionados.

### 2.2.1. Control de Sistemas No lineales Subactuados

Los sistemas subactuados están compuestos por una amplia gama de sistemas mecánicos. Por ejemplo, robots móviles no holonómicos, robots bípedos, vehículos submarinos, manipuladores con estructura flexible, misiles, satélites de comunicaciones, *etc.* [185]. El término *subactuado* se refiere a que no todas las uniones o grados de libertad (**GL**) del sistema tienen un actuador o son directamente controladas. Por lo tanto, los investigadores han puesto bastante atención a los problemas de control asociados con sistemas subactuados y han propuesto diversas estrategias de control para resolverlo tales como, control por back-stepping [171], control basado en energía o pasividad [63, 128], control adaptable [107], control difuso [116] o inteligente [47], control híbrido [66], control por modos deslizantes [211], entre otras.

Existe una extensa literatura de investigación dedicada a este tipo de sistemas [59]. Para una introducción al problema y una clasificación interesante desde el punto de vista de posibles estrategias para la solución de sistemas subactuados se recomienda revisar [152, 203, 185]. Otros trabajos en los cuales se presentan diversas estrategias de control aplicadas a los sistemas subactuados, se pueden encontrar en [39, 2, 85, 76, 30, 119].

En la práctica un pequeño conjunto de sistemas subactuados ha cobrado gran popularidad por el desafío que representan, para los que existe una amplia gama de

controladores en la literatura. Evidentemente hay una infinidad de ejemplos inexplorados, tantos como queramos idear para lo cual las técnicas existentes se muestran insuficientes. A continuación, comentaremos algunas investigaciones efectuadas para solucionar problemas relacionados con el control de sistemas subactuados que han tenido un impacto considerable en las áreas educativas y de investigación. Como primer ejemplo podemos mencionar que M. Spong [182, 183, 184] presenta una excelente introducción al sistema Acrobot<sup>8</sup> utilizando la linealización parcial por retroalimentación (ver apéndice B). Otro trabajo interesante para este sistema es el propuesto por Yan Zheng et. al. [216], el cual desarrolla una ley de control difusa de estructura variable que utiliza la teoría de Lyapunov para garantizar estabilidad asintótica global. También [47] presenta un esquema de control inteligente para resolver el problema de trasladar de la posición colgante hasta la posición invertida del Acrobot, así como el de mantener el sistema en la posición inestable cuando inicia muy cerca de esta posición. Otros trabajos dedicados al control de este sistema se pueden encontrar en [43, 88, 91, 164].

Para un sistema similar al anterior denominado Pendubot, [186] presenta el diseño y control del sistema usando conceptos tales como linealización parcial por retroalimentación, dinámica cero y se comenta su uso con fines educativos. Fantoni et. al. [63] proponen un algoritmo de estabilización considerando las propiedades de pasividad del pendubot y utilizan métodos basados en energía para diseñar la ley de control. Además, el análisis de convergencia se realiza por medio de la Teoría de Lyapunov. Un sistema subactuado muy interesante es el Péndulo de Furuta (péndulo rotacional) desarrollado por K. Furuta en el Instituto Tecnológico de Tokio. Algunos trabajos relevantes sobre el control de este sistema se comentan enseguida. En 1992, Furuta et. al. [72] propusieron un controlador que utiliza el método de control por retroalimentación del pseudo-estado. En 1996, Iwashiro et. al. [98] consideraron el uso de métodos basados en energía para controlar el sistema. En 1999, Olfati-Saber [149] propuso una estabilización semi-global para el péndulo invertido rotacional usando controladores

---

<sup>8</sup>El Acrobot es robot de 2 eslabones, el cual tiene un actuador en el eslabón 2 (codo).

de punto fijo. Fantoni et. al. [60] presentan una técnica de control para estabilizar el sistema en una órbita homoclínica. En [12] se propone un controlador que realiza la estabilización y seguimiento de trayectoria utilizando el enfoque de plitud diferencial. Un trabajo interesante fue el desarrollado en [145], donde se deriva un controlador usando la idea de que el sistema puede ser representado como un péndulo plano más una fuerza giroscópica. Gordillo et al. [79] proponen una solución al problema de trasladar el péndulo de la posición colgante, hasta la posición invertida aplicando el método del gradiente de velocidad de Fradkov [17, 68] para el modelo de dimensión 4. Además, se compara esta ley con la estrategia de Åström-Furuta [24] que utiliza un modelo de dimensión 2. En 2006, C. Aguilar et. al. [9] propusieron una estrategia para estabilizar el péndulo de Furuta utilizando el método de Lyapunov.

Un sistema que ha atraído la atención de los investigadores es el sistema viga-bola [153] para el cual existen diversos trabajos en donde se proponen estrategias como el método por retroalimentación aproximada desarrollado por Hauser et al. [89], saturaciones anidadas pequeñas [193] y estabilización por retroalimentación de salida [196]. Sin embargo, la estabilización del sistema viga-bola por medio de funciones de Lyapunov se puede encontrar en [170]. El cual está basado en el trabajo de Mazenc y Praly presentado en [140]. Otro sistema interesante es el Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), el cual fue introducido por primera vez en [201] y ha sido utilizado como un sistema no-lineal estándar en diversos trabajos con el propósito de comparar y realizar pruebas entre diferentes metodologías de control [48, 100, 108, 197]. Por ejemplo, Escobar et. al. [56] proponen una estabilización asintótica global utilizando el moldeo de energía y la inyección de amortiguamiento. En [101] solucionan el problema de estabilización semi-global por retroalimentación de la salida y el de seguimiento de trayectoria del sistema TORA, considerando que el ángulo de la masa y/o la posición de carro son las salidas. Además, en [143] se presenta un trabajo que incluye una estrategia de control adaptable por medio de redes neuronales dinámicas.

El sistema de aterrizaje y despegue de un avión (PVTOL) [90] es otro ejemplo de sistema subactuado y diversas metodologías para controlar este sistema se pueden encontrar en la literatura. En 1996, Teel [195] ilustró los resultados del teorema de pequeña ganancia aplicados al sistema PVTOL. Además, este teorema proporciona los formalismos para analizar el comportamiento de sistemas de control que incluyan saturaciones. También en 1996, Martin et. al [135] propusieron una extensión de los resultados presentados por Hauser [90]. La idea que presentan es encontrar una salida plana para el sistema dividiendo el problema de seguimiento en dos etapas. En 2000, R. Olfati-Saber [151] presenta una configuración de estabilización global para el sistema de aterrizaje y despegue de un avión (VTOL) con un acoplamiento de entrada fuerte usando retroalimentación de estado estática. Otros métodos utilizados para controlar este sistema se han basado en el método de Lyapunov [62] y en métodos de control híbrido [141].

Por otra parte, un sistema subactuado es un ejemplo de sistema mecánico con restricciones *no holonómicas* de segundo orden [154] que no cumple con la condición de Brockett [115] en la cual propone un teorema que proporciona las condiciones necesarias para que exista una ley de control por retroalimentación que establezca asintóticamente un sistema [45]. Como consecuencia en muchos sistemas subactuados es imposible utilizar una ley de control por retroalimentación para estabilizarlos alrededor de sus puntos de equilibrio, aunque sea localmente.

Como conclusión, pese a los grandes avances teóricos y experimentales que se han logrado en los últimos años los resultados distan de tener gran generalidad, aunque existen trabajos que han logrado generalizar los sistemas subactuados en dos tipos: Uno es la forma normal en cascada introducido por Olfati-Saber [150] en donde muestra un método que transforma el sistema completo en dos subsistemas no lineales, reduciendo el problema de control del sistema completo, al de controlar cada subsistema. El otro tipo, propuesto por Murray y Sastry [144], proporciona las condiciones suficientes para convertir por medio de retroalimentación de estado y transformación de coordenadas un sistema no holonómico con dos entradas a una forma de cadena. Por lo tanto, el estado del arte de sistemas subactuados está muy lejos de encontrar

métodos de control que resuelvan toda la gama de esta clase de sistemas, ya que el desarrollo actual solo ha resuelto cada ejemplo de manera particular. Por lo cual este trabajo pretende contribuir al estado del arte.

### 2.2.2. Control del Sistema Subactuado tipo Péndulo Invertido

Los sistemas tipo péndulo invertido son un conjunto de dispositivos mecánicos tales como el Péndulo Invertido sobre un Carro [20], el Péndulo con Rueda de Inercia [187], el Péndulo Esférico Invertido [15], el Péndulo de Furuta [72] que han sido utilizados en las ultimas décadas por los investigadores como banco de pruebas para evaluar una amplia gama de métodos de control [18, 19, 34, 205, 109].

Como se ha mencionado, los Sistemas tipo Péndulo Invertido (**SPI**) están formados por un péndulo en el cual uno de sus extremos esta unido mediante una articulación a una base móvil lo que le permite girar libremente y, debido a que la aceleración angular del péndulo no puede ser controlada, estos sistemas son considerados ejemplos de sistemas subactuados.

Existen básicamente dos problemas relacionados con el control de péndulos invertidos que se han estudiado. El primero, es el de llevar el péndulo desde cualquier posición y en particular de la posición colgante natural hasta la posición invertida. A este problema se le conoce como **swing up**.<sup>9</sup> El segundo problema consiste en estabilizar al péndulo alrededor del punto de equilibrio inestable.

*De lo anterior, la aportación principal que se presenta en esta tesis, consiste en desarrollar técnicas para resolver el problema de estabilización de algunos sistemas del tipo péndulo invertido alrededor del punto de equilibrio inestable.*

A continuación, comentaremos el estado del arte de algunas investigaciones que se han realizado al Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro, al Péndulo con Disco

---

<sup>9</sup>Por su denominación en inglés

Inercial, así como al Péndulo Esférico Invertido que son los sistemas que se abordan en este trabajo.

Comenzaremos con el Péndulo Invertido sobre un Carro (**PIC**) que es uno de los sistemas tipo péndulo invertido más estudiados y consiste en un péndulo que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un carro que se mueve sobre una guía rectilínea por la acción de una fuerza horizontal. Inicialmente, en los años 60's del siglo pasado se podía observar el Péndulo Invertido sobre un Carro en los laboratorios de control de las universidades más prestigiadas [20]. La demostración consistía en situar de manera manual el péndulo en la posición vertical invertida y soltarlo para que de manera autónoma, retroalimentando su posición, continuara en la posición invertida mediante la adecuada actuación del carro. Por ser este un problema de carácter local, únicamente se utilizan métodos lineales para resolver este problema, como por ejemplo, la técnica de desplazamiento de polos [85].

Existe en la literatura una amplia gama de trabajos dedicados a resolver el problema de control del Péndulo Invertido sobre un Carro. Por lo que, a continuación, mencionamos algunos trabajos interesantes que han estudiado este problema. Wei et. al. en [202] presentan una estrategia de control que descompone en etapas la manera de llevar el péndulo desde la posición de equilibrio estable inferior a la posición de equilibrio inestable superior, tomando en cuenta que el movimiento horizontal del carro está restringido. Chung y Hauser [54] proponen una ley de control no-lineal para regular la posición del carro y la energía de oscilación del péndulo, obteniendo como resultado un sistema en lazo cerrado que posea una órbita periódica localmente estable. En 1996, Fradkov [67] propuso una estrategia de control para las oscilaciones no lineales, en particular este método puede ser aplicado para estabilizar el péndulo invertido. Mazenc y Praly presentan una ley de control que consiste en agregar integradores, la cual es usada en la estabilización del péndulo invertido en la posición de equilibrio inestable, cuando éste se encuentra por encima del plano horizontal [140]. En 1999, Olfati-Saber [149] fundamentó su trabajo en la linealización parcial por retroalimentación para desarrollar un procedimiento de estabilización global o



semiglobal (*fixed point backstepping*) el cual se aplicó para estabilizar el sistema en un punto de equilibrio sobre el plano superior. En contraste con los autores anteriores, Fantoni y Lozano [59] proponen un enfoque de control muy sencillo comparado con otras estrategias de control, debido a que sólo considera la energía total del sistema llevando al péndulo a una órbita homoclínica mientras el desplazamiento del carro converge a cero. Por otro lado, en 2003 Salas et. al. [169] diseñaron una ley de control utilizando técnicas de control no-lineal basadas en *forwarding* [170], provocando que la posición superior del péndulo invertido pase a ser asintóticamente estable para condiciones iniciales que estén dentro de un dominio de atracción predeterminado.

C. Aguilar et. al. [6] proponen una función candidata a Lyapunov para diseñar un controlador que permite obtener un sistema en lazo cerrado asintóticamente estable localmente alrededor del punto de equilibrio inestable. Un trabajo recientemente publicado presenta una solución a los dos problemas de control del péndulo invertido por medio de una única entrada de control. Teniendo como característica que al tener una sola ley, se evita la necesidad de realizar una comutación entre distintas leyes [80].

Otros enfoques que se han utilizado para resolver la estabilización del Péndulo Invertido sobre un Carro son los basados en lógica difusa y redes neuronales. Como por ejemplo, S. Horikawa et. al [92] proponen un controlador difuso para el péndulo invertido utilizando redes neuronales difusas que son capaces de identificar automáticamente las reglas difusas. En [131] se presenta un controlador difuso usando retroalimentación visual permitiendo observar que es posible controlar el sistema por medio de lógica difusa y retroalimentación visual. Un trabajo donde se utiliza una red neuronal *back-propagation* como controlador para estabilizar el péndulo invertido se presenta en [96]. Otros trabajos interesantes que utilizan los métodos libres de modelo pueden revisarse en [16, 142, 136].

Como comentario adicional, el Péndulo Invertido sobre un Carro es un sistema que ha tenido una repercusión importante en la educación, siendo utilizado como base para el desarrollo de herramienta software/hardware destinada al estudio de sistemas de control [73, 146], así como el desarrollo de un vehículo basado en la estabilización de

un péndulo invertido, en el cual se prueban diversas estrategias de control con fines educativos [200].

A continuación, mencionaremos algunos trabajos de otro sistema que se aborda en esta tesis denominado Péndulo con Disco Inercial (PDI)<sup>10</sup> introducido por M. Spong [187]. Este dispositivo está constituido por un péndulo unido a un disco giratorio en uno de sus extremos, el cual gira libremente sobre un eje paralelo al eje de rotación del péndulo. El disco es accionado por un motor de corriente directa (**CD**), mientras que el péndulo es subactuado. El torque del motor produce una aceleración angular del disco, lo que genera un torque de acoplamiento en el eje del péndulo.

En [187] se presentan un esquema de control basado en métodos de energía para resolver el problema de traslación desde la posición más baja, hasta la posición invertida del sistema Péndulo con Rueda de Inercia, permitiendo mantener el sistema en la posición inestable cuando inicia su movimiento muy cerca de dicha posición, además, se muestra que este sistema es linealizable por retroalimentación con respecto a una salida, suponiendo que el ángulo del péndulo se encuentra encima del plano superior. Olfati-Saber [151] transforma la dinámica del sistema en un sistema no-lineal en cascada mediante un cambio de coordenadas globales, para proponer una estabilización asintótica global alrededor del punto de equilibrio superior. Fantoni y Lozano [59] presentan una estrategia con la cual solucionan la oscilación y balanceo del péndulo alrededor del punto de equilibrio. La estrategia se basa en la energía total del sistema y garantiza la convergencia del péndulo a una órbita homoclínica. En [159], el método de Control Basado en Pasividad con Interconexión y Asignación de Amortiguamiento (**IDA-PBC**) se utilizó para estabilizar asintóticamente el **PDI** alrededor del punto de equilibrio inestable superior. Para lograr lo anterior, se solucionaron dos condiciones de ajuste que permiten obtener de manera directa el controlador. Cabe mencionar que en ninguno de los trabajos mencionados se toma en cuenta el efecto de la fuerza de amortiguamiento en la coordenada no actuada.

---

<sup>10</sup>El péndulo con disco (o rueda) inercial en inglés se denomina Inertial Wheel Pendulum (IWP)

Para complementar esta sección mencionaremos algunos trabajos dedicados al control del sistema Péndulo Esférico Invertido [119], el cual es un miembro más de la familia de Sistemas subactuados tipo Péndulo Invertido. Este sistema es una versión más general que el péndulo en dos dimensiones.

Para controlar este sistema en el año 2000, Albouy y Praly [15] diseñaron un controlador basado en pasividad para llevar el péndulo a la posición superior con poca velocidad y cambiar de un controlador no-lineal a uno lineal, para mantener el péndulo en la posición superior. Bloch et.al. [35] solucionan el problema de estabilización no local por medio de un controlador Lagrangiano. Sin embargo, no garantizan la convergencia asintótica al origen. Otro trabajo interesante fue desarrollo por G. Liu et. al. [122] donde se presenta un controlador que es capaz de estabilizar las posiciones angulares del péndulo garantizando la estabilidad local del sistema completo por medio de saturaciones anidadas. Hoshino et.al. [93] describen la estabilización de un triple péndulo esférico alrededor de la posición superior usando un manipulador planar y sensores de visión. Para obtener mejores resultados, los autores diseñaron el péndulo y el controlador. En [172], se presenta un nuevo modelo para el péndulo en tres dimensiones y se soluciona el problema de control, considerando al sistema como un caso de cuerpo rígido. Además, en este trabajo se comentan algunos retos de investigación interesantes de este sistema. Otros trabajos interesantes que abarcan este tópico se pueden encontrar en [124, 120, 123, 121]. En las siguientes secciones de esta tesis se presentan una serie de desarrollos para solucionar el problema de estabilización de algunos sistemas tipo péndulo invertido tales como el péndulo invertido sobre un carro, el péndulo con rueda inercial y el péndulo esférico invertido alrededor del punto de equilibrio inestable. Contribuyendo al estado del arte de este tema.

### **2.2.3. Método de Síntesis de Controladores que preservan la estructura Lagrangiana/Hamiltoniana**

En la literatura de control existen técnicas que permiten estabilizar en el punto de equilibrio deseado a los sistemas subactuados mediante leyes de control diseñadas

por medio de procedimientos relativamente sistemáticos. La idea principal de estos métodos es buscar una ley de control que transforme el sistema en lazo cerrado original en otro sistema mecánico con ciertas propiedades de estabilidad. Es decir, que se conserve la estructura física del sistema. Para lograr la estabilización de sistemas subactuados mediante estos métodos es necesario moldear la energía cinética y energía potencial del sistema y obtener un sistema en lazo cerrado con una energía modificada. Estos métodos se han basado en la estructura Hamiltoniana y Lagrangiana para abordar este tipo de problemas.

El método que utiliza los formalismos de Euler-Lagrange fue desarrollado por el grupo de Marsden, Bloch y Leonard [36] dando pauta para un serie de artículos [37, 34, 35, 33, 209] y fue extendido por D. Auckly [27, 25, 26], J. Hamberg [86, 87] y Zenkov [214, 38] denominándolo *Método de Lagrangianos Controlados*. La principal característica de este método es determinar una ley de control que transforme el sistema en lazo cerrado original en otro sistema mecánico a partir de solucionar un conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) denominadas **condiciones de ajuste** (*Matching Condition*), cuya solución es una función total de energía modificada, que permite obtener de forma directa dicha ley de control.

Una metodología similar a la anterior fue desarrollada a principios del año 2000 por R. Ortega et. al [162, 161, 159, 77, 156] cuyas ideas se basan en los formalismos de los Sistemas Hamiltonianos controlados por puertos (*port-controlled Hamiltonian*), llamándolo *Método de Control Basado en Pasividad con Interconexión y Asignación de Amortiguamiento* (IDA-PBC) y su objetivo también es encontrar una ley de control que conserve la estructura del sistema a partir de un conjunto de **EDP**, con la diferencia que al utilizar la estructura hamiltoniana es posible encontrar una gama más amplia de soluciones a estas **EDP**, permitiendo encontrar diversas funciones de energía modificada.

Como comentario adicional, en la literatura se describe de manera clara la equivalencia entre el método de control basado en pasividad con interconexión y asignación de

amortiguamiento y el método de Lagrangianos Controlados [32, 52]. A continuación, describiremos brevemente cada uno de los métodos.

### A. Método IDA-PBC

El método de síntesis Basado en Pasividad denominado Interconexión y Asignación de Amortiguamiento [159] o **IDA-PBC** tiene las siguientes características:

1. Está formulado para la clase de sistemas Hamiltonianos Controlados por Puertos (**PHC**), que es una clase que contiene estrictamente los sistemas de Euler-Lagrange
2. La función de energía en lazo cerrado se obtiene al resolver un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), parametrizadas en términos de las matrices de interconexión y amortiguamiento, las cuales pueden ser elegidas cuidadosamente invocando consideraciones físicas para resolverlas.

Para aplicar el método, considere un sistema subactuado con una función energía en la forma Hamilton descrita como sigue:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V(q) \quad (2.1)$$

Donde  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ , son las posiciones y momentos generalizados respectivamente,  $M(q) = M(q)^T > 0$  es la matriz de inercia, y  $V(q)$  es la energía potencial. Si suponemos que el sistema no tiene amortiguamiento natural, entonces las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (2.2)$$

La matriz  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es determinada por el modo en que el controlador  $u \in \mathbb{R}^m$  actúa sobre el sistema.

El método IDA-PBC sigue dos pasos básicos del Control Basado en Pasividad (**PBC**) [158]:

1. *Moldeo de energía*: esto significa modificar la función total de energía del sistema para asignar el punto de equilibrio  $(q^*, 0)$ .
2. *Inyección de amortiguamiento* para lograr estabilidad asintótica en el sistema. Además, para mantener la interpretación del mecanismo de estabilización se requiere que el sistema en lazo cerrado sea en la forma de Hamiltoniano controlado por puertos [198].

Enseguida, comentaremos los aspectos más importantes de este método para un estudio más detallado consultar [159].

En este método se persigue una dinámica en lazo cerrado con función de energía de la forma:

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + V_d(q) \quad (2.3)$$

Donde  $M_d(q) = M_d(q)^T > 0$  y  $V_d(q)$  representan la matriz de inercia y la energía potencial en lazo cerrado respectivamente.

Además, la dinámica de un sistema Hamiltoniano Controlado por Puertos debe ser de la siguiente manera.<sup>11</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = [J_d(q, p) - R_d(q, p)] \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Siendo,

$$J_d(q, p) = -J_d^T(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} ; \quad R_d = R_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_vG^T \end{bmatrix}$$

<sup>11</sup>Para una justificación analítica y física ver [160, 198].

que representan una matriz antisimétrica que permite aumentar los grados de libertad en el diseño, también llamada de *interconexión generalizada* y la *matriz de disipación en lazo cerrado*, respectivamente.

Para poder obtener la ley de control que conserve la estructura del sistema, las ecuaciones de estado en lazo abierto y cerrado se deben ajustar exactamente. Esto quiere decir que la ley de control debe calcularse de modo que:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = [J_d(q, p) - R_d(q, p)] \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (2.5)$$

Podemos mencionar que este método presenta dificultades cuando los sistemas son subactuados, ya que el conjunto de funciones de Hamilton  $H_d$  alcanzables en lazo cerrado es limitado y depende de la facilidad para resolver un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Por lo cual, en el caso subactuado existe una matriz  $G^\perp$  de rango  $r < n$  siendo  $n$  el número de grados de libertad que representa las direcciones en las que la ley de control no tiene efecto, cumpliéndose que:

$$G^\perp G = 0 \quad (2.6)$$

es decir, si  $G$  es una matriz constante, las filas de  $G^\perp$  forman el núcleo de  $G$ .

Si multiplicamos (2.5) por  $G^\perp$  se obtiene:

$$G^\perp [J_d(q, p) - R_d(q, p)] \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} = G^\perp \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Esta ecuación deben cumplirse para cualquier valor de la ley de control, y por lo tanto, representa una restricción en el conjunto de sistemas hamiltonianos alcanzables en lazo cerrado definidos por las matrices  $(H_d, J_d, R_d)$ . Como consecuencia, los parámetros  $(H_d, J_d, R_d)$  deben ser seleccionados de tal manera que se cumplan las ecuaciones de ajuste derivadas de (2.7) y al mismo tiempo representar una dinámica

en lazo cerrado con las propiedades de estabilidad deseadas.

Entonces, si existe un solución para las ecuaciones de ajuste obtenidas de (2.7), es decir, la solución de (2.2) es igual a la de (2.4), podemos decir que la ley de control esta dada por:

$$u = (G^T G)^{-1} G^T (\nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p) \quad (2.8)$$

Como conclusión, la esencia de el método IDA-PBC es proporcionar métodos de cálculo para determinar los valores más adecuados de  $H_d$ ,  $J_d$  y  $R_d$ , y así obtener leyes de control para el ajuste lazo abierto-lazo cerrado.

## B. Método de lagrangianos controlados

El método de *Lagrangianos Controlados* fue introducido por Bloch et.al. [36] para controlar sistemas subactuados y posteriormente fue extendido y formalizado [37, 34, 86, 35, 33, 27].

Este método es una técnica constructiva para estabilizar sistemas subactuados, en la cual se modifica el Lagrangiano del sistema original para construir un Lagrangiano controlado. Definiéndose el Lagrangiano ( $\mathcal{L}$ ) como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. Las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas del Lagrangiano controlado describen al sistema en lazo cerrado, donde los nuevos términos que aparecen en las ecuaciones de movimiento permiten determinar las entradas de control.

A continuación expondremos brevemente sus fundamentos. Dado un sistema mecánico, descrito por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = u_i \quad (2.9)$$

Siendo,  $i = (1, \dots, n)$ .

Donde, eventualmente, algunos de los términos de control  $u_i$  pueden ser nulos. Suponiendo que el objetivo es estabilizar el sistema en un punto de equilibrio deseado  $(q^*, \dot{q}^*)$ ,



para lograr lo anterior, el método de Lagrangianos controlados propone una manera de encontrar un sistema Euler-Lagrange, definido por el Lagrangiano  $L_c$ , tal que  $(q^*, \dot{q}^*)$  es un punto de equilibrio estable de la dinámica en lazo cerrado.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial q_i} \right) = \tilde{u}_i \quad (2.10)$$

Con,  $i = (1, \dots, n)$ .

Por tanto, este método consiste en encontrar una ley de control  $u$  que transforme al sistema (2.9) en el sistema en lazo cerrado (2.10) a partir de la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas **condiciones de ajuste**. Esto significa que las soluciones  $q(t)$  de las trayectorias del sistema (2.9) sean también las trayectorias de (2.10).

En [37, 86, 35] se enuncian algunos teoremas que establecen las condiciones que debe cumplir el conjunto de Lagrangianos controlados, este resultado es conocido como **teorema de ajuste** o *matching theorem*, a continuación se resume brevemente.

Utilizando la notación de [86, 37], los Lagrangianos en lazo abierto y cerrado toman, respectivamente, la forma

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - \tilde{V}(q) \quad (2.12)$$

donde,  $g_{ij}$  y  $\tilde{g}_{ij}$  representan los elementos de la matriz de inercia en lazo abierto y cerrado, respectivamente. En caso de que el sistema presentado en (2.11) sea subactuado implica la existencia de una variedad no nula denominada subespacio de las direcciones no actuadas ( $\Lambda$ ). La proyección en este espacio se representa por  $\Lambda_A^i u_i = 0$  ( $A = 1 \dots m$ ). Empleando los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  y  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$  de las matrices  $g_{ij}$  y  $\tilde{g}_{ij}$  [1], y definiendo

$$\begin{aligned}
T_{jk}^i &= \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i \\
h_i^j &= g_{ik} \tilde{g}^{kj} \\
\tilde{h}_i^j &= \tilde{g}_{ik} \tilde{g}^{kj} \\
T_{ijk} &= h_i^p h_j^q h_k^r \tilde{g}_{pm} T_{qr}^n
\end{aligned}$$

donde,  $g^{ij}$  y  $\tilde{g}^{ij}$  representan las inversas de  $g_{ij}$  y  $\tilde{g}_{ij}$ , respectivamente. Enseguida, presentamos los Teoremas de ajuste propuesto por J. Hamberg [86].

**Teorema 2.2.1** [*Teorema 2.1*]**Teorema de ajuste (Matching Theorem)**

$\tilde{\mathcal{L}}_c$  está ajustado (es decir, cumple (2.10) cuando  $\tilde{u}_i = 0$ ) si y solo si las siguientes condiciones se cumplen.

$$\begin{aligned}
\Lambda_A^i g_{il} T_{jk}^l &= 0 \\
\Lambda_A^i h_i^j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^j} &= \Lambda_A^i \frac{\partial V}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

Cuando las condiciones anteriores se cumplen, la ley de control en lazo cerrado es de la forma:

$$u_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} - h_i^j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j} - g_{il} T_{jk}^l \dot{q}^j \dot{q}^k$$

Por otro parte, este método también comprende la adición de un término de amortiguamiento para lograr la estabilidad asintótica de sus puntos de equilibrio, el siguiente teorema da las condiciones para cumplir lo anterior.

**Teorema 2.2.2** [*Teorema 2.2*]**Teorema de Ajuste Generalizado (Generalized Matching Theorem)**

Se tiene un ajuste generalizado (es decir,  $\tilde{u}_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i \leq 0$ ) si las siguientes condiciones se cumplen:

$$\begin{aligned}
\text{symm}_{ABC}(T_{ijk} \Lambda_A^i \Lambda_B^j \Lambda_C^k) &= 0 \\
\Lambda_A^i h_i^j \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^j} &\equiv \Lambda_A^i \frac{\partial V}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

donde  $symm$  denota la parte simétrica.

Además, con el fin de obtener estabilidad asintótica del punto de equilibrio inestable utilizando el método de Lagrangianos controlados y el ajuste generalizado, se debe asegurar que la energía  $\tilde{E}$ <sup>12</sup> tenga un mínimo en el punto de equilibrio.

### 2.2.4. Control por medio de funciones de Saturación Anidadas

Esta técnica fue introducida por A. R. Teel para estabilizar una cadena de integradores lineal y recientemente ha sido utilizado para controlar algunos sistemas subactuados. Enseguida, ilustraremos de manera breve sus fundamentos, un explicación más detallada se puede encontrar en [192].

Como primer aspecto, definiremos la función de saturación como sigue:

**Definición 2.2.1** (*Función de saturación lineal*)

Dadas dos constantes positivas  $L, M$  con  $L \leq M$ , una función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina un saturación lineal para  $(L, M)$  si es función continua, no decreciente y satisface:

1.  $s\sigma(s) > 0 \quad \forall s \neq 0$
2.  $\sigma(s) = 0$  cuando  $|s| \leq L$
3.  $|\sigma(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbb{R}$

Consideremos un sistema lineal constituido por multiples integradores de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \tag{2.13}$$

---

<sup>12</sup>La energía  $\tilde{E}$  se define como  $\tilde{E} \triangleq \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - \tilde{\mathcal{L}}$

La idea fundamental de esta técnica es encontrar una ley de control que establezca asintóticamente de forma global el sistema (2.13), derivándose el siguiente teorema

**Teorema 2.2.3** *Existe una función lineal  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cualquier conjunto de constantes  $\{(L, M)\}$  donde  $L_i \leq M_i$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $M_i < \frac{L_{i+1}}{2}$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ , y para cualquier conjunto de funciones  $\{\sigma_i\}$  que son saturaciones lineales para  $\{(L_i, M_i)\}$ , el control acotado*

$$u = -\sigma_n(h_n(x) + \sigma_{n-1}(h_{n-1}(x) + \dots + \sigma_1(h_1(x)))) \dots)$$

*dé como resultado una estabilización asintótica global del sistema (2.13)*

A continuación, la demostración del teorema anterior para una mejor comprensión.

**Demostración** Consideremos la siguiente transformación de coordenadas  $y = Tx$  la cual transforma el sistema (2.13) en  $\dot{y} = Ay + Bu$  donde  $A$  y  $B$  son definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo la transformación la siguiente características

$$y_{n-i} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x_{n-i}$$

donde

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

y la transformación inversa se caracteriza por

$$x_{n-i} = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} y_{n-i}$$

Entonces, a partir de la siguiente ley de control  $u$

$$u = -\sigma_n(y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \cdots + \sigma_1(y_1)) \cdots) \quad (2.14)$$

se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \cdots + y_n + u \\ \dot{y}_2 &= y_3 + \cdots + y_n + u \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= y_n + u \\ \dot{y}_n &= u \end{aligned} \quad (2.15)$$

Enseguida, consideremos la evolución del estado  $y_n$ , para lo cual se propone la función de Lyapunov  $V_n = y_n^2$ , donde su derivada  $\dot{V}_n$  es de la forma:

$$\dot{V}_n = -2y_n [\sigma_n(y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \cdots + \sigma_1(y_1)) \cdots)]$$

Entonces, si aplicamos la condición 1 de la definición 2.2.1, a  $\sigma_n$  y la condición 3 a  $\sigma_{n-1}$ , así como el hecho que  $M_{n-1} < \frac{L_n}{2}$ , entonces  $\dot{V}_n < 0 \quad \forall y_n \notin Q_n \{y_n : |y_n| \leq \frac{L_n}{2}\}$ . Por consiguiente, existirá un tiempo finito en el cual  $y_n$  pertenece y permanece en  $Q_n$ . Además, debido a que el lado derecho de (2.15) es globalmente Lipschitz, los estados restantes son acotados.

Ahora consideremos la evolución del estado  $y_{n-1}$ . Y observemos que  $y_n$  ahora es parte de  $Q_n$ , por lo cual el argumento de  $\sigma_n$  esta acotado por

$$\begin{aligned} |y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \cdots + \sigma_1(y_1)) \cdots| &\leq \frac{L_n}{2} + M_{n-1} \\ &\leq L_n \end{aligned}$$

Por tanto,  $\sigma_n$  opera en la región lineal como se establece en la condición 2 de la definición (2.2.1). Quedando la evolución de  $y_{n-1}$  como:

$$\dot{y}_{n-1} = -\sigma_{n-1}(y_{n-1} + \cdots + \sigma_1(y_1)) \cdots)$$

Utilizando el mismo razonamiento de  $y_n$  se puede demostrar que  $y_{n-1}$  pertenece y permanece en el conjunto  $Q_{n-1}$  después de un tiempo finito. Por tanto, este procedimiento puede ser utilizado para mostrar que después de un tiempo finito el argumento de las funciones  $\sigma_i$  se comporta como una función lineal. Como consecuencia, después de un tiempo finito, la ecuación de lazo cerrado tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= -y_1 - y_2 - \cdots - y_n\end{aligned}$$

Se puede observar de manera clara que el sistema anterior es exponencialmente estable después de un tiempo finito.

Cabe comentar, que recientemente el control por funciones de saturación anidadas se ha utilizado para solucionar el problema de estabilización en algunos sistemas subactuados, tales como: el PVTOL [65, 126, 50, 213], el Péndulo Invertido sobre un Carro [127, 61], el Péndulo con Rueda de Inercia [213] y el sistema viga-bola [194].

## 2.3. Fundamentos Teóricos

### 2.3.1. Estabilidad de Lyapunov

En los sistemas de control una de las interrogantes más importantes consiste en saber si el sistema es estable o no, debido a que si el sistema de control es inestable, típicamente éste es inútil.

En el siglo XIX, el matemático Ruso Mikhailovich Lyapunov introdujo la aproximación más útil y general para el estudio de la estabilidad en los sistemas no-lineales en su trabajo denominado “El problema general de la estabilidad en el movimiento” (**The General Problem of Motion Stability**) [129], en el que incluyó dos métodos para el análisis de la estabilidad (denominados, Método de linealización y

Método directo). El método de linealización describe la estabilidad local de los sistemas no-lineales alrededor de un punto de equilibrio a partir de las propiedades de estabilidad de su aproximación lineal. Por otro lado, el método directo no se restringe a un movimiento local, y determina las propiedades de estabilidad del sistema partiendo de la construcción de una función escalar de energía examinando su variación en el tiempo. En la actualidad, estos métodos son de gran interés en la Teoría de Control debido a que el método de linealización es la justificación teórica de la estabilidad en los sistemas lineales mientras que el método directo es una de las herramientas más importantes para el análisis y diseño de sistemas no-lineales, por lo que ambos constituyen la *Teoría de estabilidad de Lyapunov*.

Los resultados presentados en esta sección son ampliamente conocidos y empleados en la literatura del control no-lineal [110, 177, 97]. Por lo que el propósito de este apartado no es presentar un tratado sobre la Teoría de Lyapunov, sino mostrar algunas de las definiciones y conceptos básicos. Incluyéndose únicamente con el propósito de crear un texto de autocontenido, ya que son esenciales para los desarrollos de esta tesis.

Considérese un sistema autónomo de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.16)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ . De manera mas general,  $x$  denota un conjunto de coordenadas locales en un espacio  $m$ -dimensional  $\mathcal{X}$ . Además, suponemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente continua en el sentido de Lipschitz en el dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , implicando la existencia y unicidad de soluciones.

**Definición 2.3.1** [E. Stoline, 1991, Definición 3.2](**Punto de Equilibrio**)

*Un estado  $x^*$  es un estado de equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema si alguna solución  $x(t)$  es igual a  $x^*$  y permanece igual a  $x^*$  para todo el tiempo futuro.*

*Matemáticamente esto significa que el vector constante  $x^*$  satisface:*

$$0 = f(x^*) \quad (2.17)$$

con,  $f(x)$  de la forma (2.16)

Lo anterior significa que los puntos de equilibrio se determinan solucionando la ecuación algebraica (2.17).

**Definición 2.3.2** [Khalil, 1996, Definición 3.1]

El punto de equilibrio del sistema (2.16) es:

- **Estable**, si para cada  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

- **Inestable**, si no es estable.
- **Asintóticamente estable**, si el punto de equilibrio es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- **Exponencialmente estable**, si existen dos números estrictamente positivos independientes del tiempo  $\alpha$  y  $\lambda$  tal que:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{(-\lambda t)}, \forall t > 0$$

en alguna bola  $B$  alrededor del origen.

Esto significa que el vector de estado de un sistema exponencialmente estable converge al origen más rápido que una función exponencial. El número positivo  $\lambda$  es llamado razón de convergencia exponencial.

Las definiciones anteriores corresponden a una propiedad local del sistema alrededor del punto de equilibrio. Por tanto, los conceptos de estabilidad llegan a ser globales cuando se satisfacen las condiciones correspondientes para cualquier estado inicial.



### Método directo de Lyapunov (Definiciones y Teoremas)

El método directo de Lyapunov es una extensión matemática de las observaciones físicas, es decir, si la energía total de un sistema mecánico (o eléctrico) se disipa de manera continua, entonces dicho sistema, ya sea lineal o no lineal, se estabiliza en un punto de equilibrio, concluyendo que la estabilidad de un sistema se puede determinar con la variación de una sola función escalar.

Las siguientes definiciones y teoremas son parte importante para el estudio de la estabilidad en los sistemas y resumen de manera general el método directo de Lyapunov.

**Definición 2.3.3** [*E. Stoline, 1991, Definición 3.7*]  
(**Funciones definidas o semidefinidas**)

Una función escalar  $V(x)$  se dice localmente definida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ .

De manera similar,  $V(x)$  es definida negativa si  $-V(x)$  es definida positiva.

Además, si  $V(x)$  es igual a cero para  $x \neq 0$ , se puede decir que la función es semi-definida positiva o negativa:

Si  $V(0) = 0$  y  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$  se le llama semi-definida positiva; de la misma manera  $V(x)$  es semi-definida negativa, si  $-V(x)$  es semi-definida positiva.

**Definición 2.3.4** [*E. Stoline, 1991 Definición 3.8*](**Función de Lyapunov**)

$V(x)$  se llama función de Lyapunov para el sistema de la forma (2.16)

- Si en una bola  $\mathbf{B}$  que contiene el origen,  $V(x)$  es definida positiva y tiene derivada parcial continua.
- Si la derivada con respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (2.16) es semi-definida negativa, es decir:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

ó bien,

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Los siguientes teoremas pueden ser usados para el análisis de estabilidad local ó global.

**Teorema 2.3.1** [E. Stoline, 1991, Teorema 3.2] (**Estabilidad local**)

Si en una bola  $\mathbf{B}$  existe una función escalar continuamente diferenciable  $V(x)$  tal que:

- $V(x)$  sea definida positiva (localmente en  $B$ )
- $\dot{V}(x)$  sea semi-definida negativa (localmente en  $B$ )

Entonces, el punto de equilibrio  $\mathbf{0}$  es **estable**.

Más aun, si la derivada  $\dot{V}(x)$  es definida negativa localmente en  $\mathbf{B}$ , es decir,

$$V(x) < 0 \text{ en } B - \{0\}$$

entonces, el punto de equilibrio  $\mathbf{0}$  es **asintóticamente estable**.

**Teorema 2.3.2** [E. Stoline, 1991, Teorema 3.3] (**Estabilidad Global**)

Supongamos que existe una función escalar  $V$  del estado  $x$  con primera derivada continua tal que:

- $V(x)$  es definida positiva
- $\dot{V}(x)$  es definida negativa
- $V(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$

Entonces, el punto de equilibrio en el origen es **asintóticamente estable globalmente**.

### Teoremas de conjuntos invariantes

Krasovskii-LaSalle extendieron el análisis de estabilidad anterior cuando  $\dot{V}(x)$  es sólo semi-definida negativa. El punto central en estos teoremas es el *conjunto invariante*, el cual es una generalización del concepto de punto de equilibrio.

#### Definición 2.3.5 [E. Stoline, 1991, Definición 3.9] (**Conjuntos invariantes**)

Un conjunto  $S$  es un **conjunto invariante** para un sistema dinámico si para cada trayectoria del sistema la cual comienza desde un punto en  $S$  permanece en  $S$  todo el tiempo.

#### Teorema 2.3.3 [Khalil, 1996, Teorema 3.4] (**Principio de invariancia de LaSalle**)

Sea  $\Omega$  un conjunto compacto (cerrado y acotado) con la propiedad de que cada solución del sistema (2.16) que comienza en  $\Omega$  permanece en  $\Omega$  todo el tiempo. Sea  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ .

Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante, entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Cuando  $V(x)$  es definida positiva los siguientes dos corolarios son válidos extendiendo los teoremas de estabilidad.

#### Corolario 2.3.4 [Khalil, 1996, Corolario 3.1] (**Barbashin-LaSalle**)

Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.16). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida positiva, continuamente diferenciable en un dominio  $D$  que contiene al origen  $x = 0$ , tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ , entonces, el origen es **asintóticamente estable**.

#### Corolario 2.3.5 [Khalil, 1996, Corolario 3.2] (**Krasovskii-LaSalle**)

Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.16). Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida positiva continuamente diferenciable y radialmente no acotada, tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para

todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ , entonces, el origen es **asintóticamente estable globalmente**.

Es importante mencionar que cuando  $\dot{V}(x)$  es definida negativa,  $S = \{0\}$ , entonces los corolarios 2.3.4 y 2.3.5 coinciden con los teoremas 2.3.1 y 2.3.2 respectivamente.

### 2.3.2. Pasividad y Disipatividad

Los conceptos que se describirán enseguida pueden ser estudiados con mayor detalle en: [199] para estabilidad  $\mathcal{L}_2$ , [198] para pasividad e interconexión de sistemas pasivos, [157] para control basado en pasividad de sistemas EL, y [125] para sistemas disipativos.

#### A. Estabilidad $\mathcal{L}_q$

##### Definición 2.3.6 (Espacios $\mathcal{L}_q$ )

Para cada  $q \in \{1, 2, \dots\}$  se define  $\mathcal{L}_q[0, \infty] = \mathcal{L}_q$  como el conjunto de funciones medibles <sup>13</sup>  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfagan

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^q dt < \infty$$

A su vez,  $\mathcal{L}_{\infty}[0, \infty] = \mathcal{L}_{\infty}$  consiste en un conjunto de funciones medibles  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  acotadas, es decir

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)| < \infty$$

Además, se conoce que para estos espacios es posible definir las siguientes normas:

---

<sup>13</sup>Una función es medible si es el límite punto por punto de una secuencia de funciones constantes a trozos, excepto un conjunto de medida cero.

**Definición 2.3.7 (Norma  $\mathcal{L}_q$ )**

Para toda función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  contenida en  $\mathcal{L}_q$  se definen las normas

$$\|f\|_q = \left( \int_0^\infty |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad q = 1, 2, \dots$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, \infty)} |f(t)|$$

Asimismo, en el caso del espacio  $\mathcal{L}_2$  la norma esta asociada al producto interior de dos funciones  $f, g$  contenidas en  $\mathcal{L}_2$  definido como

$$\langle f|g \rangle = \int_0^\infty f(t)^T g(t) dt$$

de donde se deduce:

$$\|f\|_2 = \langle f|f \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Por otro lado, para las funciones no acotadas sin tiempo de escape finito se define el espacio extendido  $\mathcal{L}_{qe}$

**Definición 2.3.8 (Espacios  $\mathcal{L}_{qe}$ )**

Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, para cualquier  $T \in \mathbb{R}^+$  la función  $f_T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  se define como

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , t \geq T \end{cases}$$

denominándose la truncación de  $f$  en el intervalo  $[0, T]$ .

Para cada  $q = 1, 2, \dots, \infty$ , el espacio  $\mathcal{L}_{qe}$  consiste en todas las funciones medibles  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_T \in \mathcal{L}_q$  para todo  $T$  con  $0 \leq T < \infty$ .  $\mathcal{L}_{qe}$  se denomina el espacio extendido de  $\mathcal{L}_q$ .

Lo expuesto anteriormente se puede extender trivialmente a funciones  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  suponiendo la existencia de una norma definida en  $\mathbb{R}^n$ . Los conceptos presentados son

elementales para las siguientes definiciones de estabilidad  $\mathcal{L}_q$  entrada-salida.

Para representar la dinámica de un sistema haremos uso del concepto más general, mapa de entrada-salida. Sea  $U$  un espacio lineal  $m$ -dimensional con norma  $\|\cdot\|_U$ , e  $Y$  otro espacio lineal  $p$ -dimensional con norma  $\|\cdot\|_Y$  y considere el espacio de señal de entrada  $\mathcal{L}_{qe}(U)$  y el el espacio de señales de salida  $\mathcal{L}_{qe}(Y)$  junto a una aplicación entrada-salida

$$\begin{aligned} G : \mathcal{L}_{qe}(U) &\rightarrow \mathcal{L}_{qe}(Y) \\ u &\mapsto y = G(u) \end{aligned}$$

**Definición 2.3.9 (Estabilidad  $\mathcal{L}_{qe}$ )**

Sea un sistema representado por el mapeo  $G : \mathcal{L}_{qe}(U) \rightarrow \mathcal{L}_{qe}(Y)$ . Entonces, se dice que  $G$  es  $\mathcal{L}_q$ -estable si

$$u \in \mathcal{L}_q(U) \Rightarrow G(u) \in \mathcal{L}_q(Y)$$

es decir,  $G$  aplica el subconjunto  $\mathcal{L}_q(U) \subset \mathcal{L}_{qe}(U)$  en el subconjunto  $\mathcal{L}_q(Y) \subset \mathcal{L}_{qe}(Y)$

**B. Pasividad y Ganancia  $\mathcal{L}_2$**

Considere un sistema descrito en variables de estado de la forma

$$\Sigma : \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \quad , \quad u \in U \\ y &= h(x, u) \quad , \quad y \in Y \end{aligned}$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son las coordenadas locales en una variedad  $\mathcal{X}$  y  $U$  e  $Y$  son espacios lineales, de dimensiones  $m$  y  $p$ , respectivamente. En el espacio de estados  $U \times Y$  de variables externas se define la función

$$s : U \times Y$$

denominada *tasa de suministro*.

**Definición 2.3.10 (Disipatividad)**

Un sistema en variables de estado  $\Sigma$  se dice que es disipativo con respecto a la tasa de suministro  $w$  si existe una función  $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , llamada función de almacenamiento, tal que para todo  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\forall t_1 \geq t_0$  y todas las funciones de entrada  $u$

$$S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(u(t), y(t)) dt \quad (2.18)$$

La desigualdad (2.18) se conoce como **desigualdad de disipatividad** [206].

**Definición 2.3.11 (Pasividad)**

Un sistema en variables de estado  $\Sigma$  con  $U = Y = \mathbb{R}^m$  es pasivo si es disipativo con respecto a la tasa de suministro  $w(u, y) = u^T y$ .  $\Sigma$  es estrictamente pasivo a la entrada si existe  $\delta > 0$ , tal que  $\Sigma$  es disipativo con respecto a  $w(u, y) = u^T y - \delta \|u\|^2$ .  $\Sigma$  es estrictamente pasivo a la salida si existe  $\epsilon > 0$ , tal que  $\Sigma$  es disipativo con respecto a  $w(u, y) = u^T y - \epsilon \|y\|^2$ . Finalmente,  $\Sigma$  es conservativo si se cumple (2.18) con el signo de igualdad con respecto a la función  $w(u, y) = u^T y$ .

**Definición 2.3.12 (Ganancia  $\mathcal{L}_2$ )** Un sistema en variables de estado  $\Sigma$  con  $U = \mathbb{R}^m$ ,  $Y = \mathbb{R}^p$ , tiene ganancia  $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$  si es disipativo con respecto a la tasa de suministro  $w(u, y) = \frac{1}{2} \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2$ . La ganancia  $\mathcal{L}_\epsilon$  de  $\Sigma$  se define como  $\gamma(\Sigma) = \inf\{\gamma \mid \Sigma \text{ tiene ganancia } \mathcal{L}_2 \leq \gamma\}$ . Se dice que  $\Sigma$  tiene ganancia  $\mathcal{L}_2 < \gamma$  si existe  $\tilde{\gamma} < \gamma$ , tal que  $\Sigma$  tenga ganancia  $\mathcal{L}_2 < \tilde{\gamma}$ .

Existe un resultado fundamental que relaciona la pasividad con la ganancia  $\mathcal{L}_2$  y se menciona a continuación.

**Proposición 2.3.6** Si el sistema  $\Sigma$  es pasivo estrictamente a la salida, entonces tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  finita.

**2.3.3. Sistemas No holonómicos**

Los sistemas no holómicos son sistemas mecánicos que tienen restricciones de velocidades o aceleración las cuales no pueden ser integradas.

Este término fue concebido por Hertz en 1894 [168]. Y los ejemplo más típicos son sistemas ó vehículos móviles [38].

A continuación, comentaremos las definiciones de los sistemas holonómicos y no holonómicos.

**Definición 2.3.13** [Goldstein, 2001 [74]] (**Sistemas Holonómicos**)

Considere un sistema de coordenadas generalizadas  $q$

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, u)$$

supongamos que existen restricciones que limitan el movimiento del sistema. Si las condiciones de restricción pueden expresarse como ecuaciones que conectan las coordenadas (y posiblemente el tiempo) de la forma

$$h(q, t) = 0 \tag{2.19}$$

entonces las restricciones se denominan **holonómicas**, las cuales pueden integrarse para obtener la derivada de alguna función de las coordenadas generalizadas.

**Definición 2.3.14** [Goldstein, 2001 [74]] (**Sistemas No holonómicos**)

Cuando no es posible expresar las ecuaciones de restricciones de la forma (2.19) se les denomina **No holonómicas**, esto significa que las restricciones no pueden expresarse como la derivada de alguna función de las coordenadas generalizadas y por tanto no puede ser resuelta por integración.

Por otra parte, podemos mencionar que las restricciones *No holonómicas* se dividen en dos tipos:

- Las restricciones no holonómicas de primer orden definidas como restricciones de las coordenadas generalizadas y sus velocidades, las cuales se pueden encontrar en los robots móviles.



- Y las restricciones no holonómicas de segundo orden o restricciones de aceleración definidas como restricciones de las coordenadas generalizadas, velocidades y aceleraciones, las cuales se presentan en los sistemas subactuados.

Enseguida, se muestran ejemplos que ilustran de manera sencilla los conceptos de sistemas holonómicos y no holonómicos propuestos por Lefeber [115].

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= -ux_1\end{aligned}\tag{2.20}$$

donde  $(x_1, x_2)$  son los estados y  $u$  es la entrada.

Tome en cuenta que el sistema (2.20) tiene una restricción de velocidades de la forma:

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0 : \tag{2.21}$$

Podemos observar que esta restricción puede integrarse para obtener

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = c \tag{2.22}$$

donde  $c$  es una constante, por tanto la restricción (2.20) es una *restricción holonómica*

Ahora consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1u_2 - x_2u_1\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde  $(x_1, x_2, x_3)$  son los estados y  $(u_1, u_2)$  son las entradas. El sistema (2.23) también tiene un restricción de velocidades de la siguiente manera:

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 - \dot{x}_3 = 0 \tag{2.24}$$

Sin embargo, la restricción (2.24) no puede integrarse como en el caso de la restricción (2.21), es decir, la restricción (2.24) no puede expresarse como la derivada de alguna función del estado y se denomina *restricción no holonómica*.

# Capítulo 3

## Sistemas Mecánicos Subactuados

Los sistemas mecánicos subactuados se pueden encontrar en diversas aplicaciones de control, como, Robótica (ej. robots flexibles, robots móviles), vehículos aéreos (ej. helicópteros, aviones y satélites), vehículos acuáticos y algunas aplicaciones en la construcción (ej. edificios, puentes). Debido a esta gran variedad de aplicaciones estos sistemas han tomado gran importancia en los últimos años. Por tanto, el control de sistemas subactuados aún es un problema interesante para la investigación, como se puede observar en las siguientes referencias [76, 85, 152, 184].

En este capítulo se presenta una breve descripción de los sistemas Euler-Lagrange. Para posteriormente, comentar la definición y características de los sistemas subactuados, así como algunos ejemplos representativos de éstos.

### 3.1. Sistemas Euler-Lagrange

Una interesante definición de los sistemas de Euler-Lagrange (**EL**) se enuncia mediante el principio de mínima acción (o de Hamilton)[114]. Entonces, en virtud de este principio todo sistema mecánico está caracterizado por una función de las coordenadas generalizadas  $q_i$ ,<sup>1</sup> sus derivadas y el tiempo  $t$  definida como:

---

<sup>1</sup> $i = 1, 2 \dots n$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (3.1)$$

tal que las trayectorias  $q(t)$  del sistema satisfacen la siguiente condición[114]:

Supongamos que en los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , el sistema ocupa posiciones determinadas, definidas por los conjuntos de coordenadas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ . Entonces, entre estas posiciones, el sistema se moverá de forma que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (3.2)$$

tome el menor valor posible. La función  $\mathcal{L}$  se conoce como función de Lagrange y la integral  $S$  como integral de acción.

A continuación, se deducirán las ecuaciones diferenciales que dan solución al problema de minimización de la integral (3.2), por facilidad supondremos que el sistema posee un solo grado de libertad, definido por la función  $q(t)$ .

Sea, precisamente,  $q = q(t)$  la función (trayectoria) para la cual  $S$  se minimiza, esto significa que  $S$  aumenta si el sistema se sustituye por cualquier trayectoria alternativa a  $q(t)$  de la forma.

$$q(t) + \delta q(t) \quad (3.3)$$

Donde  $\delta q(t)$  es una función pequeña en todo el intervalo de tiempo entre  $t_1$  a  $t_2$ ;<sup>2</sup> y puesto que para  $t = t_1$  y  $t = t_2$  todas las funciones de la forma (3.3) deben tomar los mismos valores de  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ , ocurriendo la siguiente condición:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (3.4)$$

La variación que experimenta  $S$  al sustituir  $q$  por  $q + \delta q$  esta dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}, t) dt = 0 \quad (3.5)$$

desarrollando la variación de la integral (3.5) se tiene

---

<sup>2</sup> $\delta q(t)$  se denomina variación de la función  $q(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (3.6)$$

Y tomando en cuenta que  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ , entonces, integrando por partes el segundo término de (3.6) se obtiene:

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (3.7)$$

Al evaluar la condición (3.4), en el primer término de la ecuación (3.7) este desaparece. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que  $\delta S = 0$  será

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (3.8)$$

Para el caso que el sistema posea varios grados de libertad, la expresión anterior queda de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (3.9)$$

donde la función  $\mathcal{L}$  se define de manera general como la diferencia entre la energía cinética ( $T(q, \dot{q})$ ) y la energía potencial ( $V(q)$ ), es decir

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (3.10)$$

Por otra parte, de manera general si existieran  $m$  fuerzas externas,  $f_i(q) : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \{1, \dots, m\}$  independientes que son aplicadas al sistema, entonces la ecuación de Euler-Lagrange para un sistema mecánico con estas características sería de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F(q)u \quad (3.11)$$

donde  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$  representa el conjunto de fuerzas y momentos externos que no derivan de un potencial, entre los que habitualmente se incluyen:

- Los efectos de fricción que tienen como consecuencia una disipación de energía.
- Fuerzas y pares de control.

Estas ecuaciones representan las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico, pudiendo ser representadas como:

$$\sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)u, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

Donde  $e_k$  es la base estándar en  $\mathbb{R}^n$ ,  $g_k(q) = \partial V(q)/\partial q_k$ , y  $\Gamma_{ij}^k(q)$  son llamados símbolos de Christoffel definidos como:

$$\Gamma_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right)$$

Entonces, la forma vectorial que representa la ecuación de movimiento del sistema se expresa como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)u \quad (3.13)$$

Donde  $M(q)$  es la matriz de inercia del sistema y  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i(q)\dot{q}_k$  es un elemento de  $C(q, \dot{q})$

Cabe mencionar que  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  contiene dos tipos de términos que involucran a  $\dot{q}_i\dot{q}_j$  denominados Centrífugo ( $i = j$ ) y de Coriolis ( $i \neq j$ ) además,  $G(q)$  es el componente provocado por la fuerza de gravedad que esta relacionado con la energía potencial como:  $G(q) = \partial V(q)/\partial q$  [190].

Por otro lado, la matriz  $M(q)$  es una matriz simétrica y definida positiva para todo  $q$ , y existe una interesante relación entre las matrices  $M$  y  $C$  definida de la siguiente forma:  $S = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ , la cual es una matriz anti-simétrica que se usa para establecer la propiedad de pasividad del sistema.

Como comentario adicional, el modelo de Euler-Lagrange ha dado lugar a una serie de métodos de síntesis de controladores que además de perseguir la estabilidad asintótica

de los puntos de equilibrio preservan la estructura de Euler-Lagrange en lazo cerrado. Logrando con esto [76]:

1. Una función de Lyapunov natural como es la función de energía.
2. Estructuras pasivas que permiten obtener resultados de robustez.
3. Generalizar teorías de síntesis para el control de sistemas subactuados.
4. Separación entre energías cinética y potencial en lazo cerrado, lo que permite hacer análisis en espacios de dimensión reducida.

## 3.2. Sistemas Subactuados

### 3.2.1. Definición de Sistema Subactuado

En los últimos años en aplicaciones como barcos, helicópteros, satélites, robots, etc.; el peso y el espacio son parámetros importantes y debido a que es posible disminuir el peso ó tamaño mediante la reducción del número de actuadores que contenga, ya que algunas ocasiones son difíciles de manejar y muy pesados, dichos sistemas se pueden considerar sistemas subactuados por diseño.

Además, la dinámica de muchos sistemas mecánicos, como los manipuladores robóticos, se construyen suponiendo que sus eslabones o miembros son rígidos. Esta suposición para algunos casos es correcta mientras que en otros no. Es decir, si se tomara en cuenta en los modelos una dinámica de que no fueran rígidos, muchos de estos modelos serían esencialmente subactuados.

Por otra parte, cuando ocurre una falla en los actuadores o por la ausencia de los mismos debido a consideraciones de diseño del sistema físico (falta de espacio, exceso de peso y por cuestiones de presupuesto, entre otras), el sistema se considera **subactuado**. Una solución para evitar el problema de ausencia (o falla) de un actuador se logra equipando el sistema con actuadores redundantes o cambiando la ley de control para que trabaje solamente con los actuadores restantes cuando se detecta una

falla en el actuador. Como se puede observar la segunda solución es menos costosa en comparación con la primera y puede ser muy importante en algunas aplicaciones, motivando la creación de vehículos subactuados.

Finalmente, provocar artificialmente la creación de sistemas complejos no-lineales de bajo orden con el propósito de mejorar el control de sistemas subactuados de alto orden.

El Acrobot, el Pendubot, el sistema viga-bola, el Péndulo Invertido sobre un carro y el Péndulo Rotacional son algunos ejemplos de esta idea.

Es importante mencionar que las consideraciones anteriores son algunas razones para continuar con el desarrollo de nuevas técnicas de control aplicadas a sistemas subactuados.

De lo anterior, en este trabajo simplemente definiremos a los **Sistemas Subactuados como aquellos sistemas que tienen menor cantidad de entradas (controles) que grados de libertad**. En algunos sistemas subactuados la ausencia de un actuador en alguna dirección puede ser interpretada físicamente como una restricción no holonómica de segundo orden (o de aceleración).

Esta definición concuerda con la usada por Oriolo y Nakamura [154], la cual dice que los sistemas subactuados son sistemas con menor cantidad de actuadores independientes que grados de libertad a *controlar*.

### 3.2.2. Dinámica de los Sistemas Subactuados

Considere un sistema de  $n$  grados de libertad y  $m$  actuadores con la característica que  $m < n$ , cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= 0, & i = m + 1, \dots, n \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= u, & j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.14)$$



Donde  $u \in \mathbb{R}^m = (u_1, \dots, u_m)^T$  son las entradas de control

Evidentemente, la ecuación de movimiento del sistema anterior derivada de las ecuaciones de Euler-lagrange puede expresarse de la siguiente manera [152]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)u \quad (3.15)$$

y se denomina Sistema Mecánico Subactuado (SMU) si  $m = \text{rango}(F(q)) < n = \text{dim}(q)$  (ver la definición para la ecuación (3.11)). Dicho de otra forma, los sistemas subactuados son sistemas mecánicos con menor cantidad de actuadores que grados de libertad.

Entonces, asumiendo que  $F(q) = [0, I_m]^T$  y dividiendo al vector de coordenadas generalizadas como  $q^T = (q_1^T, q_2^T) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , donde  $q_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$  corresponde a las coordenadas generalizadas subactuadas y  $q_2 \in \mathbb{R}^m$  expresa las coordenadas actuadas del sistema.

Por tanto, después de tomar en cuenta dicha división en la matriz de inercia, se obtiene la ecuación dinámica del sistema subactuado de la siguiente forma [184]:

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{21}(q) \\ m_{21}(q) & m_{12}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1(q) \\ \phi_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{21}(q) \\ m_{21}(q) & m_{12}(q) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

es una matriz positiva y simétrica. Además, las funciones  $h_1(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^l$  y  $h_2(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^m$  contienen los términos de Coriolis y Centrífugos del sistema, los términos  $\phi_1(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^l$  y  $\phi_2(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^m$  representan los efectos gravitacionales y  $u \in \mathbb{R}^m$  corresponde a las fuerzas generalizadas producidas por los  $m$  actuadores.

Un inconveniente que tienen los sistemas subactuados de la forma (3.16), es que la primera ecuación diferencial no tiene una entrada de la control, es decir

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) + \phi_1(q) = 0 \quad (3.18)$$

la cual representa las restricciones del sistema provocadas por las coordenadas subactuadas.

Siendo entonces una restricción no holonómica de segundo orden, debido a que no se puede encontrar una función por integración que relacione las velocidades y posiciones de las coordenadas subactuadas y actuadas [155].

Entonces, estos sistemas no pueden ser linealizados por retroalimentación usando un cambio en la señal de control; sin embargo Spong [184] estudió que estos sistemas pueden ser *linealizados parcialmente* de tal forma que la dinámica del sistema se transforme en dos subsistemas, uno no-lineal y otro lineal. La aplicación de esta técnica se muestra en [85, 152, 185].

Cabe notar que la ecuación (3.16) es similar a la estructura dinámica de un robot de  $n$  eslabones, con la diferencia de que la primera ecuación no tiene entradas de control [190].

### 3.3. Ejemplos de Sistemas Subactuados

A continuación, presentamos algunos ejemplos de sistemas subactuados de la familia de los péndulos invertidos que se han utilizado para estudiar conceptos de Teoría de Control no-lineal, Robótica, y en el diseño de nuevos esquemas de control. Los ejemplos que se muestran enseguida son el Acrobot, el Pendubot, el Péndulo Invertido sobre un Carro, el Péndulo Esférico Invertido, el Péndulo con Rueda de Inercia, el Péndulo de Furuta y el PVTOL (Planar Vertical Take-off and Landing), de los cuales se presentará el modelo matemático no-lineal identificando la propiedad de subactuado. [59, 152].

### 3.3.1. Acrobot y Pendubot

El Acrobot y el Pendubot son robots subactuados de dos eslabones usados en las investigaciones de control no-lineal y para estudiar algunos conceptos como dinámica no-lineal, robótica y diseño de sistemas de control [39, 43, 64, 130, 183].

Los parámetros más importantes del Acrobot y el Pendubot son:

- $m_1$  : Masa del eslabón 1
- $m_2$  : Masa del eslabón 2
- $l_1$  : Longitud del eslabón 1
- $l_2$  : Longitud del eslabón 2
- $l_{c_1}$  : Distancia del centro de masa del eslabón 1
- $l_{c_2}$  : Distancia del centro de masa del eslabón 2
- $I_1$  : Momento de inercia del eslabón 1 cerca de su centroide
- $I_2$  : Momento de inercia del eslabón 2 cerca de su centroide
- $g$  : Aceleración debida a la gravedad
- $q_1$  : Ángulo del eslabón 1 respecto a la horizontal
- $q_2$  : Ángulo del eslabón 2 respecto al eslabón 1
- $\tau_1$  : Fuerza aplicada al eslabón 1 o eslabón 2

Para simplificar la representación de los modelos del Acrobot y el Pendubot se definen las siguientes cinco variables:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\
 \theta_2 &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \\
 \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c_2} \\
 \theta_4 &= m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 \\
 \theta_5 &= m_2 l_{c_2}
 \end{aligned}$$

Enseguida, se mostrará el modelo matemático de cada uno de los sistemas.

#### 1. Acrobot

Este dispositivo es un robot plano de dos eslabones, el cual tiene un único actuador en eslabón 2 (codo) como se observa en la figura 3.1. El eslabón 1 (hombro) se mueve libremente alrededor del eslabón 2.

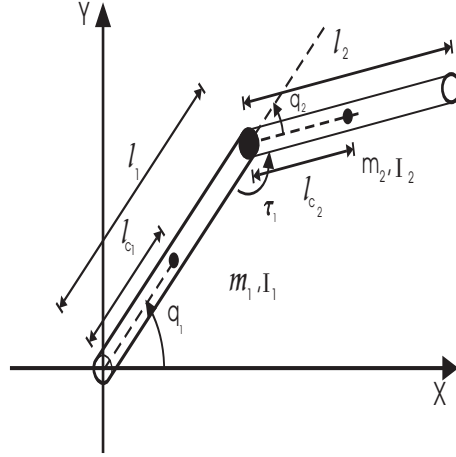


Figura 3.1 Acrobot.

### Modelo Matemático

Las ecuaciones dinámicas del sistema son descritas de la siguiente manera [183]:

$$0 = (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2) \ddot{q}_2 - \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2^2 - 2\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos (q_1 + q_2) \quad (3.19)$$

$$\tau_1 = (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + \theta_2 \ddot{q}_2 + \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + \theta_5 g \cos (q_1 + q_2) \quad (3.20)$$

Expresando el modelo del sistema en la forma vectorial:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 - \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \\ \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

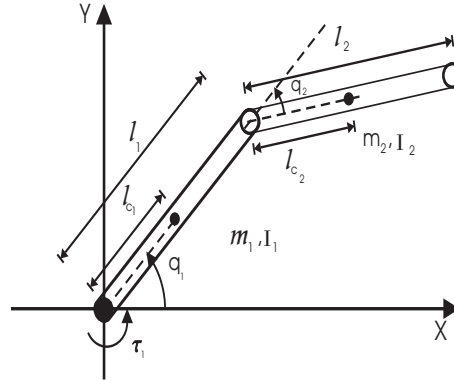


Figura 3.2 Pendubot.

$$G(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos (q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad y \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_1 \end{bmatrix}$$

## 2. Pendubot

Un sistema mecánico similar al anterior se denomina Pendubot, la diferencia entre estos sistemas radica en que éste dispositivo tiene un actuador en el primer eslabón (hombro) y, en este caso el eslabón 2 (codo) se mueve libremente alrededor del eslabón 1 como se observa en la figura 3.2. El objetivo del control es llevar el mecanismo a su punto de equilibrio inestable [59, 63, 152, 186].

### Modelo Matemático

Las ecuaciones de movimiento que describen al sistema son [40]:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2) \ddot{q}_2 - \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2^2 \\ & - 2\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos (q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$0 = (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + \theta_2 \ddot{q}_2 + \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + \theta_5 g \cos (q_1 + q_2) \quad (3.22)$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema en la forma vectorial son:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 - \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \\ \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad y \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Comentario:**

- Es importante notar que la matriz  $M(q)$  es simétrica y definida positiva para todo  $q$ .
- Además, el Acrobot y el Pendubot son sistemas que cuenta con dos grados de libertad y un sólo actuador. Donde, para el caso del Acrobot  $q_1$  es la coordenada subactuada y  $q_2$  la coordenada actuada; y en el Pendubot la coordenada actuada se representa por  $q_1$  y la subactuada por  $q_2$ .
- Por otro lado, la diferencia entre un manipulador de dos eslabones [190] y el Acrobot ó Pendubot es la ausencia de una entrada de control en alguna de las ecuaciones.

### 3.3.2. Péndulo Invertido sobre un Carro (Cart-Pole System)

Este sistema es uno de los más populares para diseñar leyes de control no lineal en los laboratorios y se ve reflejado en la gran cantidad de artículos publicados en la

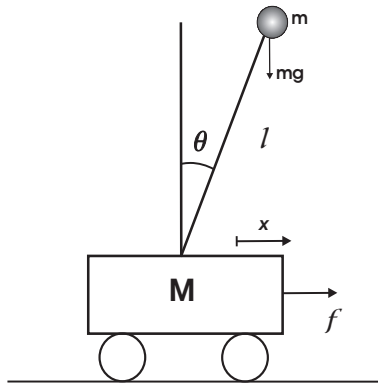


Figura 3.3 Péndulo Invertido sobre un Carro.

literatura [6, 54, 61, 81, 149] y su estudio está motivado por las diversas aplicaciones como el control de posición de los sistemas de despegue de cohetes y el control de vibraciones mecánicas en construcciones.

Este dispositivo consiste en un péndulo con libertad para rotar montado encima de un carro que se mueve a lo largo de una vía debido al impulso de una fuerza, como se muestra en la figura 3.3.

Existen dos problemas relacionados con la estabilización de este dispositivo: el primero es llevar el péndulo desde cualquier posición y en particular de la posición colgante natural, hasta la posición invertida [20, 128, 174, 184] y el segundo consiste en estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable suponiendo que el péndulo está inicialmente encima del semi-plano superior [6, 33, 140, 195].

Los parámetros de péndulo invertido descritos en la figura 3.3 son:

- $M$  : Masa del carro
- $m$  : Masa del péndulo
- $l$  : Distancia desde el pivote al centro de gravedad del péndulo
- $g$  : Aceleración debida a la gravedad
- $x$  : Distancia del centro de masa del carro desde su posición inicial
- $\theta$  : Ángulo del péndulo respecto a la vertical
- $f$  : Fuerza aplicada al carro

### Modelo Matemático

Las ecuaciones de movimiento del sistema están dadas por [85]:

$$(M + m) \ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = f \quad (3.23)$$

$$m \ddot{x} l \cos \theta + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (3.24)$$

Además, el sistema puede ser escrito en la forma estándar de los Sistemas de Lagrange definido como:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix} \quad y \quad \tau = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Comentario

- Es importante notar que la matriz  $M(q)$  es simétrica y definida positiva para todo  $q$ .
- Además, el sistema péndulo invertido sobre un carro es un sistema subactuado porque tiene dos grados de libertad denominados como  $x$  y  $\theta$ , y una sola entrada de control  $f$ .
- Donde  $x$  y  $\theta$  representan las coordenadas actuada y subactuada, respectivamente.



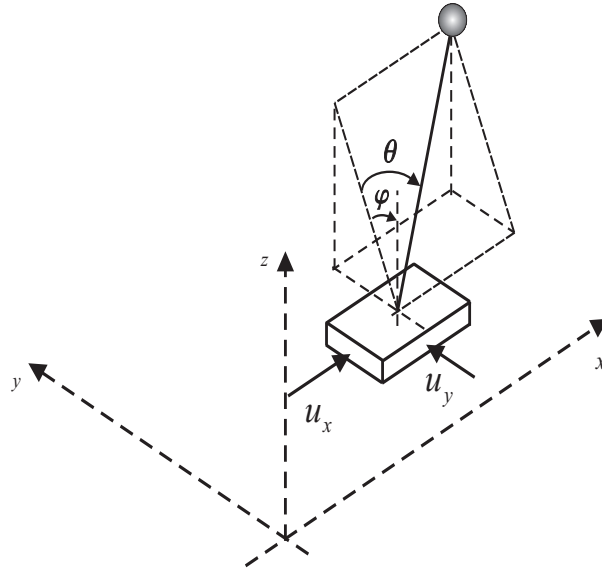


Figura 3.4 Péndulo Esférico Invertido.

### 3.3.3. Péndulo Esférico Invertido (3D Cart-Pole System)

Una versión más general del péndulo invertido en dos dimensiones es el llamado Péndulo Esférico Invertido (3D Cart-Pole System) [152]. El cual es un sistema no lineal que permite ilustrar una versión académica simplificada del propulsor de un cohete [70, 71, 175, 212].

El Péndulo Esférico Invertido es un sistema de cuatro grados de libertad integrado por un péndulo esférico libre montado sobre una base móvil (ver figura 3.4). Esta base puede ser idealmente un punto y se mueve en el plano horizontal por la influencia de una fuerza.

En lo que se refiere al control de este sistema, existe en la literatura una amplia gama de trabajos [10, 15, 19, 121, 122, 173].

#### Modelo Matemático

Este sistema puede ser descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales normalizadas [152].

$$\ddot{x} = u_x \quad (3.25)$$

$$\ddot{y} = u_y \quad (3.26)$$

$$\ddot{\theta} = S_\theta C_\varphi - S_\theta C_\theta \varphi^2 - C_\theta u_x + S_\theta S_\varphi u_y \quad (3.27)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{C_\theta^2} \left( C_\theta S_\varphi + 2S_\theta C_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - C_\theta C_\varphi u_y \right) \quad (3.28)$$

Donde los parámetros del sistema son:

- $x$  : Desplazamiento normalizado del centro de masa de la base móvil en el eje- $x$
- $y$  : Desplazamiento normalizado del centro de masa de la base móvil en el eje- $y$
- $\theta$  : Rotación alrededor del eje- $y$
- $\varphi$  : Rotación alrededor del eje- $x$
- $S_x$  :  $\text{sen}(x)$
- $C_x$  :  $\text{cos}(x)$
- $u_x$  : Aceleración de la base en la dirección  $x$
- $u_y$  : Aceleración de la base en la dirección  $y$

### Comentario

- El sistema péndulo esférico invertido es un sistema subactuado, ya que tiene cuatro grados de libertad  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  y  $\theta$  y cuenta con dos entradas de control  $u_x$  y  $u_y$ .
- Siendo  $(x,y)$  y  $(\varphi, \theta)$  las coordenadas actuadas y subactuadas, respectivamente.

### 3.3.4. Péndulo con Disco Inercial (Inertial Wheel Pendulum)

El Péndulo con Disco Inercial (o rueda inercial) es uno de los sistemas subactuados más simples que ha atraído la atención en el área educativa y de investigación, debido a que su dinámica es muy sencilla comparada con la de otro tipo de péndulos y al mismo tiempo permite, gracias a que es un sistema no-lineal y subactuado, ser utilizado como un elemento de experimentación para el estudio de técnicas avanzadas de control.

Este sistema fue introducido y estudiado por M. Spong et. al. [187] y está constituido por un péndulo físico unido a un disco giratorio en la parte final, el cual está girando

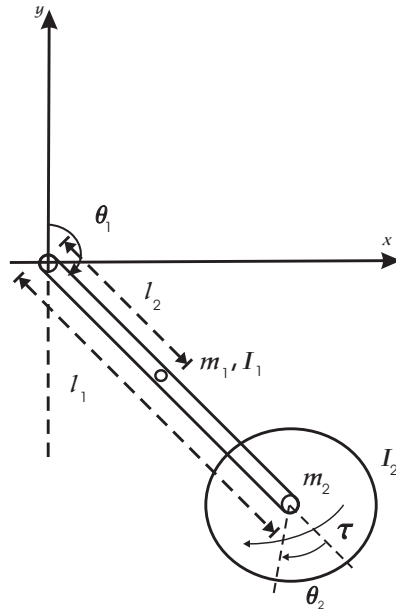


Figura 3.5 Péndulo con Disco Inercial.

libremente sobre un eje paralelo al eje de rotación del péndulo (ver figura 3.5). El disco es accionado por un motor de DC y el péndulo es subactuado. El torque del motor usado como entrada de control produce una aceleración angular del disco, lo que genera un torque de acoplamiento en el eje del péndulo.

Existen dos problemas de control relacionados con este sistema, el primero es balancear el péndulo en el semi-plano superior y equilibrarlo en la posición invertida [3, 59] y el segundo consiste en estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable, con las dos posiciones angulares del sistema en el origen [151, 152, 159].

### Modelo Matemático

Las ecuaciones dinámicas del sistema son descritas como [59]:

$$(I_1 + I_2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \eta g \sin \theta_1 = 0 \quad (3.29)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 = \tau \quad (3.30)$$

Los parámetros del sistemas se describen en la siguiente tabla:

$m_1$	:	Masa del péndulo
$m_2$	:	Masa de la rueda
$l_1$	:	Longitud del péndulo
$l_2$	:	Distancia al centro de masa del péndulo
$\delta_1$	:	Coefficiente de amortiguamiento de la coordenada subactuada
$\delta_2$	:	Coefficiente de amortiguamiento de la coordenada actuada
$\theta_1$	:	Ángulo que forma el péndulo con la vertical
$\theta_2$	:	Ángulo del disco
$I_1$	:	Momento de Inercia del péndulo
$I_2$	:	Momento de Inercia de la rueda
$\tau$	:	Torque del motor aplicado al disco
		$\eta = m_1 l_2 + m_2 l_1$

En forma vectorial el sistema puede ser escrito como sigue:

$$D(q) \ddot{q} + g(q) = u$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad D(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2 & I_2 \\ & I_2 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} -\eta g \operatorname{sen} \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

### Comentario

- El Péndulo con Disco Inercial cuenta con dos grados de libertad y una entrada de control ( $\tau$ ), donde  $\theta_1$  es la coordenada subactuada y  $\theta_2$  es la coordenada actuada.
- Es importante notar que la matriz  $D(q)$  es constante y definida positiva.
- Además, una característica importante del sistema, es que puede ser linealizable por retroalimentación [187].

### 3.3.5. Péndulo de Furuta

Un sistema diferente al Péndulo Invertido sobre un Carro es el Péndulo de Furuta, desarrollado por el profesor K. Furuta en el Instituto de Tecnología de Tokio [72].

Este sistema cuenta con un motor que funciona como actuador y el péndulo está unido a la flecha del motor como se muestra en la figura 3.6, algunos autores lo denominan péndulo rotacional [152] y existen diversos trabajos en la literatura relacionados con el control de este tipo de péndulo [9, 69, 79, 111, 145, 149].

#### Modelo Matemático

El modelo matemático del sistema se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange [59] suponiendo que la fricción es despreciable. La notación descrita en la figura 3.6 se muestra en la siguiente tabla :

$I_0$	:	Momento de inercia del brazo
$L_0$	:	Longitud total del brazo
$m_1$	:	Masa del péndulo
$l_1$	:	Distancia al centro de gravedad del péndulo
$J_1$	:	Momento de inercia del péndulo alrededor de su centro de gravedad
$\theta_0$	:	Ángulo rotacional del brazo
$\theta_1$	:	Ángulo de rotacion del péndulo
$\tau_1$	:	Torque aplicado al brazo

El sistema es descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & [I_0 + m_1 (L_0^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1)] \ddot{\theta}_0 + m_1 l_1 L_0 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1^2 \sin 2\theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\ & - m_1 l_1 L_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$0 = m_1 l_1 L_0 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 + [J_1 + m_1 l_1^2] \ddot{\theta}_1 - m_1 l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0^2 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (3.32)$$

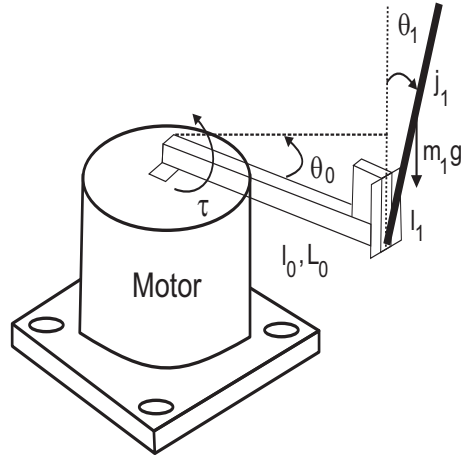


Figura 3.6 Péndulo de Furuta.

El sistema puede ser agrupado en la forma:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad D(q) = \begin{bmatrix} I_o + m_1(L_o^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1) & m_1 l_1 L_o \cos \theta_1 \\ m_1 l_1 L_o \cos \theta_1 & J_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin 2\theta_1 \dot{\theta}_1 & \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin 2\theta_1 \dot{\theta}_0 - m_1 l_1 L_o \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ -m_1 l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad y \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones anteriores definen un sistema subactuado por que tienen una sola entrada  $\tau_1$  y dos grados de libertad  $\theta_0$  y  $\theta_1$ . Donde  $\theta_0$  corresponde a la coordenada actuada y  $\theta_1$  a la subactuada.

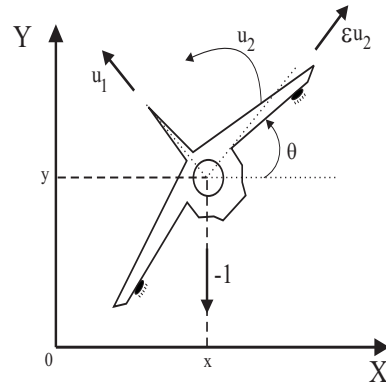


Figura 3.7 PVTOL.

### 3.3.6. PVTOL (Planar Vertical Take-off and Landing)

El sistema conocido como PVTOL (Planar Vertical Take-off and Landing) es un modelo simplificado de un aeronave que tiene el número de estados y entradas mínimo para mantener las características principales que se deben de tomar en cuenta en el diseño de leyes de control en aeronaves reales. La figura 3.7 muestra una representación del sistema [62, 65, 89, 117, 140, 152, 195].

#### Modelo Matemático

Las ecuaciones de movimiento del sistema son [59]:

$$\ddot{x} = -\sin(\theta) u_1 + \varepsilon \cos(\theta) u_2 \quad (3.33)$$

$$\ddot{y} = \cos(\theta) u_1 + \varepsilon \sin(\theta) u_2 - 1 \quad (3.34)$$

$$\ddot{\theta} = u_2 \quad (3.35)$$

Donde:

- $x$  : Posición horizontal del centro de masa de la aeronave
- $y$  : Posición vertical del centro de masa de la aeronave
- $\theta$  : Es el ángulo de giro que la aeronave hace con la horizontal
- $u_1$  : Empuje
- $u_2$  : Aceleración angular
- $-1$  : Aceleración gravitacional normalizada
- $\varepsilon$  : Coeficiente pequeño que caracteriza el acoplamiento entre el momento de giro y la aceleración lateral de la aeronave

### Comentario

- El sistema PVTOL cuenta con tres grados de libertad  $x$ ,  $y$  y  $\theta$ , y dos entradas de control  $u_1$  y  $u_2$ , entonces es un sistema subactuado donde las coordenadas actuadas son  $y$  y  $\theta$  y la coordenada subactuada es  $x$ .



# Capítulo 4

## Estabilización del Péndulo

### Invertido utilizando un ajuste de modelo

En este capítulo, se aborda el problema de estabilización del sistema Péndulo Invertido sobre un Carro mediante el método de ajuste de modelo (*model matching*). La estrategia de control consiste en forzar al sistema en lazo cerrado a comportarse como otro sistema no-lineal con ciertas propiedades de estabilidad.

Para lograr esto, se propone una manera sencilla de solucionar las condiciones de ajuste (*Matching Conditions*) derivadas de la energía cinética y la energía potencial de sistema, necesarias para encontrar un controlador que estabilice el Sistema Péndulo Invertido en el punto de equilibrio inestable.

La mayor parte de lo que se expone en este capítulo aparece publicado en un artículo de revista [11].

#### 4.1. Introducción

El problema de estabilización del sistema Péndulo Invertido sobre un Carro ha recibido la atención de los investigadores en los últimos años debido a que este dispositivo es un banco de pruebas muy interesante en la ingeniería de control no lineal

[20]. En general, consiste en llevar el péndulo a la posición vertical invertida con el carro en el origen [33, 35, 81, 127, 140, 149, 189, 195, 215].

En este capítulo, se aborda el desarrollo de un ajuste de modelo para estabilizar el sistema Péndulo Invertido sobre un Carro alrededor del punto de equilibrio inestable. El controlador propuesto tiene dos principales características:

1. El dominio de estabilidad puede ser tan grande como se desee.
2. El sistema en lazo cerrado es robusto con respecto a pequeñas fuerzas de amortiguamiento, obteniendo un sistema exponencialmente estable localmente.

La principal contribución de este capítulo es proponer una manera sencilla de solucionar las condiciones de ajuste, necesarias para encontrar un controlador que establezca el sistema sin resolver un conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Como es el caso de otros trabajos que utilizan este tipo de enfoque [32, 33, 26, 109]. La principal diferencia entre esta propuesta y el ajuste de modelo presentado por Gómez-Estern [77], consiste en forzar al sistema en lazo cerrado a comportarse como un sistema Euler-Lagrange, donde la matriz característica de inercia es constante.

El resto del capítulo se organiza del siguiente modo. En la sección 4.2 presentamos el modelo dinámico del **PIC**. La sección 4.3 muestra la obtención del ajuste de modelo y la solución de las condiciones de ajuste. En la sección 4.4 se describe el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado y en la sección 4.5 se observan algunas simulaciones computacionales.

## 4.2. Modelo del Péndulo Invertido sobre un Carro

Consideremos el sistema Péndulo Invertido sobre un Carro **PIC** (Figura 4.1), el cual se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales normalizado [6].<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>En el apéndice A.1 se muestra la obtención de este modelo.

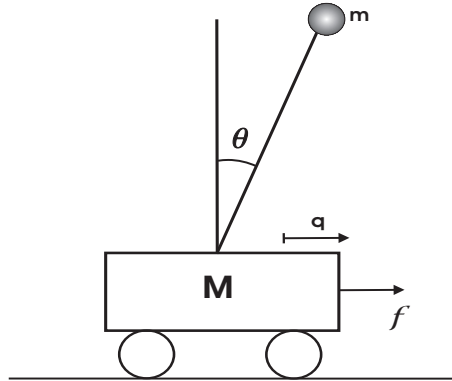


Figura 4.1 Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro.

$$\begin{aligned} \cos \theta \ddot{q} + \ddot{\theta} - \sin \theta + \beta \dot{\theta} &= 0, \\ (1 + \delta) \ddot{q} + \cos \theta \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \sin \theta &= f, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $q$  es el desplazamiento normalizado del carro;  $\theta$  es el ángulo que forma con la vertical;  $f$  es la fuerza aplicada al carro siendo la entrada de control del sistema;  $\beta \dot{\theta}$  es una fuerza disipativa lineal que actúa sobre la coordenada no actuada  $\theta$ <sup>2</sup>;  $\delta$  es un parámetro estructural relacionado con las masas del carro y del péndulo, respectivamente [175].

Después de aplicar la siguiente retroalimentación

$$f = \cos \theta \sin \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta + v(\sin^2 \theta + \delta)$$

en el sistema (4.1), obtenemos el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin \theta - \cos \theta v - \beta \dot{\theta}, \\ \ddot{q} &= v. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Evidentemente, el sistema (4.2) puede expresarse como:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -F(\theta) - B\dot{\mathbf{x}} + G(\theta)u, \quad (4.3)$$

<sup>2</sup>La fuerza disipativa en coordenada actuada  $q$  puede ser compensada de manera sencilla, por lo tanto, no se incluye en el modelo.

donde

$$F(\theta) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G(\theta) = \begin{bmatrix} -\operatorname{cos} \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

y  $\mathbf{x}^T = (\theta, q)$ .

**Comentario 4.2.1** *El modelo (4.3) es un sistema parcialmente linealizado que no conserva la estructura original del sistema **PIC**, debido a que se cancelan no linealidades importantes como la fuerza de Coriolis y provoca que el sistema no sea de la forma Euler-Lagrange. Esto es una diferencia importante con los métodos de Lagrangianos y Hamiltonianos controlados, donde se conserva la estructura original [52]. Cabe destacar que la cancelación de estas no linealidades puede provocar que el proceso de ajuste sea difícil. Sin embargo, en nuestra estrategia de control es sencillo encontrar las condiciones de ajuste relacionadas con la estructura del sistema objetivo (sistema en lazo cerrado). Dicho sistema está formado por un sistema Euler-Lagrange asintóticamente estable con matriz de inercia constante.*

**Comentario 4.2.2** *La fuerza de disipación puede hacer al sistema en lazo cerrado inestable [209]. Y en general, esta fuerza no puede ser compensada por la acción de la ley de control  $u$ . Sin embargo, el efecto indeseable de amortiguamiento puede ser parcialmente eliminado usando un controlador estabilizador robusto, como se menciona en el Apéndice C.2.*

**Comentario 4.2.3** *El modelo parcialmente linealizado del péndulo invertido representado en (4.2) tiene una característica muy importante, ya que si lo linealizamos en el punto de equilibrio inestable, podemos observar que tiene los siguientes polos  $s = 0$ ,  $s = 0$ ,  $s = 1$  y  $s = -1$ , y debido a que cuenta con un polo en el semiplano derecho se puede decir que el sistema es inestable en lazo abierto (la obtención de los polos se encuentra en el apéndice A.1.2) provocando que sea necesario aplicar un control realimentado para estabilizarlo. Además, cabe mencionar que utilizando esta metodología se puede mostrar que los demás sistemas estudiados en esta tesis tienen la característica mencionada.*

### 4.3. Estrategia de control

El objetivo de la estrategia de control propuesta es llevar el péndulo a la posición invertida y el carro al origen, suponiendo que la posición inicial del ángulo está por encima del plano horizontal. Para lograr esto se propone un ajuste de modelo que consiste en encontrar un controlador  $u$  que transforme el sistema (4.2) en otro sistema no lineal con ciertas propiedades de estabilidad. Es decir, buscamos una ley de control tal que el sistema en lazo cerrado puede ser expresado en la forma:

$$M_d \ddot{\mathbf{x}} = -K_d(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V_d(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

donde  $M_d$  y  $K_d(\mathbf{x})$  son matrices simétricas definidas positivas y  $V_d(\mathbf{x})$  es una función estrictamente positiva.<sup>3</sup>

Entonces, se dice que los sistemas (4.3) y (4.5) están ajustados para la ley de control  $u$ , si la solución de los dos sistemas es la misma. Es decir,  $(\mathbf{x}, u)$  es una solución de (4.3), si y solo si  $\mathbf{x}$  es una solución de (4.5). Por consiguiente, se asegura que (4.3) y (4.5) están ajustados, si cumplen

$$-F(\theta) + G(\theta)u = -M_d^{-1}K_d(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - M_d^{-1}\frac{\partial}{\partial x}V_d(\mathbf{x}). \quad (4.6)$$

Si  $G^4$  es invertible, entonces se puede obtener directamente el controlador  $u$  para cualquier  $K_d$  y  $V_d$ . Sin embargo, como  $G$  es de una sola columna no es invertible sino sólo de rango completo por columnas, y  $u$  puede sólo influenciar a los términos dentro del espacio imagen de  $G$ . De lo anterior, multiplicando los dos lados de la ecuación (4.6) por el anulador de  $G^5$  se obtienen las siguientes ecuaciones de restricción

<sup>3</sup>Posteriormente se discutirá por qué el sistema (4.5) es asintóticamente estable.

<sup>4</sup>Por simplicidad, usamos  $G$  para denotar  $G(\theta)$ .

<sup>5</sup>Se entiende como anulador por la izquierda de una matriz  $A$ , otra matriz  $B$  cuyas filas están en el espacio núcleo de  $A$ . Dicho anulador es de rango completo si el espacio generado por las filas de  $B$  coincide con el núcleo de  $A$ . Entonces, debido a que  $G^T = [-\cos \theta, 1]$ , el anulador por la izquierda de  $G$  se define como  $G^\perp = \delta(x, \dot{x})[1, \cos \theta]$ , donde  $\delta$  puede ser una función estrictamente positiva, pero por simplicidad se ha seleccionado como  $\delta = 1$ . Además, es importante tomar en cuenta que  $G^\perp G = 0$ .

$$0 = G^\perp \left( \left[ M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial x} V_d(\mathbf{x}) - F(\theta) \right] + [M_d^{-1} K_d(\mathbf{x})] \dot{\mathbf{x}} \right). \quad (4.7)$$

Por consiguiente, si se encuentran los términos  $K_d$  y  $V_d$  para el vector  $F$ , la ley de control  $u$  se puede calcular directamente por:

$$u = -\frac{G^T}{G^T G} \left[ \left( M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial x} V_d(\mathbf{x}) - F(\theta) \right) + M_d^{-1} K_d(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \right]. \quad (4.8)$$

Finalmente, la estrategia de control consiste en resolver las condiciones de ajuste (4.7), las cuales se pueden dividir en las dos ecuaciones

$$0 = G^\perp \left[ M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial x} V_d(\mathbf{x}) - F(\theta) \right], \quad (4.9)$$

y

$$0 = G^\perp [M_d^{-1} K_d(\mathbf{x})] \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.10)$$

Por lo tanto, el control  $u$  se puede obtener por medio de la relación (4.8).

**Comentario 4.3.1** *En esta sección, no se consideran los efectos de la fuerza disipativa, y se puede mostrar por medio de algebra lineal que no es posible compensar está fuerza. Esto significa que no existe una variable de control que conserve las propiedades de estabilidad del sistema objetivo y asegure las condiciones de ajuste necesarias simultáneamente ya que este tipo de fuerzas rompen las propiedades simétricas de sistema objetivo [209]. Sin embargo, este efecto puede ser parcialmente evitado usando una linealización del sistema en lazo cerrado en lugar de buscar una función de Lyapunov para el sistema que incluye dicha fuerza.*

### 4.3.1. Solución de las condiciones de ajuste

Enseguida, encontraremos las matrices  $M_d$ ,  $K_d$  y la función  $V_d$  que satisfacen las dos condiciones de ajuste. Para lograr esto, establecemos el siguiente lema:

**Lema 4.3.2** *Si las matrices  $M_d^{-1}$  y  $K_d(\theta)$  son de la siguiente manera:*

$$M_d^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix}; \quad K_d(\theta) = \gamma M_d G(\theta) G^T(\theta) M_d \quad (4.11)$$

donde los coeficientes de la matriz  $M_d^{-1}$  satisfacen las desigualdades

$$\mu_2 > 1 \quad ; \quad \mu_3 > \mu_2^2, \quad (4.12)$$

$\gamma$  es una constante positiva <sup>6</sup> y la función  $V_d(x)$  se selecciona como

$$V_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_2} \ln(-1 + \mu_2) - \frac{1}{\mu_2} \ln(-1 + \mu_2 \cos \theta) + \frac{k_p}{2} s^2 \quad (4.13)$$

donde

$$s = q + \frac{\mu_3}{\mu_2} \theta + \frac{2(\mu_3 - \mu_2^2)}{\mu_2 \sqrt{-1 + \mu_2^2}} \arctan h \left( \frac{1 + \mu_2}{\sqrt{-1 + \mu_2^2}} \tan \frac{\theta}{2} \right), \quad (4.14)$$

entonces, las dos condiciones de ajuste se cumplen simultáneamente para todo  $\theta \in I_\mu = (-\theta_\mu, \theta_\mu)$ , con

$$\theta_\mu = \cos^{-1} \left( \frac{1}{\mu_2} \right). \quad (4.15)$$

Es importante tomar en cuenta que, si  $\theta \in I_\mu$  y  $\mu_3 > \mu_2^2$  entonces  $K_d(\theta) > 0$  para todo  $\theta \in I_\mu$ .

La demostración del lema anterior se encuentra en el apéndice C.1.

**Comentario 4.3.3** Como  $\frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{x=0} = 0$  y  $\frac{\partial^2 V_d}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{x=0} > 0$ , entonces el conjunto formado por  $V_d(x) \leq \alpha$  (con  $\alpha > 0$ ) es un conjunto convexo.<sup>7</sup> Por otra parte, la función de energía cinética en lazo cerrado es una función convexa globalmente de manera estricta, por lo tanto, el conjunto  $E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq \alpha$  define un conjunto compacto. Esta propiedad es importante para aplicar el Teorema de LaSalle. En la figura 4.2 mostramos las curvas de nivel obtenidas de  $V_d(x)$ . Cabe notar, que cuando  $\alpha \geq 3$ , el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^2 : V_d(x) \leq 3\}$  no es un conjunto convexo o compacto. De otra manera, cuando  $\alpha \leq 1$ , el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^2 : V_d(x) \leq 1\}$  es compacto. Lo anterior se interpreta físicamente como que cualquier solución tal que,  $E(x, \dot{x}) \leq 1$  siempre permanecerá en el conjunto compacto.

<sup>6</sup>En este caso escogemos  $\gamma = 1$ .

<sup>7</sup>El valor más grande de  $\alpha$ , tal que  $V_d(x) < \alpha$  sea un conjunto compacto, permite tener una estimación del dominio de estabilidad, donde  $E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq \alpha$  define un conjunto compacto invariante, y por lo tanto  $E$  es una función decreciente.

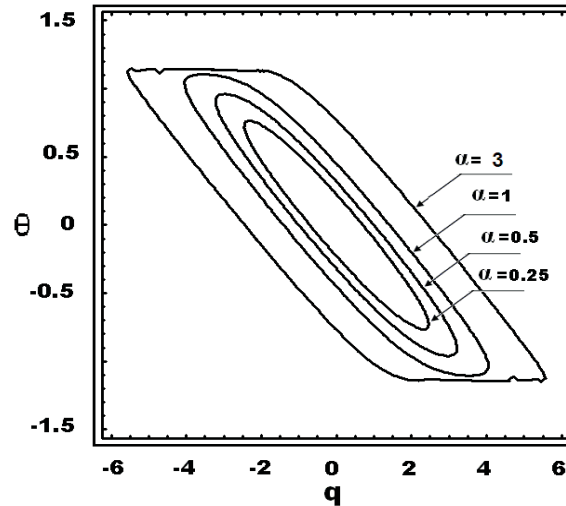


Figura 4.2 Curvas de nivel para  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 3$ .

**Comentario 4.3.4** *En el apéndice 4.2.2 se muestra que el sistema en lazo cerrado obtenido es exponencialmente estable localmente; por lo tanto, el sistema en lazo cerrado es robusto con respecto a dinámicas pequeñas no modeladas. Esto significa que si la fuerza disipativa es muy pequeña y el sistema inicia cerca del origen podemos esperar que el sistema alcanza el punto de equilibrio inestable. En la sección de simulaciones numéricas se muestra lo anterior.*

## 4.4. Análisis de estabilidad

Es importante notar que la estabilidad del sistema (4.3) en lazo cerrado con el controlador  $u$  expresado en (4.8), es equivalente a la estabilidad del sistema en lazo cerrado deseado (4.5). Siendo consecuencia de la definición de las condiciones de ajuste. Por lo tanto, se realizará el análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado deseado (4.5). Y para conseguir esto, proponemos la siguiente función de Lyapunov:

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T M_d \dot{\mathbf{x}} + V_d(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

donde  $M_d$  y  $V_d(\mathbf{x})$  son definidos en (4.5) y (4.13), respectivamente. Calculando la



derivada de  $E$  con respecto al tiempo, alrededor del sistema (4.5), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \dot{\mathbf{x}}^T M_d \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial V_d(\mathbf{x})}{\partial x} \\ &= -\dot{\mathbf{x}}^T \left( K_d(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial x} V_d(\mathbf{x}) \right) + \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial V_d(\mathbf{x})}{\partial x} \\ &= -\dot{\mathbf{x}}^T K_d(\theta) \dot{\mathbf{x}}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Cabe notar que los signos de  $E$  y  $\dot{E}$  dados en (4.16) y (4.17) están bien definidos mientras que el ángulo  $\theta$  se encuentre dentro del conjunto  $I_\mu$  (ver lema 4.3.2). Lo cual se asegura si las condiciones iniciales  $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$  con  $\theta_0 \in I_\mu$ , pertenecen a una vecindad del origen, tal que

$$E(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) < V_d(\theta_\mu, 0) = C_\mu\tag{4.18}$$

donde  $\theta_\mu$  fue previamente definida en la ecuación (4.15).

**Comentario 4.4.1** *La desigualdad anterior definen una región de estabilidad para el sistema en lazo cerrado, es decir, si las condiciones iniciales cumplen que  $E(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) < C_\mu$  con  $\theta_0 \in I_\mu$ . Entonces, necesariamente  $\theta(t) \in I_\mu$ . Considerando esto podemos definir el conjunto compacto  $\Omega$  como:<sup>8</sup>*

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) : E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) < C_\mu\}\tag{4.19}$$

*El conjunto  $\Omega$  tiene la propiedad de que todas las soluciones del sistema en lazo cerrado (4.5) que comienzan en  $\Omega$  permanecen en  $\Omega$  para todo el tiempo.*

Entonces, continuando con el análisis de estabilidad afirmamos que el sistema en lazo cerrado deseado (4.5) es estable localmente con una región de estabilidad definida por la desigualdad (4.18). Por supuesto, si se selecciona  $M_d^{-1}$ ,  $K_d$  y  $V_d$  de acuerdo al lema 4.3.2. En otras palabras, la solución en lazo cerrado es acotado para cualquier condición inicial que satisfaga la desigualdad (4.18).

---

<sup>8</sup>Este conjunto será utilizado posteriormente para aplicar el Teorema de invariancia de LaSalle.

Para garantizar que la solución en lazo cerrado converja asintóticamente a cero se necesita usar el Teorema de LaSalle. Para este fin, definimos el conjunto

$$S = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \Omega : -\dot{\mathbf{x}}^T M_d G G^T M_d \dot{\mathbf{x}} = 0\}, \quad (4.20)$$

siendo  $M$  el conjunto invariante más grande en  $S$ . Esto significa que el Teorema de LaSalle garantiza que todas las soluciones que comienzan en el conjunto compacto  $\Omega$  tienden a  $M$  como  $t \rightarrow \infty$  [110].

Entonces, para calcular el conjunto invariante más grande  $M$  en  $S$  se realiza lo siguiente.

De la ecuación (4.20) se obtiene que

$$S = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \Omega : G^T M_d \dot{\mathbf{x}} = 0\} \quad (4.21)$$

la cual es equivalente a

$$(-\mu_3 \cos \theta + \mu_2)\dot{\theta} + (-\mu_2 \cos \theta + 1)\dot{q} = 0 \quad (4.22)$$

Tome en cuenta que en el conjunto  $S$  se tiene que  $\theta \in I_\mu$ . Por lo tanto, las variables  $\dot{\theta}$  y  $\dot{q}$  no cambian su signo como se estableció en el lema 4.3.2. Ahora, si  $\dot{\theta}$  y  $\dot{q}$  son diferentes de cero y tienen el mismo signo dentro de  $S$ , entonces,  $(\theta, q)$  tiende a salirse del conjunto invariante  $\Omega$ , siendo este caso una contradicción, ya que se asume que  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \Omega$ . En el caso que  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  y  $\mathbf{x}$  sea un vector constante fijo en  $S$ . Y definiendo a  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^9$ . Siendo  $\bar{\mathbf{x}}$  uno de los dos puntos de equilibrio del sistema (4.3). Es decir,  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$  o  $\bar{\mathbf{x}} = (\theta = \pi, q = 0)$ . Sin embargo, de la definición del conjunto invariante  $\Omega$  descrito en (4.19), necesariamente se obtiene que  $\bar{\mathbf{x}} = 0$ . Por consiguiente, el conjunto invariante más grande es  $M = 0$ .

Concluimos que el conjunto invariante más grande  $M$  contenido en  $S$  está constituido por un solo punto de equilibrio ( $\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0$ ). Y de acuerdo con el Teorema de LaSalle

---

<sup>9</sup>El símbolo  $\bar{y}$  indica que la variable  $y$  es una constante.

todas las soluciones que comienzan en  $\Omega$  convergen asintóticamente hacia el conjunto invariante más grande  $M$ , el cual está definido por  $(\mathbf{x} = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0)$ .

Para resumir lo anterior, presentamos la siguiente proposición:

**Proposición 4.4.2** *Considere el modelo no lineal (4.3) en lazo cerrado con (4.8), donde  $M_d$ ,  $K_d$  y  $V_d$  son seleccionadas de acuerdo al lema (4.3.2). Entonces, el origen  $(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}} = 0)$  del sistema en lazo cerrado es localmente estable asintóticamente con un dominio de atracción definido por (4.19).*

Es importante notar que si la constante  $k_p$  es grande,<sup>10</sup> entonces el dominio de atracción  $\Omega$  se incrementa. Es decir, se puede incrementar el dominio de atracción para casi todos los estados que inicien por encima del plano horizontal.

**Comentario 4.4.3** *Si las posiciones del sistema están inicialmente dentro de  $\Omega$  (comentario 4.4.1) con velocidades cero, entonces sintonizando adecuadamente los parámetros de control se asegura que la posición del carro y el ángulo del péndulo permanecerán dentro del conjunto  $Q \subset \Omega$  donde*

$$Q = \{x = (\theta, q) \in \Omega : |\theta| < \theta_\mu < \pi/2 \text{ y } |q| < q\}$$

*Por supuesto,  $\bar{q}$  debe ser seleccionada a partir de las restricciones físicas del movimiento del carro. En otras palabras, es posible llevar todos los estados a la posición inestable si el ángulo y el movimiento del carro se confinan dentro del conjunto  $Q$ .*

## 4.5. Resultados de la simulación

A fin de probar el desempeño de la ley de control obtenida realizamos algunas simulaciones numéricas utilizando el programa MATLAB<sup>TM</sup>.

En el primer experimento mostramos cómo afecta el parámetro  $k_p$  sobre el comportamiento transitorio y lo realizamos para dos diferentes valores que son  $k_p = 1$  y

---

<sup>10</sup>La constante  $k_p$  se relaciona con la energía potencial (4.13)

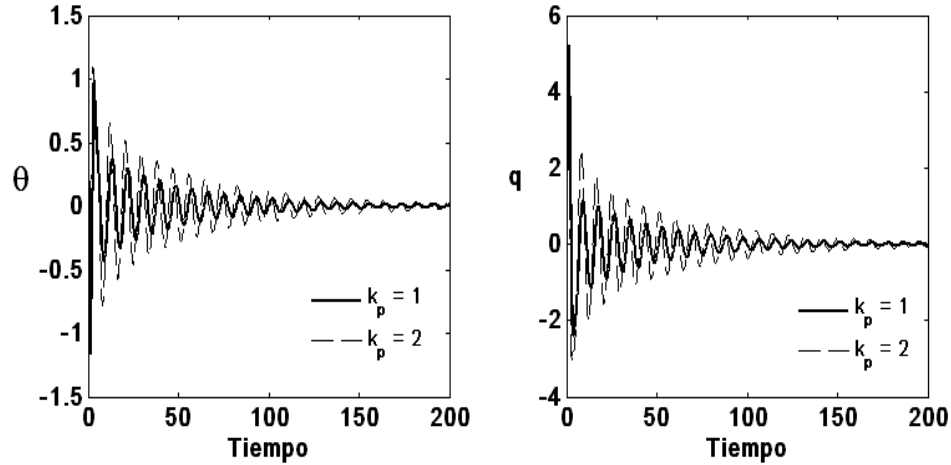


Figura 4.3 Comportamiento en lazo cerrado de las posiciones del sistema para dos valores diferentes de  $k_p$ .

$k_p = 2$ . Los valores asignados a los parámetros del controlador se proponen como sigue:  $\mu_2 = 2,5$ ,  $\mu_3 = 7$ . Las condiciones iniciales del sistema son  $\theta_0 = 1,1[\text{rad}]$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0,1[\text{rad/sec}]$ ,  $q_0 = 0$  y  $\dot{q}_0 = 0$ , mientras que el coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  es cero. Las figuras 4.3 y 4.4 muestran el comportamiento transitorio de las posiciones y velocidades del sistema, respectivamente. Como se puede observar, el incremento en el valor de  $k_p$  produce una mayor cantidad de oscilaciones y provoca que los estados converjan lentamente al punto de equilibrio deseado. Intuitivamente el controlador inyecta energía potencial, de modo que el sistema disipe toda la energía potencial inicial mediante movimientos oscilatorios.

En el segundo experimento utilizamos los parámetros y condiciones iniciales del experimento anterior. Para ilustrar la robustez del sistema no lineal en lazo cerrado se considera la presencia de una fuerza disipativa en la dirección subactuada. La figura 4.5 muestra el comportamiento de las posiciones del sistema, cuando el coeficiente de amortiguamiento toma los valores de  $\beta = 0,1$  y  $\beta = 0$ . Como se puede ver, el efecto de la fuerza disipativa provoca una desestabilización del sistema en lazo cerrado; es decir, el sistema converge más lentamente al origen en comparación con el caso cuando la fuerza no existe, ya que el sistema tiene una convergencia más rápida.

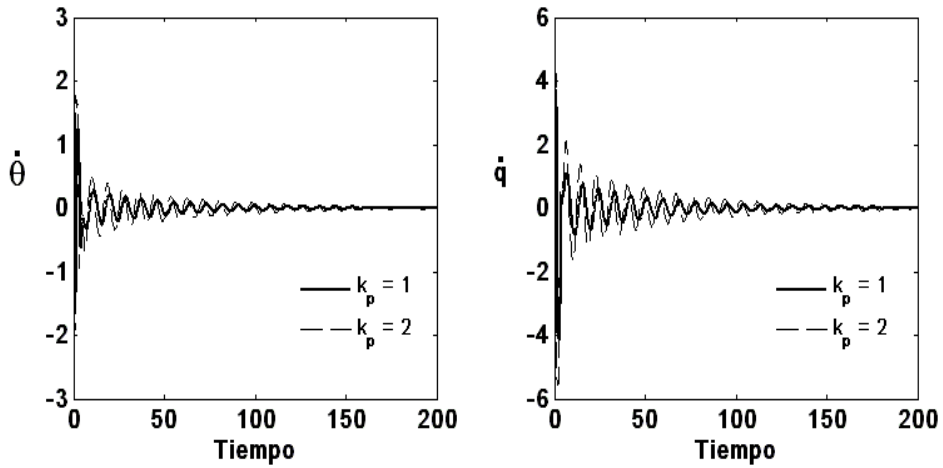


Figura 4.4 Comportamiento en lazo cerrado de las velocidades del sistema para dos valores diferentes de  $k_p$ .

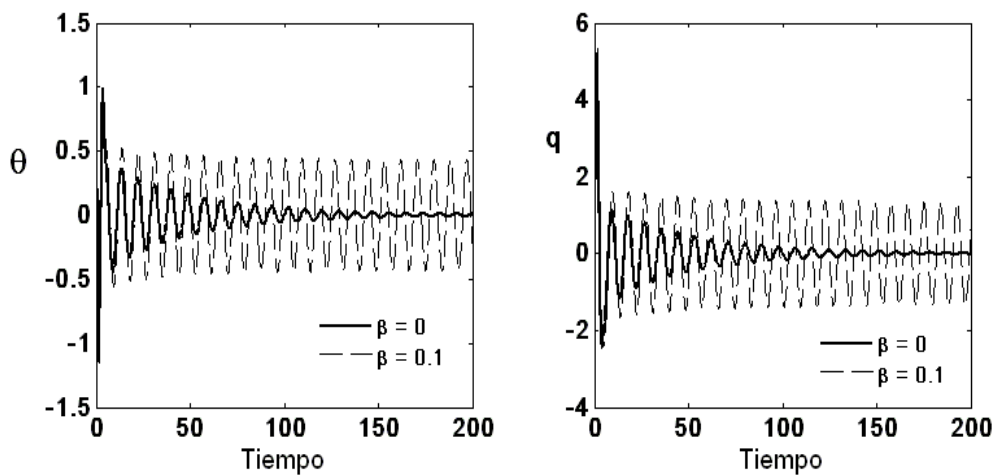


Figura 4.5 Robustez del controlador propuesto.

# Capítulo 5

## Control de Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido por funciones de Saturación Anidadas

En este capítulo se presenta una técnica sencilla que resuelve el problema de estabilización de dos sistemas subactuados no lineales tipo péndulo invertido como son el Péndulo Invertido sobre un Carro y el Péndulo con Disco de Inercia.

Esta estrategia parte de la idea que los sistemas pueden ser expresados como una cadena de integradores con una perturbación no lineal que permite aplicar una ley de control basada en funciones de saturación anidadas, que garantiza que todos los estados converjan a cero. La mayor parte de lo que expuesto en este capítulo aparece publicado en los artículos [8, 14].

### 5.1. Introducción

La estabilización de los Sistemas Subactuados tipo Péndulo es uno de los problemas más interesantes en Teoría de Control no lineal y se ve reflejado en la literatura

por la gran gama de trabajos que abordan este tema [6, 54, 59, 72, 81, 152], entre otros.

En este capítulo, nos centraremos en resolver el problema de estabilización de este tipo de sistemas subactuados aplicando la técnica de control basada en funciones de saturación anidadas. Con el fin de ilustrar la metodología se diseñarán controladores para el clásico problema del Péndulo Invertido sobre un Carro [6], y para un sistema subactuado presentado hace algunos años denominado Péndulo con Rueda Inercial [187]. Esta técnica fue propuesta por A. R. Teel [192] para estabilizar una cadena de integradores lineal y recientemente se ha utilizado para controlar algunos sistemas subactuados como el PVTOL [50, 213]; el Péndulo Invertido sobre un Carro [127, 61]; el Péndulo con Rueda de Inercia [213] y el sistema viga-bola [194].

Una de las principales contribuciones de este capítulo es presentar un conjunto de transformaciones lineales que permitan aplicar un controlador basado en funciones de saturación anidadas para solucionar el problema de estabilización del sistema péndulo invertido, así como del péndulo con disco inercial. Además, esta técnica permite proponer un controlador estabilizador sin que sea necesario tener una función candidata de Lyapunov para el sistema completo, provocando que el análisis de estabilidad del sistema completo sea bastante sencillo, comparado con otros trabajos [127, 149]. Por otra parte, el controlador propuesto permite que los sistemas en lazo cerrado sea asintóticamente estables de forma global y exponencialmente estables localmente alrededor de la posición vertical inestable. Cabe destacar que la aportación más relevante es solucionar el problema de estabilización del Péndulo con Disco Inercial considerando la presencia de fuerzas disipativas en la coordenada no actuada, ya que estos términos destruyen la propiedades estructurales originales de los sistemas Euler-Lagrange o Hamilton [78, 209].

El resto del capítulo se organiza como sigue. En las secciones 5.2 y 5.3 presentamos la estabilización de los sistemas Péndulo Invertido sobre un Carro y Péndulo con Disco Inercial, respectivamente.

## 5.2. Control del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro

En esta sección se propone una estrategia sencilla para estabilizar el Péndulo Invertido sobre un Carro alrededor del punto de equilibrio inestable, suponiendo que el péndulo inicia su movimiento por encima del semi-plano superior. Inspirados por el procedimiento presentado por R. Olfati-Saber [149], transformamos el sistema original en una cadena de cuatro integradores con una perturbación no lineal. Y entonces, aplicando el método de Lyapunov, introducimos un controlador basado en funciones de saturación anidadas. Para posteriormente, mostrar que el sistema en lazo cerrado es acotado, permitiendo probar que el sistema es localmente estable exponencialmente. Además, el análisis de estabilidad del sistema completo de cuarto orden es bastante simple comparado con otros análisis [127, 149]. Debido a que únicamente utilizamos el enfoque de Lyapunov.

### 5.2.1. Modelo no lineal

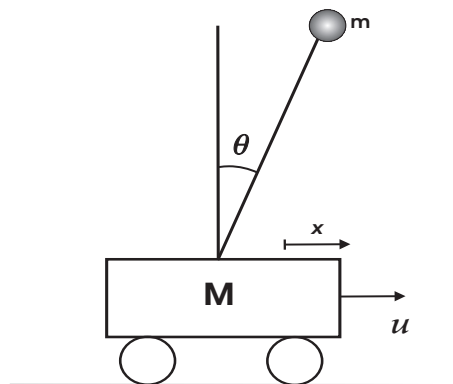


Figura 5.1 Péndulo Invertido sobre un Carro.

Consideremos el modelo tradicional del **PIC** como se muestra en la Figura 5.1. Este sistema se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales normalizadas [85]:<sup>1</sup>

<sup>1</sup>La obtención del modelo se puede encontrar de manera detallada en el apéndice A



$$\begin{aligned} \cos \theta \ddot{x} + \ddot{\theta} - \text{sen } \theta &= 0, \\ (1 + \delta) \ddot{x} + \cos \theta \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \text{sen } \theta &= u, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde,  $x$  es el desplazamiento normalizado del carro,  $\theta$  es el ángulo del péndulo con respecto al eje vertical,  $u$  es la fuerza normalizada aplicada al carro, y  $\delta > 0$  es una constante que depende directamente de las masas del carro y del péndulo.

Si definimos  $v = \ddot{\theta}$  y cancelamos a  $\ddot{x}$  de la segunda ecuación diferencial de (5.1), y después de sustituir a:

$$u = (1 + \delta) \tan \theta_1 - \theta_2^2 \text{sen } \theta_1 + v \left( \cos \theta_1 - \frac{1 + \delta}{\cos \theta_1} \right),$$

en el sistema (5.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \tan \theta_1 - \frac{v}{\cos \theta_1}, \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= v. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Donde  $x = x_1$ ,  $\theta = \theta_1$  y  $v$  es un controlador auxiliar ficticio que actúa en la coordenada  $\theta_1$ . Por supuesto, el sistema anterior solo es valido para todo  $\theta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . *En lo sucesivo, ésta restricción se denominará suposición **A1** y al sistema (5.2) como un modelo parcialmente linealizado del **PIC**.*

**Problema 5.2.1** *El principal objetivo es controlar el sistema parcialmente linealizado (5.2), de acuerdo a la suposición **A1**. En otras palabras, queremos llevar el ángulo del péndulo y la posición del carro a cero.*

### A. Transformación del modelo parcialmente lineal en una cadena de integradores

Introducimos el siguiente cambio de coordenadas [149].

$$z_1 = g(\theta_1) + x_1 \quad z_2 = g'(\theta_1)\theta_2 + x_2 \quad (5.3)$$

donde la función  $g$  será escogida, tal que la derivada de la variable  $z_2$  no depende del control  $v$ , es decir,

$$\dot{z}_2 = \tan \theta_1 + v \left( g'(\theta_1) - \frac{1}{\cos \theta_1} \right) + \theta_2^2 g''(\theta_1). \quad (5.4)$$

Así,

$$g'(\theta_1) = \frac{1}{\cos \theta_1}; \quad g(\theta_1) = \log \left( \frac{1 + \tan(\theta_1/2)}{1 - \tan(\theta_1/2)} \right), \quad (5.5)$$

y están definidas para  $|\theta_1| < \pi/2$ .

Por lo tanto, de las expresiones (5.3) y (5.5), el sistema (5.2) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \tan(\theta_1) \left( 1 + \frac{\theta_2^2}{\cos \theta_1} \right), \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= v. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Entonces, para expresar el sistema anterior como una cadena de integradores con una perturbación no lineal, es necesario definir las siguientes transformaciones globales no lineales

$$\begin{aligned} w_1 &= \tan \theta_1, \quad w_2 = \sec^2 \theta_1 \theta_2, \\ v_f &= \sec^2 \theta_1 v + 2\theta_2^2 \tan \theta_1 \sec^2 \theta_1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

con las cuales obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= w_1 + \frac{w_1 w_2^2}{(1+w_1^2)^{3/2}}, \\ \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= v_f. \end{aligned} \quad (5.8)$$

**Comentario 5.2.2** *Una representación similar del modelo (5.8) fue propuesta en [127]. En donde, el control y la coordenada no actuada no están completamente desacopladas. Esto significa que el control actúa directamente sobre la perturbación no lineal y como consecuencia el sistema en lazo cerrado tiene un dominio de atracción más restringido. Por otra parte, en nuestro caso la acción de control está desacoplada completamente de la perturbación no lineal, de modo que, es posible aumentar el dominio de estabilidad para todas las condiciones iniciales que pertenecen al semi-plano superior.*

### 5.2.2. Estrategia de Control

En este apartado se propone una función de saturación anidada para controlar un sistema no lineal que puede ser expresado aproximadamente como una cadena de integradores con una perturbación no lineal. Esta técnica fue propuesta por A. Teel [192] para estabilizar una cadena de integradores lineal, y además ha sido usada para controlar pequeñas maquinas voladoras [50]. Por lo tanto, para solucionar nuestro problema de estabilización realizaremos los siguientes pasos. Primero usamos una transformación lineal que permite proponer el controlador. Posteriormente, se demostrará que ésta ley de control garantiza que todos los estados sean acotados y después de un tiempo finito se asegure que todos los estados converjan a cero.

**Definición 5.2.1**  $\sigma_m(s) : R \rightarrow R$  es una función de saturación lineal, si satisface:

$$\sigma_m(s) = \begin{cases} s & \text{if } |s| \leq m \\ m \operatorname{sign}(s) & \text{if } |s| > m \end{cases} \quad (5.9)$$

### A. Diseño de la ley de control

En primer lugar, proponemos la siguiente transformación lineal:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, aplicando la transformación anterior, el sistema (5.8) se expresa de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= v_f + q_2 + q_3 + q_4 + 3\delta_a(q) \\ \dot{q}_2 &= v_f + q_3 + q_4 + \delta_a(q) \\ \dot{q}_3 &= v_f + q_4 \\ \dot{q}_4 &= v_f \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde la perturbación  $\delta_a$  se define como:

$$\delta_a(q) = q_4^2 G(q_3 - q_4), \quad (5.12)$$

y

$$G(w) = \frac{w}{(1 + w^2)^{3/2}}, \quad (5.13)$$

por simplicidad,  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ .

**Comentario 5.2.3** *Es importante notar que el  $\max |G(w)| \leq k_0 = \frac{2}{3^{3/2}}$ , y se obtiene cuando  $w = 1/\sqrt{2}$ .*

Finalmente, el controlador se propone como sigue:

$$v_f = -q_4 - k\sigma_\alpha \left( \frac{q_3 + \sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1))}{k} \right). \quad (5.14)$$

donde,  $k$  es una constante positiva.

## B. Acotamiento de los estados

A continuación, mostramos en cuatro pasos que el controlador propuesto (5.14) asegura que todos los estados son acotados; sin embargo, el acotamiento de cada estado depende directamente de los parámetros del controlador.<sup>2</sup>

**Primer paso:** Definamos la siguiente función de definida positiva, para mostrar que el estado  $q_4$  es acotado.

$$V_4 = q_4^2/2 \quad (5.15)$$

Entonces, calculando la derivada de  $V_4$  con respecto al tiempo se obtiene la expresión:

$$\dot{V}_4 = -q_4^2 - kq_4\sigma_\alpha(q_3/k + \sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1)))/k). \quad (5.16)$$

Se puede observar claramente que  $\dot{V}_4 < 0$ , cuando  $|q_4| \geq \alpha k$ . Por consecuencia, existe un tiempo finito  $T_1 > 0$  tal que:

$$|q_4(t)| < \alpha k; \quad \forall t > T_1. \quad (5.17)$$

**Segundo paso:** Para analizar el comportamiento del estado  $q_3$ . Consideremos la función definida positiva

$$V_3 = q_3^2/2 \quad (5.18)$$

Por tanto, diferenciando  $V_3$ , y sustituyendo (5.14) en la tercera ecuación diferencial de (5.11) se obtiene lo siguiente:

$$\dot{V}_3 = -q_3k\sigma_\alpha(q_3/k + \sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1)))/k), \quad (5.19)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son escogidos, tal que  $\alpha > 2\beta$ . Y claramente, si  $|q_3| > \beta$ , entonces  $\dot{V}_3 < 0$  y existirá un tiempo finito  $T_2 > T_1$  después del cual

---

<sup>2</sup>Cabe destacar que  $|q_4(t)| \leq q_4(0)e^{-t} + \alpha$  y  $|G(q_3 - q_4)| \leq k_0$ . Por lo tanto, el lado derecho del sistema en lazo cerrado (5.14) y (5.11) es localmente Lipschitz. Por consiguiente, los estados  $\{q_1, q_2, q_3\}$  no pueden tener un tiempo de escape finito [110].

$$|q_3(t)| < \beta; \quad \forall t > T_2. \quad (5.20)$$

Cuando la condición anterior se satisface, la ley de control  $v_f$  toma la siguiente forma.

$$v_f = -q_4 - q_3 - \sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1)) \quad \forall t > T_2. \quad (5.21)$$

**Tercer paso:** Sustituyendo (5.21) en la segunda ecuación de (5.11), obtenemos

$$\dot{q}_2 = -\sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1)) + \delta_a(q). \quad (5.22)$$

Además, definiendo la función definida positiva.

$$V_2 = q_2^2/2 \quad (5.23)$$

Y derivando  $V_2$  a lo largo de las trayectorias de la ecuación (5.22) se produce lo siguiente:<sup>3</sup>

$$\dot{V}_2 = -q_2 (\sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1)) + \delta_a(q)) \quad (5.24)$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  deben satisfacer la relación  $\beta > 2\gamma + k_0\alpha^2k^2$ . Y obviamente, si  $|q_2| > \gamma + k_0\alpha^2k^2$ , entonces  $\dot{V}_2 < 0$ . Por lo tanto, existe un tiempo finito  $T_3 > T_2$  después del cual  $|q_2|$  satisface lo siguiente:

$$|q_2| < \gamma + k_0k^2\alpha^2, \quad \forall t > T_3. \quad (5.25)$$

Por consiguiente,  $q_2$  es acotado y el control  $v_f$  se convierte en:

$$v_f = -q_4 - q_3 - q_2 - \sigma_\gamma(q_1), \quad \forall t > T_3. \quad (5.26)$$

**Cuarto paso:** Sustituyendo (5.26) en la primera ecuación de (5.11), se obtiene:

$$\dot{q}_1 = -\sigma_\gamma(q_1) - 3\delta_a(q). \quad (5.27)$$

---

<sup>3</sup>Recordando que después de  $t > T_3$ , se tiene que  $|\delta_a(q)| \leq k_0\alpha^2k^2$ .

Ahora, introduciendo la función definida positiva

$$V_1 = q_1^2/2 \quad (5.28)$$

Y derivando  $V_1$  a lo largo de las trayectorias de (5.27), obtenemos

$$\dot{V}_1 = -q_1(\sigma_\gamma(q_1) + 3\delta_a(q)), \quad (5.29)$$

donde el parámetro  $\gamma$  debe escogerse, tal que  $\gamma > 3k_0\alpha^2k^2$ . Y si  $q_1 > 3k_0\alpha^2k^2$ , entonces  $\dot{V}_1 < 0$ , Por lo cual, existirá un tiempo finito  $T_4 > T_3$  en donde:

$$|q_1| < 3k_0\alpha^2k^2, \quad \forall t > T_4. \quad (5.30)$$

Por consecuencia  $q_1$  también es acotado. Entonces, todas las restricciones de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  se pueden resumir como:

$$\alpha > 2\beta, \quad \beta > 2\gamma + k_0k^2\alpha^2, \quad \gamma > 3k_0k^2\alpha^2. \quad (5.31)$$

Entonces, manipulando las desigualdades anteriores, tenemos que

$$\alpha < 1/(14k_0k^2). \quad (5.32)$$

Por lo tanto, el parámetro  $k$  se puede tomar como  $14k_0k^2 = 1$  y el conjunto de parámetros de control se pueden escoger como

$$\alpha = r, \quad \beta = r/2, \quad \gamma = 3r/14, \quad (5.33)$$

para todo  $0 < r \leq 1$ .

### C. Convergencia de los estados a cero

Enseguida, demostraremos que el sistema en lazo cerrado dado por (5.11) y (5.14) es asintóticamente estable y exponencialmente estable localmente si los parámetros del controlador satisfacen las ecuaciones definidas en (5.31).

Cabe notar que después del tiempo  $t > T_4$ , la ley de control ya no está saturada, es decir:

$$v_f = -q_1 - q_2 - q_3 - q_4,$$

y el sistema en lazo cerrado toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -q_1 + 3\delta_a(q), \\ \dot{q}_2 &= -q_1 - q_2 + \delta_a(q), \\ \dot{q}_3 &= -q_1 - q_2 - q_3, \\ \dot{q}_4 &= -q_1 - q_2 - q_3 - q_4,\end{aligned}\tag{5.34}$$

con  $\delta_a$  descrita en (5.12).

Definamos la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}q^T q,\tag{5.35}$$

Y diferenciando  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema (5.34), obtenemos:

$$\dot{V} = -q^T M q + (3q_1 + q_2)\delta_a(q)\tag{5.36}$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.\tag{5.37}$$

siendo  $M$  definida positiva con  $\lambda_{\min}\{M\} = 1/2$ .

Es importante destacar que del comentario 5.2.3 y de la expresión (5.12), podemos determinar fácilmente que el segundo término de la ecuación (5.36) satisface:

$$\begin{aligned}|(3q_1 + q_2)\delta(q)| &< \frac{k_0}{2} |(3q_1 + q_2)q_4^2|; \\ &< \frac{k_0}{2} (q_4^4 + (3q_1 + q_2)^2).\end{aligned}\tag{5.38}$$



Por lo tanto,  $\dot{V}$  cumple:

$$\dot{V} < -\frac{1}{2} [q_1^2 + q_2^2 - k_0(3q_1 + q_2)^2] - \frac{q_4^2}{2}(1 - k_0q_4^2) - \frac{1}{2}q_3^2. \quad (5.39)$$

De la definición de  $k_0$  y recordando que  $14k_0k^2 = 1$ , obtenemos que la desigualdad anterior es definida negativa estrictamente, si:

$$q_1^2 + q_2^2 - k_0(3q_1 + q_2)^2 > 0, \quad (5.40)$$

y

$$-1 + k_0q_4^2 \leq -1 + 14k_0k^2 < 0. \quad (5.41)$$

Por consiguiente,  $\dot{V}$  es estrictamente negativa y el vector de estados  $q$  converge a cero de manera exponencial localmente después de un tiempo  $t > T_4$ .

Del procedimiento descrito se obtiene que el sistema (5.11) en lazo cerrado con el controlador (5.14) es asintóticamente estable semi-globalmente, así como exponencialmente estable localmente, cuando los parámetros cumplen con la (5.31). Sin embargo, podemos solo asegurar que los estados originales  $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  convergen a cero, si suponemos que el ángulo del péndulo se encuentra en el semi-plano superior, debido a que (5.2) y (5.7) únicamente están definidas para  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Es decir, la suposición **A1** se necesita para evitar los puntos singulares del sistema definidos en  $\theta = \pm\pi/2$ .

Entonces, de lo anterior se deriva:

**Proposición 5.2.4** *Considere el modelo parcialmente linealizado del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro (5.2), de acuerdo con la suposición **A1** y en lazo cerrado con la ley de control:*

$$v = -\theta_2 - k\sigma_\alpha \left( \frac{q_3 + \sigma_\beta(q_2 + \sigma_\gamma(q_1))}{k} \right) \cos^2 \theta_1 - 2\theta_2^2 \tan \theta_1, \quad (5.42)$$

donde  $k = \sqrt{1/(14 \times (2/3^{3/2}))}$  y los estados  $q_1, q_2$  y  $q_3$  se definen como:

$$q_1 = z_1 + 3z_2 + 3w_1 + w_2; \quad q_2 = z_2 + 2w_1 + w_2; \quad q_3 = w_1 + w_2, \quad (5.43)$$

con

$$\begin{aligned} w_1 &= \tan \theta_1; & w_2 &= \theta_2 \sec^2 \theta_1; \\ z_1 &= \log \left( \frac{1+\tan(\theta_1/2)}{1-\tan(\theta_1/2)} \right) + x_1; & z_2 &= \theta_2 / \cos \theta_1 + x_2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado es globalmente estable así como exponencialmente estable localmente; si los parámetros del controlador  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  cumplen con las desigualdades definidas en (5.31).

### 5.2.3. Resultados de Simulación

La eficiencia de la estrategia de control propuesta ha sido probada mediante simulaciones computacionales implementadas en el programa MATLAB<sup>TM</sup>. Los parámetros de controlador usados son  $\alpha = 0,99$ ,  $\beta = 0,49$  y  $\gamma = 0,214$ , además, las condiciones iniciales toman los siguientes valores:  $\theta_1(0) = 1,18$  [rad],  $\theta_2(0) = -0,05$  [rad/sec],  $x_1(0) = -0,6$  y  $x_2(0) = 0,5$ .

La figuras 5.2 y 5.3 muestran las respuestas en lazo cerrado del controlador (5.42) cuando se aplica al modelo parcialmente linealizado (5.2). De las figuras se puede observar que el estado  $x_1$  converge muy lentamente a cero, comparado con el estado  $\theta_1$ . Esto significa que la posición del carro se incrementa hasta que el ángulo del péndulo se aproxima a cero. Esto se puede explicar de la siguiente manera: el controlador primero lleva al péndulo a colocarse en una vecindad muy cercana a cero, mientras que la posición del carro alcanza su valor máximo para que posteriormente el controlador mueva el carro lentamente al origen. Cabe destacar que la estrategia de control sólo realiza movimientos lentos del sistema.

Finalmente, la figura 5.4 representa el comportamiento de la ley de control  $v$  y de la función de energía. Como se puede ver en la gráfica, la entrada de control  $v$ , así como la función de Lyapunov que decrece después de  $t > 10$  convergen a cero.

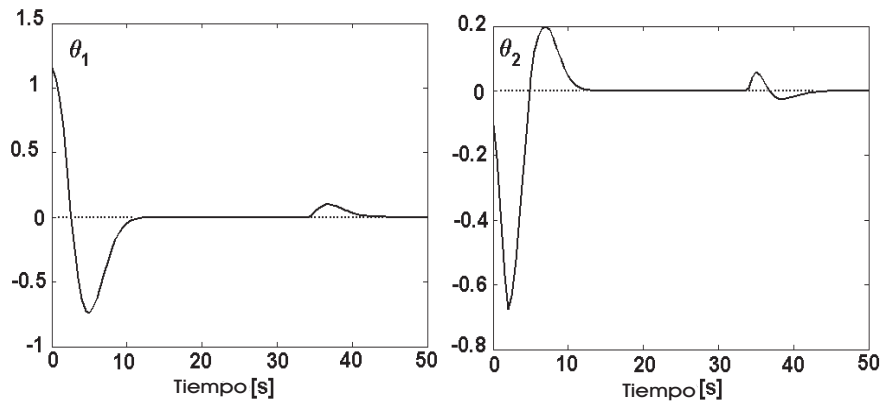


Figura 5.2 Respuesta en lazo cerrado del ángulo y velocidad angular del péndulo.

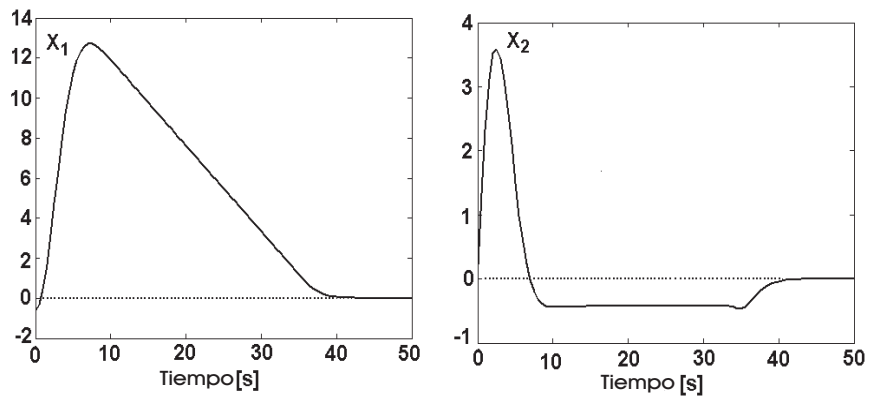


Figura 5.3 Respuesta en lazo cerrado de la posición y velocidad carro.

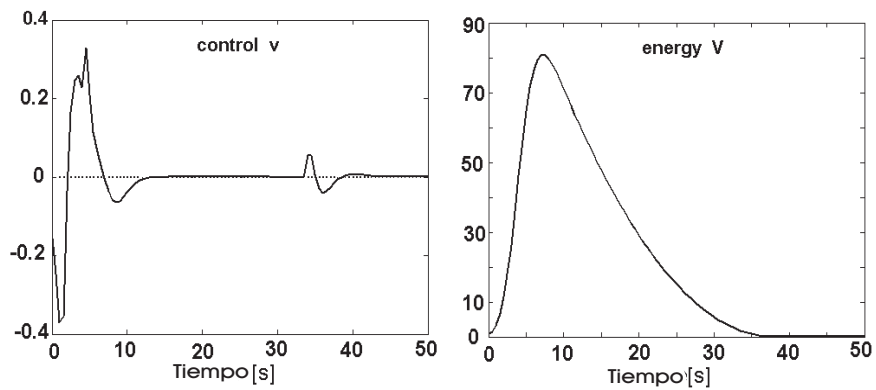


Figura 5.4 Comportamiento del controlador  $v$  y de la función de energía  $V$ .

## 5.3. Control del Péndulo con Disco Inercial

En esta sección se aborda el problema de estabilización del sistema conocido como Péndulo con Disco de Inercia alrededor del punto de equilibrio inestable, el cual tiene la característica de estar fuertemente amortiguado.

Siendo la principal contribución de esta sección una serie de transformaciones que permitirán utilizar un controlador basado en funciones de saturación anidadas para llevar al sistema a su punto de equilibrio inestable. Obteniendo un sistema en lazo cerrado globalmente asintótico y exponencialmente estable localmente.

### 5.3.1. Modelo no lineal del Péndulo con Disco Inercial

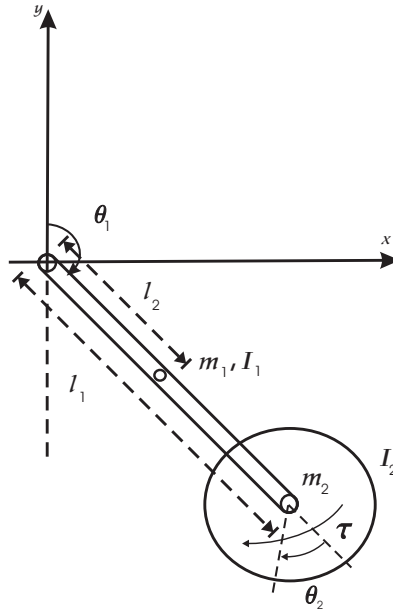


Figura 5.5 Péndulo con Disco Inercial.

El sistema conocido como Péndulo con Disco Inercial (**PDI**) mostrado en la figura 5.5, fue definido por M. Spong [187] y consiste en un péndulo físico con un disco equilibrado situado al extremo. El par motor produce una aceleración angular de la masa del extremo lo cual genera un par de acoplamiento en el eje del péndulo.

El modelo de este sistema puede ser descrito como sigue [59]:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} (I_1 + I_2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \eta g \operatorname{sen}(\theta_1) + \delta_1 \dot{\theta}_1 &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 + \delta_2 \dot{\theta}_2 &= \tau \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde,  $\theta_1$  es el ángulo del péndulo,  $\theta_2$  es el ángulo de disco y  $\tau$  el torque aplicado al disco. Los parámetros restantes se describen en la siguiente tabla:

$m_1$	:	Masa del péndulo
$m_2$	:	Masa de la rueda
$l_1$	:	Longitud del péndulo
$l_2$	:	Distancia al centro de masa del péndulo
$\delta_1$	:	Coefficiente de amortiguamiento de la coordenada subactuada
$\delta_2$	:	Coefficiente de amortiguamiento de la coordenada actuada
$I_1$	:	Momento de Inercia del péndulo
$I_2$	:	Momento de Inercia del disco
		$\eta = m_1 l_2 + m_2 l_1$

Como puede verse,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las coordenadas subactuada y actuada, respectivamente. Y  $\tau$  actúa directamente en la posición angular del disco. Entonces, para simplificar las manipulaciones algebraicas en desarrollos posteriores reescribiremos el sistema (5.45) como:

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_1) \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 - \kappa_2 \operatorname{sen}(\theta_1) + \delta \dot{\theta}_1 &= 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 &= v \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= (I_1 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2) / I_2; & \kappa_2 &= \eta g / I_2; \\ \tau &= v I_2 + \delta_2 \dot{\theta}_2 & \delta &= \frac{\delta_1}{I_2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

*El objetivo principal de este apartado es encontrar una retroalimentación  $v$  que lleve el péndulo a la posición invertida con la posición del disco en el origen, aun si se presentara una fuerza disipativa lineal en la coordenada no actuada.*

---

<sup>4</sup>La obtención de las ecuaciones dinámicas del sistema utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se describen en el apéndice A.2

**Comentario 5.3.1** *Cuando  $\delta = 0$ , en la literatura se puede encontrar la solución al problema de estabilización asintótica del sistema alrededor del punto de equilibrio inestable por medio de métodos basados en energía u otro procedimiento [151, 59, 159]. Ya que, si el amortiguamiento se presentara en el sistema utilizando estos métodos se perderían las propiedades de plitudud y pasividad, provocando que el sistema en lazo cerrado pudiera ser inestable o convergiera a otro punto de equilibrio [209, 166]. Lo anterior puede demostrarse por medio de una linealización del sistema alrededor de la posición invertida. Por otra parte, tampoco es posible resolver la estabilización asintótica del sistema utilizando enfoques basados en ajuste de modelo [78, 156]. Es decir, los métodos de Lagrangiano o Hamiltoniano controlado no son adecuados para solucionar la estabilización del sistema cuando el amortiguamiento se presenta en el sistema. Esto se debe a que la fuerza de amortiguamiento rompe las propiedades de simetría de los sistemas Euler-Lagrange o Hamilton. Para evitar este obstáculo introducimos una transformación global que permita expresar el sistema (5.46) como una cadena de integradores con una perturbación no lineal. Para posteriormente, utilizar un controlador basado en funciones de saturación anidadas que haga asintóticamente estable el origen del sistema transformado.*

#### A. Transformación de la estructura original del sistema:

Introducimos el siguiente cambio de coordenadas globales:

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 + \kappa_1) \theta_1 + \theta_2; & \dot{z}_1 &= p_1; \\ z_2 &= \theta_1; & \dot{z}_2 &= p_2, \end{aligned} \tag{5.48}$$

de las cuales se obtiene el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x} = A_0 x + \Delta(x) + b_0 u \tag{5.49}$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} z_1 \\ p_1 \\ z_2 \\ p_2 \end{bmatrix}; \quad A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_2 \phi(z_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La perturbación  $\phi$  y el nuevo controlador  $u$  se definen como sigue

$$\begin{aligned} \phi(z_2) &= \text{sen}(z_2) - z_2; \\ u &= \frac{1}{\kappa_1}(-v - \delta \dot{z}_2 + \kappa_2 \text{sen}(z_2)). \end{aligned} \tag{5.50}$$

Cabe destacar que la estructura del sistema (5.49) tiene una forma similar a la de una cadena de integradores con una perturbación no lineal. Por otra parte, el nuevo controlador  $u$  actuada directamente en la coordenada no actuada  $\theta_1$ , la cual es la posición del péndulo. Contrario a lo que sucedía en el sistema (5.46) en donde el torque  $\tau$  manejaba directamente la posición del disco. Por consiguiente, se han realizado pequeños cambios a la estructura original del péndulo con rueda de inercia fuertemente amortiguado.

### 5.3.2. Estrategia de control

En esta sección establecemos la estructura de nuestra estrategia de control. La idea primordial es llevar todos los estados a una vecindad cercana del origen, donde la perturbación no lineal puede ser acotada por el cuadrado de la posición angular del péndulo para, posteriormente, realizar el análisis de estabilidad por medio de la estabilidad de sistema lineal robusto. En otras palabras, forzamos los estados del sistema (5.49) a comportarse como un sistema lineal exponencial con una perturbación

pequeña. Para lograrlo usamos un controlador basado en funciones de saturación anidadas semejante al que se utilizó para resolver el problema de estabilización del sistema Péndulo Invertido sobre una Carro presentado en las secciones anteriores de este capítulo.

Como se ha comentado esta técnica fue propuesta en [192, 195], y ha sido usada para estabilizar una cadena de integradores lineal, así como para controlar diversos sistemas subactuados [8, 50, 127, 126, 194].

El procedimiento que se utilizará es el siguiente: Primero, usamos una transformación lineal para proponer un controlador estabilizador, después, se mostrará que el controlador propuesto garantiza el acotamiento de todos los estados. Y finalmente, se demuestra que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable exponencialmente de manera local después de un tiempo finito.

Antes de efectuar los desarrollos de la estrategia de control introducimos la siguiente definición:

**Definición 5.3.1** *Decimos que la función  $\sigma_m[s] : R \rightarrow R$  es una función de saturación lineal, si satisface*

$$\sigma_m[s] = \begin{cases} s & \text{if } |s| \leq m \\ m \operatorname{sign}(s) & \text{if } |s| > m \end{cases} . \quad (5.51)$$

#### A. Controlador basado en saturaciones anidadas.

Inspirados en el trabajo presentado por A. R. Teel [192], proponemos una transformación lineal que permitirá obtener el controlador  $u$  que estabilizará al sistema no lineal (5.49).



Por tanto, la transformación lineal  $q = Sx$ , se escogerá de tal manera se cumpla lo siguiente:

$$SA_oS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Sb_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Realizando, algunas manipulaciones algebraicas proponemos a  $S$  como

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_2} & \frac{\delta+3\kappa_2}{\kappa_2^2} & 3 + \frac{\delta^2}{\kappa_2^2} + \frac{3\delta}{\kappa_2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 2 + \frac{\delta}{\kappa_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

Por lo tanto, el sistema (5.49) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= u + q_2 + q_3 + q_4 + \left(\frac{\delta+3\kappa_2}{\kappa_2}\right) \phi(q_3 - q_4) \\ \dot{q}_2 &= u + q_3 + q_4 + \phi(q_3 - q_4) \\ \dot{q}_3 &= u + q_4 \\ \dot{q}_4 &= u \end{aligned} \quad (5.53)$$

Entonces, para estabilizar el sistema (5.53), se propone la siguiente ley de control  $u$  basada en saturaciones anidadas, como:

$$u = -q_4 - k\sigma_\alpha \left[ \frac{1}{k} (q_3 + \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]]) \right], \quad (5.54)$$

donde  $k$  es una constante positiva.

Cabe señalar que el sistema en lazo cerrado definido por las ecuaciones (5.53) y (5.54), es globalmente Lipschitz. Por consecuencia, todos los estados  $\{q_i\}$ <sup>5</sup> no pueden tener un tiempo de escape finito [110].

---

<sup>5</sup> $\{x_i\}$  denota a  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ .

**B. Acotamiento de los estados.**

A continuación, mostraremos en cuatro sencillos pasos que la solución del sistema en lazo cerrado formado por (5.53) y (5.54) garantiza que todos los estados sean acotados. Además, el acotamiento de cada estado depende de manera directa del diseño de los parámetros del controlador (5.54).

**Paso 1:** Para mostrar que el estado  $q_4$  es acotado introducimos la función auxiliar  $V_1$ , definida como:

$$V_1 = \frac{1}{2}q_4^2 \quad (5.55)$$

Entonces, derivando (5.55) y usando la cuarta ecuación diferencial de (5.53), se tiene que:

$$\dot{V}_1 = -q_4^2 - q_4 k \sigma_\alpha [q_3/k + \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]] / k]$$

Y si  $|q_4| > k\alpha$  entonces, de la expresión anterior se obtiene que  $\dot{V}_1 \leq 0$ . Por tanto, habrá un tiempo finito  $T_1$  después del cual se tenga que:

$$|q_4(t)| < k\alpha; \quad \forall t > T_1.$$

Es decir,  $q_4$  es acotado después de un tiempo finito  $T_1$ .

**Paso 2:** Para poder analizar el comportamiento del estado  $q_3$  se necesita definir la función auxiliar positiva  $V_2$ , como:

$$V_2 = \frac{1}{2}q_3^2. \quad (5.56)$$

Por lo cual, sustituyendo el controlador propuesto (5.54) en la tercera ecuación diferencial de (5.53), se tiene lo siguiente:

$$\dot{q}_3 = -k\sigma_\alpha \left[ \frac{1}{k} (q_3 + \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]]) \right]. \quad (5.57)$$

Diferenciando (5.56) y usando (5.57), obtenemos:

$$\dot{V}_2 = -q_3 k \sigma_\alpha \left[ \frac{1}{k} (q_3 + \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]]) \right]$$

donde los parámetros de control  $\alpha$  y  $\beta$  han sido seleccionados tal que,  $\alpha > 2\beta/k$ . Y si  $|q_3| > \beta$  entonces,  $\dot{V}_2 \leq 0$ . Por consiguiente, existirá un tiempo finito  $T_2 > T_1$ , después del cual se tiene que la  $|q_3(t)|$  cumpla lo siguiente:

$$|q_3(t)| < \beta; \quad \forall t > T_2.$$

Consiguientemente,  $q_3$  también es acotado después de un tiempo finito  $T_2$ . Por otra parte definimos la siguiente variable auxiliar

$$w = q_3 + \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]],$$

de la cual se tiene que  $|w(t)| \leq |q_3(t)| + \beta$ , para todo  $t > 0$ , y evidentemente,  $|w(t)| < 2\beta$  después de  $t > T_2$ . Y debido que  $\alpha > 2\beta/k$  entonces

$$k \sigma_\alpha \left[ \frac{1}{k} w \right] = w; \quad t > T_2.$$

De lo anterior, el control  $u$  toma la siguiente forma:

$$u = -q_4 - q_3 - \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]]; \quad t > T_2. \quad (5.58)$$

**Comentario 5.3.2** Después de  $t > T_2$ , tenemos que

$$|q_3 - q_4| < \beta + k\alpha < \frac{\alpha k}{2} + \alpha k = \mu_k. \quad (5.59)$$

por lo cual, el parámetro  $k$  se puede seleccionar como se desee, y  $\mu_k < 1$ . Por consecuencia,  $|q_3(t) - q_4(t)| < \mu_k < 1$ , para todo  $t > T_2$ . Entonces, aplicando la siguiente desigualdad

$$|\text{sen}(x) - x| \leq |\text{sen}(1) - 1| x^2 = \bar{\theta} x^2; \quad \forall |x| < 1, \quad (5.60)$$

en la definición de la función  $\phi$ , se obtiene que

$$|\phi(q_3 - q_4)| \leq \bar{\theta} |q_3 - q_4|^2 < \bar{\theta} \mu_k^2; \quad \forall t > T_2. \quad (5.61)$$

**Paso 3:** Ahora, sustituyendo (5.58) en la segunda ecuación diferencial de (5.53) se obtiene:

$$\dot{q}_2 = -\sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]] + \phi(q_3 - q_4); t > T_2, \quad (5.62)$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  satisfacen la relación  $\beta > 2\gamma + \bar{\theta}\mu_k^2$ . Entonces, para mostrar que  $q_2$  es acotado se necesita introducir la función auxiliar  $V_3$ , como:

$$V_3 = \frac{1}{2}q_2^2. \quad (5.63)$$

Por lo cual, derivando (5.63) y utilizando (5.62), se produce la expresión siguiente:

$$\dot{V}_3 = -q_2 (\sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]] + \phi(q_3 - q_4)).$$

Obviamente, si  $|q_2| > \gamma + \bar{\theta}\mu_k^2$  se cumpliría que  $\dot{V}_3 \leq 0$  y existirá un tiempo finito  $T_3 > T_2$ , después del cual se obtendrá la siguiente desigualdad:

$$|q_2(t)| < \gamma + \bar{\theta}\mu_k^2; \quad \forall t > T_3.$$

Como consecuencia,  $q_2$  es acotado y el control  $u$  se convierte en:

$$u = -q_4 - q_3 - q_2 - \sigma_\gamma [q_1]; \quad \forall t > T_3. \quad (5.64)$$

**Paso 4:** Para analizar el comportamiento de  $q_1$ , sustituimos (5.64) en la primera ecuación diferencial de (5.53), obteniendo:

$$\dot{q}_1 = -\sigma_\gamma [q_1] + \left( \frac{\delta}{\kappa_2} + 3 \right) \phi(q_3 - q_4); \quad \forall t > T_3. \quad (5.65)$$

Entonces, para mostrar que  $q_1$  es acotado, definimos la función auxiliar positiva  $V_4$  de la siguiente manera:

$$V_4 = \frac{1}{2}q_1^2. \quad (5.66)$$

Por lo tanto, derivando (5.66) y usando (5.65) se obtiene que:

$$\dot{V}_4 = -q_1 \left( \sigma_\gamma [q_1] + \left( \frac{\delta}{\kappa_2} + 3 \right) \phi(q_3 - q_4) \right). \quad (5.67)$$

Donde  $\gamma$  tiene que ser seleccionada tal que,  $\gamma > (\delta/\kappa_2 + 3)\bar{\theta}\mu_k^2$ . Y si  $|q_1| > (\delta/\kappa_2 + 3)\bar{\theta}\mu_k^2$  se obtiene que  $V_4 \leq 0$ , y habrá un tiempo  $T_4 > T_3$  tal que:

$$|q_1(t)| < \left( \frac{\delta}{\kappa_2} + 3 \right) \bar{\theta}\mu_k^2; \quad \forall t > T_4.$$

Entonces, de los pasos anteriores podemos concluir que los estados  $\{q_i\}$  son acotados después del tiempo  $t > T_4$

A continuación, resumimos esta sección con el siguiente lema que permitirá calcular los parámetros del controlador adecuadamente definidos como  $\{\alpha, \beta, \gamma, \mu_k\}$ , los cuales son necesarios para garantizar el acotamiento de todos los estados.

**Lema 5.3.3** *Dadas las constantes positivas  $\delta$  y  $\kappa_2$ ; y considerando que  $\mu_k \in (0, 1)$ <sup>6</sup> se obtienen las siguientes desigualdades:*

$$\alpha > 2\beta; \quad \beta > 2\gamma + \bar{\theta}\mu_k^2; \quad \gamma > \left( \frac{\delta}{\kappa_2} + 3 \right) \bar{\theta}\mu_k^2, \quad (5.68)$$

que se cumplirán si los parámetros  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $\alpha$  son escogidos como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma &= \lambda \bar{\theta}\mu_k^2 \left( \frac{\delta}{\kappa_2} + 3 \right); \quad \beta = \lambda \bar{\theta}\mu_k^2 \left( 7 + \frac{2\delta}{\kappa_2} \right); \\ \alpha &= 2\lambda \bar{\theta}\mu_k^2 \left( 7 + \frac{2\delta}{\kappa_2} \right), \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde  $\lambda > 1$ .

### C. Convergencia de los estados a cero

Para probar que el sistema en lazo cerrado descrito por (5.53) y (5.58) es asintóticamente estable y exponencialmente estable localmente de acuerdo con las suposiciones del lema 5.3.3. Es decir, si los parámetros,  $k$ ,  $\gamma$  y  $\beta$  son escogidos de acuerdo al lema 5.3.3, entonces el vector de estado  $q$  converge a cero.

---

<sup>6</sup>Cabe recordar que  $k = 2\mu_k/3\alpha$ .

Cabe destacar que después del tiempo  $t > T_4$ , la ley de control ya no está saturada, es decir:

$$u = -q_1 - q_2 - q_3 - q_4,$$

y el sistema en lazo cerrado toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -q_1 + \left(\frac{\delta}{\kappa_2} + 3\right) \phi(q_3 - q_4), \\ \dot{q}_2 &= -q_1 - q_2 + \phi(q_3 - q_4), \\ \dot{q}_3 &= -q_1 - q_2 - q_3, \\ \dot{q}_4 &= -q_1 - q_2 - q_3 - q_4,\end{aligned}\tag{5.70}$$

Entonces, para demostrar la convergencia de los estados a cero, usaremos la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}q^T q,\tag{5.71}$$

Derivando (5.71) a lo largo de las trayectorias del sistema (5.70), se obtiene que

$$\dot{V} = -q^T M q + \left(q_2 + \left(\frac{\delta}{\kappa_2} + 3\right)q_1\right) \phi(q_3 - q_4)\tag{5.72}$$

donde  $M$  se define como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Cabe notar que  $\lambda_{\min}\{M\} = 1/2$ , por tanto  $M > 0$ . Y recordando que después del tiempo  $t > T_4$ , los estados  $q_1$ ,  $q_2$  y la función  $\phi$  satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}|q_1| &< \bar{\theta}\mu_k^2 \left(\frac{\delta}{\kappa_2} + 3\right); & |q_2| &< \bar{\theta}\mu_k^2 \left(\frac{\delta}{\kappa_2} + 4\right); \\ |\phi(q_3 - q_4)| &< \bar{\theta}(q_3 - q_4)^2.\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo las desigualdades anteriores en el segundo término de (5.72) y después de usar la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$|(\delta/\kappa_2 + 3)q_1 + q_2| |\phi(q_3 - q_4)| < \bar{K}(q_3 - q_4)^2 \leq 2\bar{K}(q_3^2 + q_4^2); \quad (5.73)$$

donde

$$\bar{K} = \bar{\theta}\mu_k^2 (\delta/\kappa_2 + 3)^2 + \bar{\theta}\mu_k^2 (\delta/\kappa_2 + 4). \quad (5.74)$$

Es importante comentar que  $\bar{K}$  puede ser tan pequeño como se necesite, ya que  $\mu_k \in (0, 1)$  puede seleccionarse como se desee.

Por lo cual, aplicando las desigualdades (5.73) en la derivada de  $V$  expresada en (5.72), es evidente que tengamos lo siguiente

$$\dot{V} < -\frac{1}{2} [q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2] + 2\bar{K}(q_3^2 + q_4^2).$$

y si forzamos a que  $\bar{K} < 1/4$ , se obtendrá que  $\dot{V} < 0$ , para todo  $q \neq 0$ . Por lo tanto, si  $\bar{K}$  se escoge tal que  $\bar{K} < 1/4$ , entonces el vector de estado  $q$  convergirá a cero exponencialmente de manera local.

De la discusión anterior se deriva la siguiente proposición:

**Proposición 5.3.4** *Considere el sistema péndulo con disco inercial descrito por (5.46), en lazo cerrado con*

$$v = \kappa_1 q_4 + \kappa_1 k \sigma_\alpha \left[ \frac{1}{k} (q_3 + \sigma_\beta [q_2 + \sigma_\gamma [q_1]]) \right] - \delta \dot{\theta}_1 + \kappa_2 \sin(\theta_1),$$

donde  $q$  se obtiene por medio de la relación  $\{q_i\} = S \{x_i\}$ , la matriz  $S$  es dada en (5.52), y el conjunto  $x_i$  está definido como

$$x_1 = z_1 = (1 + \kappa_1) \theta_1 + \theta_2, \quad x_2 = p_1 = \dot{x}_1, \quad x_3 = z_2 = \theta_1, \quad x_4 = p_2 = \dot{\theta}_1.$$

Suponiendo que los parámetros de control  $\{\alpha, \beta, \gamma, k\}$  se han seleccionado de acuerdo con el lema 5.3.3. Entonces, se obtiene que el sistema en lazo cerrado es globalmente asintótico y exponencialmente estable localmente, siempre que  $\bar{K} < 1/4$  donde la estimación de  $\bar{K}$  se define en (5.74).

**Comentario 5.3.5** Podemos mencionar que el torque  $\tau$  es parcialmente acotado. Debido a que el controlador propuesto incluye las velocidades angulares del sistema como se puede observar en (5.47) y la proposición 5.3.4.

### 5.3.3. Simulación Computacional

Para ilustrar el desempeño de la ley de control obtenida realizamos dos simulaciones usando el programa de MATLAB<sup>TM</sup>. Los parámetros físicos del sistema se seleccionan como  $m_1 = 0,01[\text{kg}]$ ,  $m_2 = 0,1[\text{kg}]$ ,  $l_1 = 0,5[\text{m}]$ ,  $l_2 = 0,35[\text{m}]$ ,  $I_1 = 3,5 \times 10^{-3}[\text{kgm}^2]$  y  $I_2 = 1,4 \times 10^{-2}[\text{kgm}^2]$ . Sin embargo, en el primer experimento el término correspondiente al amortiguamiento lineal fue escogido como  $\delta_1 = 0,5$ , mientras en el segundo se le dio el valor de  $\delta_1 = 0,05$ .

En el primer experimento, transferimos el sistema de la posición de equilibrio inferior estable a la posición invertida inestable. Esto significa que las condiciones iniciales se proponen de la siguiente manera:  $\theta_1(0) = \pi[\text{rad}]$ ,  $\theta_2(0) = 0[\text{rad}]$ ,  $\dot{\theta}_1(0) = 0[\text{rad/s}]$  y  $\dot{\theta}_2(0) = 0[\text{rad/s}]$ . Además, los parámetros estructurales definidos en (5.47) toman los siguientes valores  $\kappa_1 = 0,80357$ ,  $\kappa_2 = 36,75$  y  $\delta = 35,71$ . Los parámetros de controlador se han diseñado de acuerdo al lema 5.3.3 y la proposición 5.3.4, seleccionándolos como  $\alpha = 0,23$ ,  $\beta = 0,1171$ ,  $\gamma = 0,05195$  y  $\mu_k = 0,33$ .

En la figura 5.6 se muestra la respuesta en lazo cerrado del sistema y se puede observar que el estado  $\theta_1$  converge a cero más rápido que el estado  $\theta_2$ . Esto significa que, mientras la posición angular de la rueda decrece, la posición angular del péndulo se mueve hacia una vecindad del origen. Y, ya que el péndulo está muy cerca del origen, la acción de control regula la dinámica de la rueda.



En otras palabras, primero la acción de control lleva al péndulo a una vecindad de cero, mientras la posición angular de la rueda decrece hasta alcanzar su valor mínimo para posteriormente llevar de manera lenta la posición de la rueda al origen. Cabe notar que la maniobra de control descrita no podría realizarse si se usaran métodos basados en energía, debido a que la posición inferior está fuera del dominio de estabilidad de este tipo de estrategias [59, 159].

En el segundo experimento se toman las mismas condiciones iniciales, así como los parámetros físicos y del controlador propuestos en el experimento anterior, excepto los valores para  $\delta$  y  $\mu_k$ , los cuales se han modificado para tomar los valores de  $\delta = 3,5$  y  $\mu_k = 0,4$ . En la figura 5.7 se presenta la respuesta en lazo cerrado de todos los estados y se puede ver que  $\theta_1$  y  $\dot{\theta}_1$  tienen un comportamiento similar al primer experimento pero con la característica que tardan menos tiempo en alcanzar el cero. Sin embargo, los valores numéricos de  $\theta_2$  y  $\dot{\theta}_2$  son más pequeños que en el primer experimento, esto se debe a que la compensación para el amortiguamiento lineal es directamente proporcional al número de vueltas de la rueda, así como a su velocidad angular. Es decir, si el efecto indeseable del amortiguamiento se incrementa, la acción de control de la rueda tiene que ser más fuerte para poder realizar la maniobra de control. Obviamente, si el efecto es más pequeño, se requiere una acción con menor fuerza.

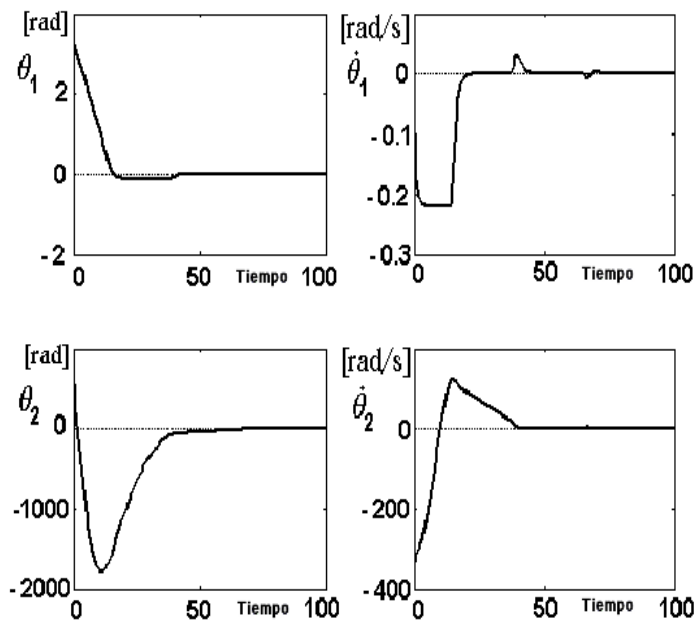


Figura 5.6 Respuesta del sistema en lazo cerrado cuando  $\delta = 35,71$ .

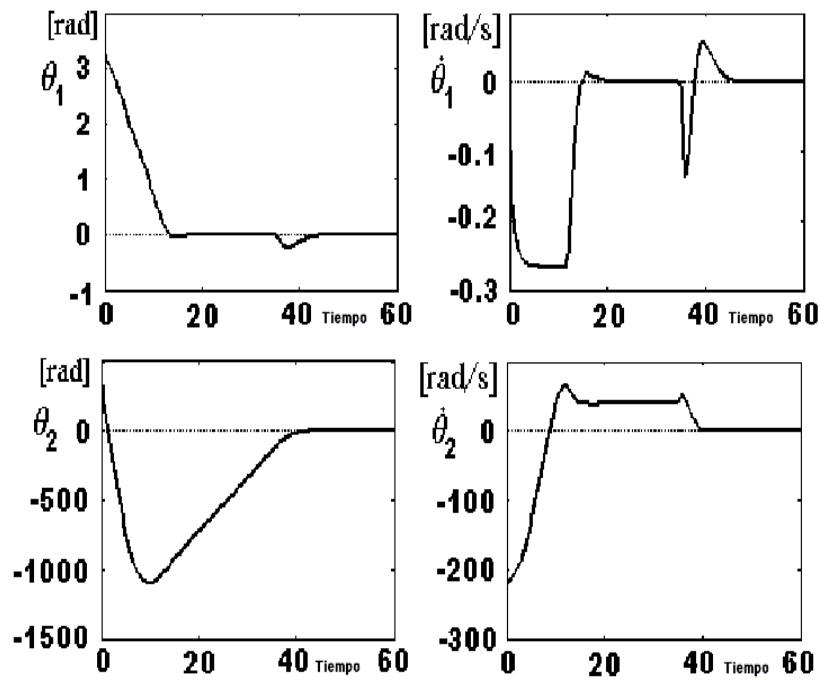


Figura 5.7 Respuesta en del sistema en lazo cerrado para  $\delta = 3,5$ .

# Capítulo 6

## Estabilización del Péndulo Esférico Invertido mediante el método de Lyapunov

### 6.1. Introducción

En las últimas décadas, el sistema Péndulo Esférico Invertido (**PEI**) ha atraído la atención de los investigadores. Su interés se debe a que el sistema permite probar diversas estrategias de control. Además de ilustrar una versión académica simplificada del propulsor de un cohete [19, 70, 71, 175]. En lo que se refiere al control de este sistema existen en la literatura muchos trabajos dedicados a este tópico [10, 15, 19, 173, 122, 121].

La principal contribución de este capítulo es desarrollar una ley de control para resolver el problema de estabilización del **PEI**. La estrategia de control está basada en el método de Lyapunov combinado con el Teorema de LaSalle. Con la cual se obtiene un estabilidad local y asintótica para el sistema en lazo cerrado con un dominio de atracción muy grande.

El resto del capítulo se organizará del siguiente modo: En la sección 6.2 se presenta el modelo normalizado parcialmente linealizado del sistema. La sección 6.3 está dedicada a construir la función de Lyapunov que permitirá obtener el controlador. Además de mostrar el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. Por último, en la sección 6.4 se muestran algunas simulaciones numéricas. Los resultados del capítulo dieron lugar a una publicación [84].

## 6.2. Modelo del Péndulo Esférico Invertido

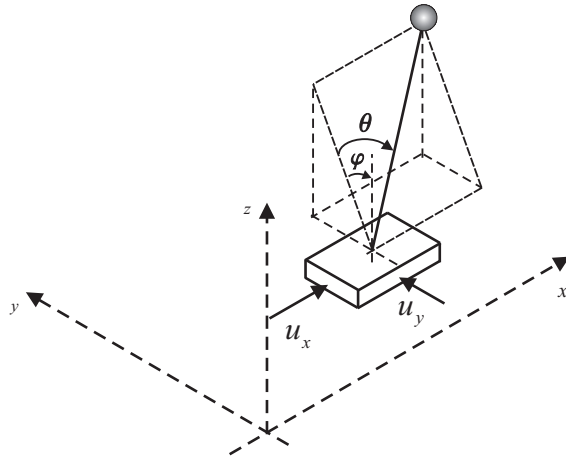


Figura 6.1 Sistema Péndulo Esférico Invertido.

El sistema Péndulo Esférico Invertido (Figura 6.1) se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales normalizadas [152].<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= u_x, \\
 \ddot{y} &= u_y, \\
 \ddot{\theta} &= S_\theta C_\varphi - S_\theta C_\theta \dot{\varphi}^2 - C_\theta u_x + S_\theta S_\varphi u_y, \\
 \ddot{\varphi} &= \frac{1}{C_\theta^2} \left( C_\theta S_\varphi + 2S_\theta C_\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} - C_\theta C_\varphi u_y \right),
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

<sup>1</sup>La obtención del modelo por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange se puede encontrar en el apéndice A.3.

donde  $x$  e  $y$  son los desplazamientos normalizados del centro de masa de la base móvil en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente.<sup>2</sup> Los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  denotan las rotaciones alrededor del eje- $y$  y del eje- $x$ . Los símbolos  $S_x$  y  $C_x$  representan al  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ . Las entradas  $u_x$  y  $u_y$  son las aceleraciones de la base en cada una de las direcciones. Entonces, podemos escribir el sistema anterior de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}) + g(\mathbf{q})\mathbf{u}, \quad (6.2)$$

con  $\mathbf{q} = (x, y, \theta, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})^T$  y  $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T$ . Cabe notar que el sistema está bien definido para todo  $\theta \in I_s = (-\pi/2, \pi/2)$ .

**Problema 6.2.1** *El objetivo primordial de la estrategia de control es llevar el sistema al punto de equilibrio inestable  $\mathbf{q} = 0$ , suponiendo que el péndulo está inicialmente encima del plano horizontal, es decir  $|\theta(0)| < \pi/2$  y  $|\varphi(0)| < \pi/2$ .*

## 6.3. Estrategia de control

En ésta sección buscamos una función definida positiva localmente (o función de Lyapunov)  $V$ , con la condición de que su derivada con respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria (6.2) sea semi-definida negativa para un dominio de atracción muy grande. En otras palabras, obtendremos un control estabilizador  $\mathbf{u}$  para que el punto de equilibrio inestable  $\mathbf{q} = 0$  sea asintóticamente estable de manera local suponiendo que las posiciones angulares del péndulo están sobre el plano  $xy$ .

### 6.3.1. Cómo proponer una función de Lyapunov

Inspirados en el trabajo presentado por C. Aguilar et. al. [6], se construirá una función definida positiva localmente  $V$ , tal que su derivada sea disipativa.

A continuación, definamos las siguientes variables auxiliares  $\xi$  y  $\mu$  como  $\xi = x + g_1(\theta)$  y  $\mu = y + g_2(\varphi, \theta)$ , donde las funciones  $g_1$  y  $g_2$  son suaves y se determinarán posteriormente.

<sup>2</sup>La base idealmente puede ser un punto.

Intuitivamente la idea de esta estrategia es hacer que los valores de  $\xi$  y  $\mu$  simultáneamente tomen el valor de cero. Para lograr esto, primero proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 + \frac{k_1}{2}\xi^2 + \frac{k_2}{2}\mu^2 + l\phi(\mathbf{q}), \quad (6.3)$$

donde  $\{k_1, k_2, l\}$  son constantes estrictamente positivas y la función  $\phi(\mathbf{q})$  se escogerá tal que:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\phi(\mathbf{q})g(\mathbf{q})\mathbf{u} = u_x\dot{\xi} + u_y\dot{\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\phi(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) = 0. \quad (6.4)$$

Por consiguiente, para solucionar las ecuaciones anteriores, proponemos a  $\phi$  tal que  $\partial\phi/\partial\dot{x} = \dot{x}$  y  $\partial\phi/\partial\dot{y} = \dot{y}$ . Y de la ecuación de la izquierda de (6.4), después de realizar algunas manipulaciones, se obtiene lo siguiente

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - C_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta}), \quad \dot{\mu} = (\dot{y} - C_\varphi C_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + S_\theta S_\varphi \frac{\partial\phi}{\partial\theta}). \quad (6.5)$$

Entonces, tomando en cuenta que  $\dot{\xi} = \dot{x} + g'_1(\theta)\dot{\theta}$  y  $\dot{\mu} = \dot{y} + \frac{\partial g_2}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial g_2}{\partial\varphi}\dot{\varphi}$ , y después de sustituir a  $\dot{\xi}$  y  $\dot{\mu}$  en (6.5), se obtienen la siguientes dos relaciones

$$\begin{aligned} g'_1(\theta)\dot{\theta} &= -C_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}g_2(\theta, \varphi)\dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}g_2(\theta, \varphi)\dot{\varphi} &= S_\theta S_\varphi \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - C_\varphi C_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

De las relaciones anteriores  $\phi$  se expresa como

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{h_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{h_2}{2}C_\theta^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + w(\theta, \varphi), \quad (6.7)$$

donde la función escalar  $w(\theta, \varphi)$ , y las constantes  $h_1$  y  $h_2$  se determinarán enseguida. Entonces, sustituyendo a  $\phi$  dada en (6.7), en la ecuación de la derecha de (6.4),

---

<sup>3</sup>Recuerde que  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}w(\mathbf{q}) = \left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial w}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial w}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial w}{\partial \dot{\theta}}, \frac{\partial w}{\partial \dot{\varphi}} \right)$ .

obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2 \dot{\theta} C_\theta S_\theta (-h_1 + h_2) &= 0, \\ \dot{\varphi} (h_2 C_\theta S_\varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi}) &= 0, \\ \dot{\theta} (h_1 S_\theta C_\varphi + \frac{\partial w}{\partial \theta}) &= 0.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Por lo tanto,  $h_1 = h_2 = h$  y  $w(\theta, \varphi) = h(C_\theta C_\varphi - 1)$ , donde  $h = -k_p$  y  $k_p > 0$ .

El siguiente lema proporciona las condiciones suficientes para garantizar que la función candidata de Lyapunov sea positiva.

**Lema 6.3.1** *Consideremos la función de Lyapunov  $V$  descrita en (6.3), donde  $\phi$  está dada por*

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{k_p}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{k_p}{2} C_\theta^2 \dot{\varphi}^2 + k_p (1 - C_\theta C_\varphi).\tag{6.9}$$

Y supongamos que

$$-1 - l + k_p > 0\tag{6.10}$$

Por lo tanto,  $V$  es definida positiva localmente para todo  $\theta \in (-\alpha, \alpha) = I_\alpha$  y  $\varphi \in I_\alpha$ , donde  $\alpha$  está dada por

$$\alpha = \max\{\gamma\} = \{0 < \gamma < \pi/2 : (-1 - l + k_p C_\gamma^4) \geq 0\}.\tag{6.11}$$

(La prueba de este lema se puede encontrar en apéndice C.3).

Finalmente, las variables auxiliares se proponen como:

$$\xi = x + k_p S_\theta \quad \mu = y + k_p C_\theta S_\varphi.\tag{6.12}$$

### 6.3.2. Obtención de la ley de control

Basándonos en la función de Lyapunov  $V$  descrita en (6.3), calculamos su derivada con respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria del sistema (6.2).



Y usando (6.4) se obtiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}) = & \dot{\xi} \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) + \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) + (l, 0) \right) \mathbf{u} + k_1 \dot{\xi} \right) + \\ & \dot{\mu} \left( \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) + \left( \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) + (0, l) \right) \mathbf{u} + k_2 \dot{\mu} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Entonces, utilizando la relación (6.13), se propone la ley de control tal que se cumplan las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) + \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) + (l, 0) \right) \mathbf{u} + k_1 \dot{\xi} = -\dot{\xi}, \quad (6.14)$$

y

$$\frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) + \left( \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) + (0, l) \right) \mathbf{u} + k_2 \dot{\mu} = -\dot{\mu}, \quad (6.15)$$

con lo cual define a  $\dot{V}$  como:

$$\dot{V}(\mathbf{q}) = -\dot{\xi}^2 - \dot{\mu}^2. \quad (6.16)$$

**Comentario 6.3.2** De acuerdo con las condiciones del lema 6.3.1, se deduce que la matriz

$$N(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) + (l, 0) \\ \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) + (0, l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + l - k_p C_\theta^2 & k_p C_\theta S_\theta S_\varphi \\ k_p C_\theta S_\theta S_\varphi & 1 + l - k_p C_\varphi^2 - k_p S_\theta^2 S_\varphi^2 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

es invertible para todo  $\theta, \varphi \in I_\alpha$ , y su determinante es de la siguiente forma

$$\det(N(\theta, \varphi)) = (-1 - l + k_p)(-1 - l + k_p C_\theta^2 C_\varphi^2). \quad (6.18)$$

Evidentemente de la definición de  $\alpha$  (ver lema 6.3.1) se deduce que  $\det N(\theta, \varphi) > 0$ , para todo  $\theta, \varphi \in I_\alpha$ . Por lo tanto, el controlador propuesto en (6.14) y (6.15) no tiene singularidades cuando  $\theta, \varphi \in I_\alpha$ .

Consiguientemente, para garantizar que la función de Lyapunov  $V$  sea positiva y evitar las singularidades del controlador (ver relaciones (6.14) y (6.15)), es importante mantener a  $|\theta(t)| < \alpha$  y  $|\varphi(t)| < \alpha$ , para todo  $t > 0$ . Para conseguir esto es suficiente que las condiciones iniciales,  $\mathbf{q}_0 = (x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0)$  con  $\theta_0, \varphi_0 \in I_\alpha$ , pertenezcan a una vecindad del origen, tal que

$$V(\mathbf{q}_0) < V_s = lk_p S_\alpha^2 + \frac{k_1}{2}(k_p S_\alpha)^2 + \frac{k_2}{2}(k_p C_\alpha S_\alpha)^2. \quad (6.19)$$

lo anterior se deriva del hecho que la función  $V$  sea decreciente (6.16).

**Comentario 6.3.3** *La desigualdad anterior define una región de estabilidad para el sistema en lazo cerrado propuesto, ya que para todas las condiciones iniciales  $\mathbf{q}_0$ , tal que  $V(\mathbf{q}_0) < V_\alpha$ , con la restricción que  $|\theta_0| < \alpha$  y  $|\varphi_0| < \alpha$ . Lo anterior implica que  $V(\mathbf{q}) < V_\alpha$  con  $|\theta(t)| < \alpha$  y  $|\varphi(t)| < \alpha$ . Por lo tanto, podemos definir al conjunto compacto  $\Omega$  como sigue:*

$$\Omega = \{\mathbf{q} = (x, y, \theta, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) : V(\mathbf{q}) < V_\alpha\} \quad (6.20)$$

*Cabe mencionar que  $\Omega$  es un conjunto compacto con la propiedad que cualquier solución del sistema en lazo cerrado ((6.2), (6.14) y (6.15)) que inicia en  $\Omega$  permanecen en  $\Omega$ .*

### 6.3.3. Análisis de estabilidad

Partiendo del hecho que  $V(\mathbf{q})$  es definida positiva para todo  $\mathbf{q} \in \Omega$ , y que su derivada  $\dot{V}(\mathbf{q})$  es sólo semi-definida negativa, únicamente es posible asegurar estabilidad en el sentido de Lyapunov para cualquier condición inicial  $\mathbf{q}_0 \in \Omega$ .

Por lo tanto, aplicando el Teorema de LaSalle aseguraremos que el punto de equilibrio  $\mathbf{q} = 0$  sea asintóticamente estable. Entonces, definiendo al conjunto  $S$  como

$$S = \{\mathbf{q} \in \Omega : \dot{\xi}^2 + \dot{\mu}^2 = 0\} \quad (6.21)$$

y sea  $M$  el conjunto invariante más grande contenido en  $S$ . Por consiguiente, el Teorema de LaSalle garantizará que cada solución que inicia en  $\Omega$  se aproximará a  $M$  como  $t \rightarrow \infty$  [110].

Como primer aspecto, calcularemos al conjunto  $M$  en  $S$ . Consideremos que en el conjunto  $S$ , las variables  $\xi$  y  $\mu$  son constantes, y evidentemente,  $\ddot{\xi} = 0$  y  $\ddot{\mu} = 0$ . Además, de las ecuaciones (6.14) y (6.15), el vector  $\mathbf{u}$  se ha seleccionado, tal que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) + \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) \mathbf{u} + k_1 \xi + l u_x &= 0, \\ \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) + \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) \mathbf{u} + k_2 \mu + l u_y &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} (f(\mathbf{q}) + \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) \mathbf{u}) \\ \ddot{\mu} &= \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} (f(\mathbf{q}) + \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mathbf{q}} g(\mathbf{q}) \mathbf{u}), \end{aligned}$$

en la ecuación (6.22), obtenemos que  $k_1 \xi + l u_x = 0$  y  $k_2 \mu + l u_y = 0$ . Por tanto, si  $u_x = \bar{u}_x$  y  $u_y = \bar{u}_y$  son constantes en  $S$ , se tiene que  $\xi$  y  $\mu$  son constantes.<sup>4</sup> Ahora, supongamos que  $\bar{u}_x \neq 0$  y que  $\bar{u}_y \neq 0$ , entonces, de las dos primeras ecuaciones de (6.1) obtenemos que  $\ddot{x} = \bar{u}_x$  y que  $\ddot{y} = \bar{u}_y$ , y obviamente, las constantes  $\bar{u}_x$  y  $\bar{u}_y$  deben ser cero, bajo la suposición que las variables  $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$  están acotadas en el conjunto  $S$ .

De manera similar, es sencillo mostrar que en  $S$ ,  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{y} = 0$  es decir, las variables  $x$  e  $y$  son constantes en el conjunto  $S$ . Entonces, de la definición de  $\xi$  y  $\mu$  dada en (6.12) se tiene que  $\bar{x} + k_p \text{sen } \bar{\theta} = 0$  y que  $\mu = \bar{y} + k_p \text{sen } \bar{\varphi} = 0$ . Finalmente, si  $\bar{x} \neq 0$  y  $\bar{\theta} \neq 0$  significaría que el péndulo puede mantenerse en un ángulo  $\bar{\theta}$  y en un desplazamiento  $\bar{x}$  (en dirección- $x$ ), sin aplicar un acción de control. Esto es imposible por que se necesita una acción de control para mantener el ángulo fijo en  $\bar{\theta}$ .<sup>5</sup> Por consiguiente, los valores posibles para  $x$  y  $\theta$  son  $x = 0$  y  $\theta = 0$  en el conjunto  $S$ . Además, de forma similar se puede mostrar que  $y$  y  $\varphi$  tienen que ser cero en  $S$ .

Por consiguiente, del Teorema de LaSalle garantizamos que todas la soluciones en lazo cerrado que inician en  $\Omega$  convergen asintóticamente hacia el conjunto invariante más

<sup>4</sup> $\bar{z}$  denota que  $z$  es una constante en el conjunto  $S$ .

<sup>5</sup>Recuerde que  $\bar{u}_x = 0$  y  $\bar{u}_y = 0$  en  $S$ .

grande  $M$  contenido en  $S$ , que está constituido por el punto de equilibrio inestable.  $\mathbf{q} = 0$ .

De la discusión anterior, se obtiene la siguiente proposición:

**Proposición 6.3.4** *Considere el sistema del péndulo esférico parcialmente linealizado (6.2) en lazo cerrado con el controlador (6.14) y (6.15), donde  $l$ ,  $k_1, k_2$  y  $k_p$  son constantes estrictamente positivas. Suponga que las condiciones iniciales pertenecen (o inician) en el conjunto compacto  $\Omega$  definido en (6.20). Entonces, podemos decir que el origen del sistema en lazo cerrado es local y asintóticamente estable con un dominio de atracción definido por la desigualdad (6.19).*

## 6.4. Simulaciones numéricas

Para probar el desempeño del controlador propuesto se han realizado algunas simulaciones computacionales usando MATLAB<sup>TM</sup>.

En la simulación aplicamos el controlador (6.14) y (6.15) al sistema (6.2) con los siguientes parámetros:

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 1,5 \quad k_p = 5 \quad l = 1 .$$

Además, las condiciones iniciales se han seleccionado como cero, excepto los ángulos definidos como  $\theta_0 = 0,5[\text{rad}]$  y  $\varphi_0 = -0,5[\text{rad}]$ . La figura 6.2 muestra la respuesta en lazo cerrado de los ángulos y sus derivadas. De igual forma, en la figura 6.3 se puede observar el comportamiento en lazo cerrado de las posiciones y sus respectivas velocidades.

Como podemos ver, la ley de control encierra al péndulo en el origen por medio de movimientos suaves, mientras que la base inicia su movimiento de tal forma que las oscilaciones tiene amplitudes grandes pero con movimiento suaves. Y, en ambos casos se reducen gradualmente sus amplitudes.

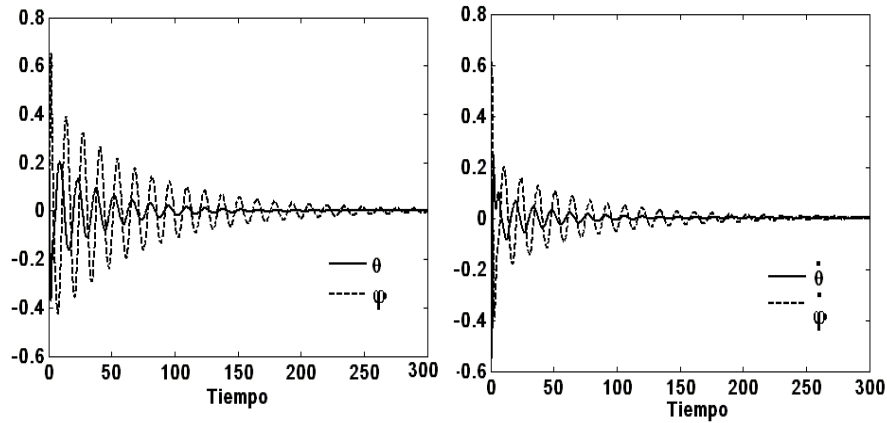


Figura 6.2 Respuesta en lazo cerrado de las variables angulares del sistema.

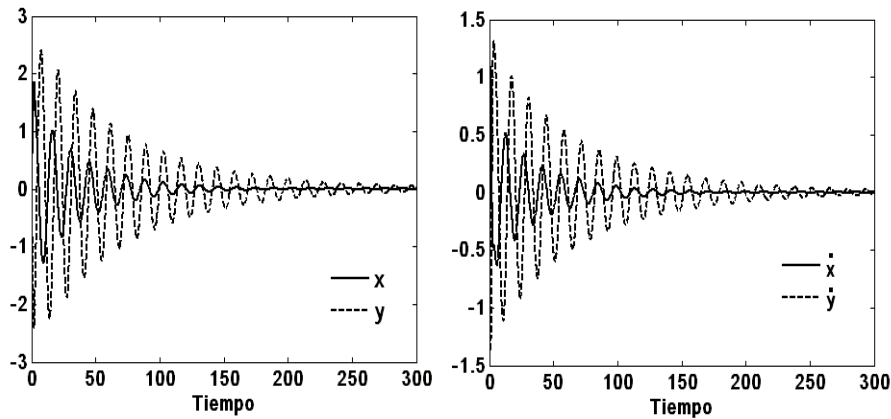


Figura 6.3 Respuesta en lazo cerrado de las posiciones y velocidades del sistema.

Intuitivamente, podemos decir que la energía total del péndulo es transferida a la base móvil por medio de movimientos largos de dicha base. Para que, finalmente, la energía total sea disipada lentamente por el controlador.

# Capítulo 7

## Control del comportamiento oscilatorio de un sistema mecánico no lineal: Caso Péndulo Invertido con Masa Móvil

### 7.1. Introducción

Los sistemas mecánicos que vibran constituyen una importante clase de sistemas dinámicos: edificios, puentes, suspensiones de coche, marcapasos, generadores de viento y altavoces son algunos ejemplos comunes de este tipo de sistemas.

En términos físicos todos los sistemas que vibran tiene un componente que almacena energía y otro que la transforma. Por lo tanto, el comportamiento de estos puede ser descrito en término de cambios energéticos, es decir, el movimiento del sistema resulta de la conversión de energía. Por razones teóricas y tecnológicas el control de este tipo de sistemas ha resultado un campo de investigación importante, debido a que ha proporcionado diversas soluciones a problemas que involucran comportamientos oscilatorios, como por ejemplo el control de vibraciones se ha aplicado para atenuar las oscilaciones no deseadas en edificios producidas por fuerzas externas; tales como fuertes vientos o terremotos [13, 55, 95, 137, 176], así como en suspensiones de autos

para mejorar el manejo en caminos complicados. Por consiguiente, este capítulo se enfoca en el control activo de un sistema mecánico vibratorio no lineal subactuado y subamortiguado utilizando el enfoque de Lyapunov [5, 6, 13, 59], es decir, el control del comportamiento vibratorio se aborda por medio de un moldeo del flujo de energía, el cual caracteriza al sistema en términos dinámicos.

Entonces, el objetivo principal de este capítulo es proponer un controlador estabilizador asintótico para la vibración activa amortiguada en un sistema mecánico no lineal subactuado sin fricción, *el cual estará restringido a moverse dentro de un conjunto admisible predefinido.*

Este sistema consiste en un péndulo físico invertido que rota alrededor de un pivote localizado en la parte inferior del péndulo. Además, cuenta con una masa que se mueve a lo largo del brazo del péndulo y para mantener la estructura en la posición estable superior se incluye un resorte torsional.

La estrategia de estabilización consiste en amortiguar el movimiento péndulo ejerciendo una fuerza sobre la masa radialmente móvil.

El resto del capítulo se organiza como sigue. En la sección 7.2, se presenta el modelo matemático no-lineal del sistema obtenido por medio de las expresiones de Euler-Lagrange.

El controlador lineal Proporcional Derivativo (**PD**) se expone en la sección 7.3. Finalmente en la sección 7.4 se muestran las simulaciones del comportamiento del sistema en lazo cerrado. Los resultados expuestos en este capítulo dieron lugar a una publicación [4] y pretenden mostrar un ejemplo sencillo de la importancia que tiene el estudio del Sistema Péndulo Invertido.

## 7.2. Ecuación de movimiento

El sistema dinámico consiste en un péndulo físico de masa  $M$ , que gira sobre el pivote  $O$ . Además, cuenta con una masa auxiliar  $m$  que se desliza a lo largo del péndulo. Por otra parte, para mantener la estructura en la posición estable superior,

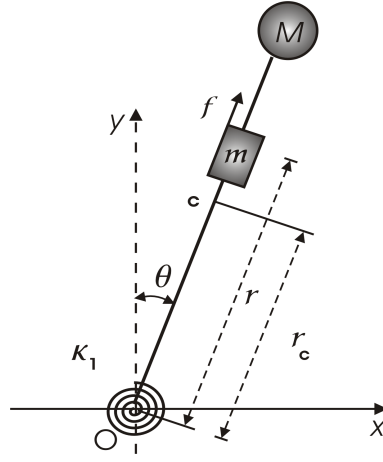


Figura 7.1 Péndulo Invertido con Masa Radialmente Móvil .

un resorte torsional con constante  $\kappa_1$ <sup>1</sup> produce un momento de restablecimiento, como se puede ver en la figura 7.1. El momento de inercia del péndulo se define como  $I_0$  y el centro de masa  $C$  está localizado a una distancia  $r_c$  del pivote. La masa  $m$  se mueve debido a la aplicación de una fuerza  $f$  paralela a  $OC$ . Es decir,  $f$  es la entrada de control que actúa sobre la masa  $m$ .

Para describir el movimiento del péndulo el origen del marco inercial es escogido en el punto  $O$ . Los ejes  $x$  e  $y$  corresponden a las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. Y el vector  $q = [r, \theta]^T$  describe las coordenadas generalizadas, donde:  $r$  es el desplazamiento de la masa  $m$  medido desde el punto  $O$  y  $\theta$  denota el ángulo formado por el eje  $y$  y el eje  $\overline{OC}$ .

Entonces, la energía cinética y potencial del sistema son definidas como:

$$K_c = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (7.1)$$

y

$$K_p = Mgr_c(\cos \theta - 1) + mgr \cos \theta + \frac{\kappa_1}{2}\theta^2 \quad (7.2)$$

<sup>1</sup>Se supone que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov (pero no asintóticamente estable).



Por lo tanto, el Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  tiene la forma

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K_c - K_p$$

Consiguientemente, las expresiones obtenidas de la ecuaciones de Euler-Lagrange son:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta &= f \\ (mr^2 + I_0)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - g(Mr_c + mr) \sin \theta + \kappa_1\theta &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

siendo  $F = [f, 0]^T$  vector de fuerzas externas.

Entonces, definiendo la fuerza  $f$  como

$$f = mg + v \quad (7.4)$$

donde,  $v$  es una nueva variable de control y  $mg$  es un término que compensa la fuerza de gravedad. Sustituyendo (7.4) en (7.3) podemos expresar las ecuaciones diferenciales anteriores como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla_q K_i(q) = Gv \quad (7.5)$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 + I_0 \end{bmatrix} \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -mr\dot{\theta} \\ mr\dot{\theta} & mrr\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$K_i(q) := -\kappa_3(1 - \cos \theta) - \kappa_2r(1 - \cos \theta) + \frac{\kappa_1}{2}\theta^2$$

con  $\kappa_2 = mg$  y  $\kappa_3 = Mgr_c$ .

Cabe destacar que el sistema (7.5) satisface las siguientes propiedades:

**P1:**  $M(q)$  es una matriz definida positiva.

**P2:** La matriz  $H = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es una matriz antisimétrica con:

---

<sup>2</sup>Es decir,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot{q}) = F$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -mr\dot{\theta} \\ mr\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

**P3:** El operador  $v \rightarrow \dot{r}$  es pasivo.

Las propiedades **P1** y **P2** son compartidas por cualquier sistema Euler-Lagrange. Además, para probar la propiedad **P3** definimos la siguiente función de almacenamiento.

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + K_i(q) \quad (7.6)$$

Calculando la derivada con respecto al tiempo de (7.6) y usando las propiedades **P1** y **P2**.

$$\dot{E} = v\dot{r}$$

De acuerdo a los resultados anteriores ([110], pp 236) el operador  $v \rightarrow \dot{r}$  es pasivo.

**Comentario 7.2.1** *Note que, si  $v = 0$ ,  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$  y  $r > 0$  entonces, el sistema (7.5) tiene un conjunto de puntos de equilibrio definidos por  $(r = \bar{r}, \theta = 0, \dot{r} = 0, \dot{\theta} = 0)$ .*

*Donde  $\bar{r}$  es una constante positiva, es importante mencionar que estos puntos son estables en el sentido de Lyapunov, pero no asintóticamente estables.*

*Para desarrollos posteriores, los símbolos  $x$  y  $\bar{x}$  se definen como*

$$x = (q, \dot{q})^T = (r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})^T, \quad \bar{x}^T = (\bar{q}, 0)^T = (\bar{r}, 0, 0, 0)^T$$

*con  $r > 0$ , y además  $z_0$  indica a  $z(0)$*

### 7.3. Control lineal PD

El sistema anterior es subactuado y pobremente amortiguado debido a que tiene una sola entrada de control y dos grados de libertad, además de no tener una fuerza disipativa en la coordenada no actuada  $\theta$ . Por tanto este sistema es muy sensible a las

perturbaciones externas. Entonces, para atenuar los efectos indeseables de dichas perturbaciones se propone un controlador que haga al sistema en lazo cerrado asintóticamente estable alrededor del origen  $\bar{x}$ .

Antes de establecer el objetivo de control es necesario introducir la siguiente suposición:

**A1:** Los parámetros del sistema original deben satisfacer la siguiente relación

$$\kappa_1 > \kappa_3 + \kappa_2(\bar{r} + \varepsilon) \quad (7.7)$$

**Comentario 7.3.1** *La desigualdad (7.7) significa que la fuerza del resorte es mayor que la fuerza debido a la gravedad de todo el sistema para cualquier posición de  $m$ . Es decir, **A1** es una condición estructural que está relacionada con la rigidez interna del sistema.*

El problema de control se define como sigue:

**Problema 7.3.2** *Encontrar un controlador  $v$  que forzará al sistema (7.5) a comportarse asintóticamente estable alrededor del punto de equilibrio  $\bar{x}$ , restringiéndolo a moverse dentro del conjunto  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , definido como:*

$$Q = \{q = (r > 0, \theta) : |r - \bar{r}| < \varepsilon \text{ y } |\theta| < \bar{\theta}\} \quad (7.8)$$

donde  $\varepsilon$ ,  $\bar{\theta}$  y  $\bar{r}$  son constantes positivas; con  $\bar{\theta} < \pi/2$ .

**Comentario 7.3.3** *Debemos destacar que las restricciones físicas incluidas en la formulación del problema son necesarias para garantizar que el péndulo invertido sólo pueda moverse en el plano superior, mientras que la masa  $m$  se mantiene en el brazo del péndulo. Esto significa que la masa auxiliar  $m$  se mueve a lo largo del péndulo y la posición angular está restringida a moverse dentro del intervalo  $(-\bar{\theta}, \bar{\theta})$ .*

*En otras palabras, pedimos que al mismo tiempo la masa  $m$  se mueve a largo del péndulo y el ángulo se confine en una vecindad cerca de la posición invertida.*

Enseguida resolveremos el problema propuesto.

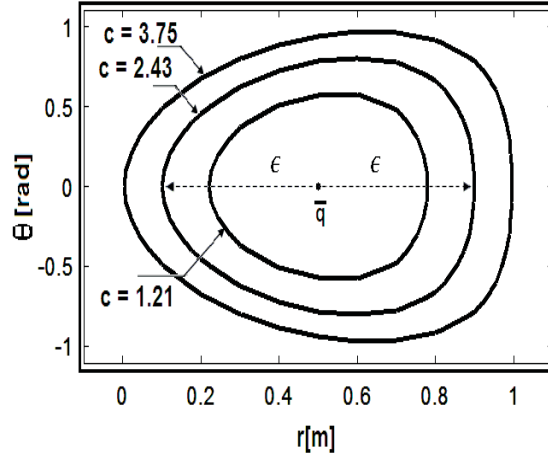


Figura 7.2 Curvas de nivel alrededor del origen.

### 7.3.1. Control basado en energía

Consideremos la siguiente función candidata a Lyapunov:

$$E_T(x) = E_T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + K_m(q) \quad (7.9)$$

donde  $K_m$  es la energía potencial modificada definida como:

$$K_m(q) = K_i(q) + \frac{k_p}{2} (r - \bar{r})^2 \quad (7.10)$$

con  $k_p > 0$ .

**Comentario 7.3.4** De acuerdo con la suposición **A1**, la energía potencial modificada  $K_m$  tiene un mínimo local en  $\bar{q} = (\bar{r}, 0)$ . Esto se debe a lo siguiente:

$$K_m(\bar{q}) = 0, \quad \nabla_q K_m(\bar{q}) = 0, \quad \nabla^2_q K_m(\bar{q}) > 0 \quad (7.11)$$

Lo anterior implica que  $K_m$  es una función convexa alrededor de  $\bar{q}$ . En términos geométricos las curvas de nivel de  $K_m$  constituyen el conjunto de curvas en lazo cerrado alrededor de  $\bar{q}$  (Figura 7.2). Esta propiedad permite definir el conjunto invariante compacto que será usado para el análisis de convergencia.

Tomando en cuenta las propiedades de pasividad del sistema (7.5), la primera derivada de  $E_T$  a lo largo la trayectoria del sistema esta dada por

$$\dot{E}_T(q, \dot{q}) = v\dot{r} + k_p(r - \bar{r})\dot{r} \quad (7.12)$$

Y, debido a que se necesita que la derivada sea definida negativa, la entrada de control  $v$  se propone como una ley de control proporcional derivativa

$$v = -k_p(r - \bar{r}) - k_d\dot{r} \quad (7.13)$$

con  $k_p > 0$  y  $k_d > 0$ . Por lo tanto, sustituyendo (7.13) en (7.12) se obtiene

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = -k_d\dot{r}^2 \quad (7.14)$$

Entonces del hecho, que  $E_T$  es definida positiva y  $\dot{E}_T$  es semi-definida negativa podemos establecer la estabilidad del punto de equilibrio  $\bar{x}$  en el sentido de Lyapunov. Es decir,  $q$  y  $\dot{q}$  están acotados.

Para asegurar que la solución en lazo cerrado converja asintóticamente al origen  $\bar{x}$ , utilizaremos el Teorema de LaSalle [110]. Pero antes de aplicarlo introducimos el siguiente lema que permitirá seleccionar adecuadamente a la constante  $k_p$  que propiciará que todas las soluciones del sistema en lazo cerrado se mantengan dentro del conjunto  $Q$ .

**Lema 7.3.5** *Considere el sistema en lazo cerrado formado por las ecuaciones (7.5) y (7.13).*

*De acuerdo con la suposición **A1** y la restricción del parámetro  $k_p$  definida como:*

$$\frac{\kappa_2}{k_p}(1 - \cos \bar{\theta}) < \varepsilon \quad (7.15)$$

*y si las condiciones iniciales  $x_0 = (q_0, \dot{q}_0)$ ; con  $q_0 \in Q$  satisfacen*

$$E_T(x_0) \leq \bar{E} \quad (7.16)$$

donde la cota  $\bar{E}$  se define como

$$\bar{E} \triangleq \max\{c > 0 : K_m(q) = c, \text{ con } q \in Q\} \quad (7.17)$$

y puede estimarse a partir de solucionar la igualdad

$$\bar{E} = K_m \left( \bar{r} + \frac{\varepsilon}{\lambda}, \bar{\theta} \right) = \lambda \varepsilon \kappa_2 (1 - \cos \bar{\theta}). \quad (7.18)$$

donde  $\lambda > 1$ .

Entonces, podemos garantizar que:

$$E_T(q(t), \dot{q}(t)) \leq E_T(x_0) \leq \bar{E} \quad (7.19)$$

con  $q(t) \in Q$ ; para  $t \geq 0$  (La demostración de este lema se puede ver en el apéndice C.4).

Enseguida describiremos la aplicación del Teorema de LaSalle.

Como primer paso, definamos el conjunto compacto  $\Omega$

$$\Omega = \{x = (q, \dot{q}) : E_T(x) < \bar{E}\} \quad (7.20)$$

donde  $\bar{E} > 0$  escogido de acuerdo al lema 7.3.5.

**Comentario 7.3.6** *El conjunto  $\Omega$  tiene la propiedad que todas las soluciones del sistema en lazo cerrado que inicia en  $\Omega$  permanece en  $\Omega$  por todo el tiempo.*

*En particular, todas las condiciones iniciales  $x_0 = (q_0, \dot{q}_0)$  tal que  $E_T(x_0) < \bar{E}$ , con  $q_0 \in Q$ . Esto implica que  $q(t) \in Q$  para todo el tiempo.*

Entonces, definiendo a  $\Gamma$  como

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega : \dot{E}_T(x) = 0 \right\} = \{x \in \Omega : \dot{r} = 0\} \quad (7.21)$$

Y sea  $\underline{M}$  el conjunto invariante más grande en  $\Gamma$ . Por tanto, el Teorema de LaSalle garantiza que todas las soluciones que comienzan en el conjunto compacto  $\Omega$  tienden

a  $\underline{M}$  como  $t \rightarrow \infty$  [110]. Enseguida, calcularemos el conjunto  $\underline{M}$ . Del conjunto  $\Gamma$  se tiene que  $\ddot{r} = 0$  y  $r = \underline{r}$ ,<sup>3</sup> donde  $\underline{r}$  es una constante, tal que  $|\bar{r} - \underline{r}| < \varepsilon$ . Ahora suponga que en  $\Gamma$ ,  $r \neq \underline{r}$ . Entonces, de la definición de  $v$  (7.13); tenemos que  $v = -k_p(\underline{r} - \bar{r}) \neq 0$ , siendo esto una contradicción, por que existiría una fuerza constante que eventualmente producirá un desplazamiento de la masa  $m$  y el estado  $r$  no sería acotado (observar la primera ecuación de (7.5)).

Ahora, si suponemos el caso que en  $\Gamma$ ,  $r = \bar{r}$ , el sistema (7.5) toma la forma:

$$-m\bar{r}\dot{\theta}^2 + \kappa_2(\cos \theta - 1) = 0 \quad (7.22)$$

y

$$(m\bar{r}^2)\ddot{\theta} - (\kappa_3 + \kappa_2\bar{r})\sin \theta + \kappa_1\theta = 0 \quad (7.23)$$

De las ecuaciones anteriores podemos decir que la trayectoria que satisface a (7.22), se obtienen cuando  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  son iguales a cero en el conjunto  $\Gamma$ , siendo  $|\theta| < \bar{\theta} < \pi/2$ ,  $\kappa_2 > 0$  y  $\bar{r} > 0$ . Por lo tanto, se concluye que el conjunto invariante más grande contenido en  $\Gamma \subset \Omega$ , es decir,  $\underline{M}$  está constituido por el punto de equilibrio  $\bar{x} = (r = \bar{r}, \theta = 0, \dot{r} = 0, \dot{\theta} = 0)$ . Y de acuerdo con el Teorema de LaSalle todas las trayectorias que comienzan en  $\Omega$  convergen asintóticamente al conjunto  $\underline{M}$  definido por el punto  $\bar{x}$ .

Esta sección finaliza con la siguiente proposición:

**Proposición 7.3.7** *De acuerdo con la suposiciones del lema 7.3.5, del sistema (7.3) en lazo cerrado, con*

$$F = mg - k_p(r - \bar{r}) - k_d\dot{r}$$

*se obtiene que el origen del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable de manera local con un dominio de atracción definido por la desigualdad (7.19).*

*Además, la solución del sistema en lazo cerrado está restringida a moverse dentro del conjunto  $Q$ .*

---

<sup>3</sup>Por simplicidad, usamos el símbolo  $\underline{x}$  para denotar que  $\frac{d}{dt}\underline{x} = 0$ .

**Comentario 7.3.8** *Es fácil comprobar que si la suposición **A1** no se cumple del todo, podemos asegurar estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, no se puede asegurar que  $x(t)$  pertenezca a  $Q$ ,  $\forall t > 0$ . Por otra parte, si los parámetros físicos no cumplen a **A1** tendríamos tres puntos de equilibrio y sólo se podría asegurar estabilidad en el sentido de Lyapunov.*

Para ilustrar el desempeño de la ley de control propuesto, en la siguiente sección realizamos algunas simulaciones computacionales.

## 7.4. Resultados de simulación

### 7.4.1. Parámetros de simulación

Para llevar a cabo la simulaciones del sistema en lazo cerrado los parámetros del sistema se definen como sigue:

$$\begin{aligned} m &= 1[kg] & M &= 4[kg] & I_0 &= 0,5[kgm^2] & r_c &= 0,5 \\ \bar{r} &= 0,5[m] & \varepsilon &= 0,4[m] & \bar{\theta} &= 0,8[rad] & \kappa_1 &= 31,25 \end{aligned}$$

En este caso  $\kappa_2 = 9,8$  y  $\kappa_3 = 19,6$ , satisfaciéndose las suposición **A1**.

El valor del parámetro  $k_p$  se ha escogido de tal manera que se cumpla la restricción (7.15), la cual produce:

$$7,43 < k_p$$

Tómese en cuenta que el conjunto admisible  $Q$  está dado por:

$$Q = \{q = (r > 0, \theta) : |r - 0,5| < 0,4 \text{ y } |\theta| < 0,8\}$$

Para asegurar que las condiciones iniciales se encuentren dentro del máximo dominio de atracción, los parámetros  $\lambda$  y  $k_p$  se escogen de acuerdo a las relaciones (7.18) y (C.19), respectivamente. Como  $\lambda = 4,1$  y  $k_p = 30,46$ . Por lo tanto, para mantener



el movimiento en lazo cerrado dentro del dominio de atracción se debe cumplir la condición  $E_T(q_0, \dot{q}_0) < \bar{E} \cong 2,43$  con  $q \in Q$ .

### 7.4.2. Comentarios sobre las simulaciones

Para simular el comportamiento del sistema no lineal se utilizó plataforma de MATLAB<sup>TM</sup> y se derivan los siguientes comentarios:

- En el primer experimento se escogieron las siguientes condiciones iniciales  $q_0 = (0,6[m], 0,8[rad])$  y  $\dot{q}_0 = 0$ , las cuales satisfacen a  $E_T(q_0, 0) = 2,36$  (*el vector  $q_0$  se seleccionó muy cerca de uno de los extremos en la dirección de  $\theta$  que pertenece a  $\partial Q$*  ).
- La figura 7.3 muestra el comportamiento transitorio de las posiciones y las velocidades del sistema. Como se puede observar las posiciones están dentro del conjunto  $Q$ , ya que el vector de condiciones iniciales pertenece al dominio de atracción del sistema en lazo cerrado.
- Para el segundo experimento, las condiciones iniciales que se eligieron son  $x_0 = (0,7[m], 0,6[rad], 0,2[rad/s])$  para la cual  $E_T = 3,75 > \bar{E}$ .
- En este caso en particular aunque la condición inicial pertenece a  $Q$ , la respuesta del sistema en lazo cerrado está fuera del conjunto  $Q$  debido a que  $E_T > \bar{E}$ .
- El comportamiento del sistema se muestra en la figura 7.4 y podemos observar que  $\theta \simeq 1[rad]$ , cuando  $t = 2[s]$  aproximadamente.

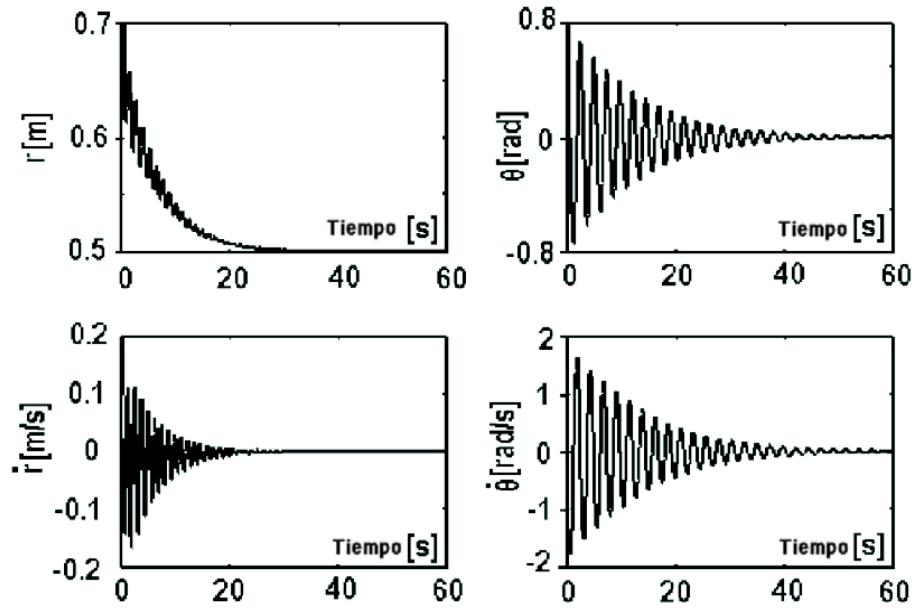


Figura 7.3 Simulación del sistema en lazo cerrado para la condición inicial  $q(0) = (0,6,0,8)$  y  $\dot{q}(0) = 0$ .

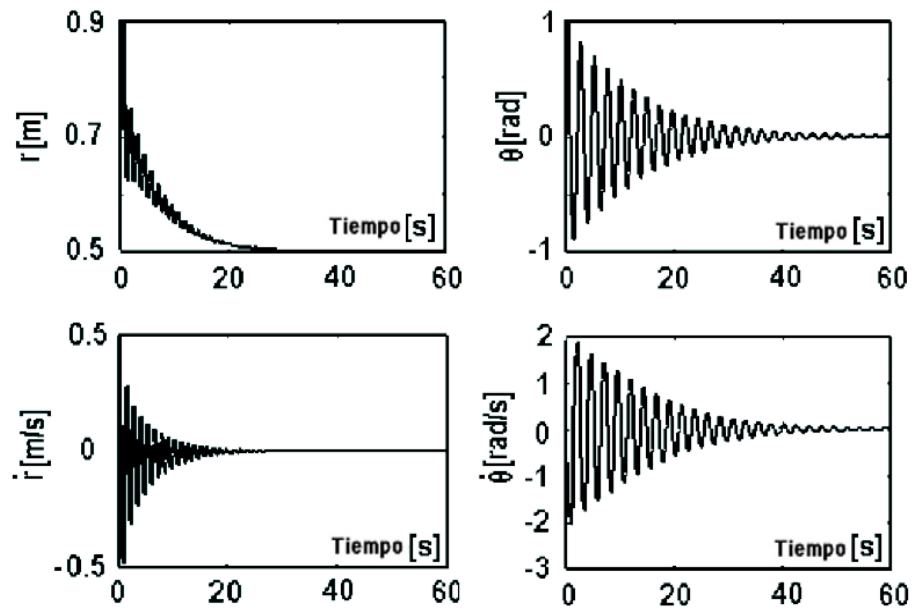


Figura 7.4 Simulación del sistema en lazo cerrado para la condición inicial  $x(0) = (0,7,0,6,0,2)$ .

# Capítulo 8

## Conclusiones

Llegado a este punto de la tesis se puede afirmar que, en función de los objetivos, el control de los Sistemas tipo Péndulo Invertido planteado y presentado en este documento es una alternativa más en el estudio de la Teoría de Control no lineal, ya que provee una serie de mecanismos y herramientas para realizar el control de una clase de sistemas subactuados, considerando que no sólo pueden ser aplicados a este tipo de sistemas.

Este capítulo se dedica a la exposición resumida de las aportaciones de esta tesis a modo de conclusión. Al final del capítulo se presenta una serie de trabajos futuros que continuarán con la investigación desarrollada en esta tesis.

Como primer aportación se presentó una estrategia de control para estabilizar el sistema Péndulo Invertido sobre un Carro alrededor del punto de equilibrio inestable, suponiendo que el péndulo está inicialmente por encima del plano horizontal.

Esta estrategia se basa en encontrar una linealización parcial por retroalimentación del sistema, para posteriormente aplicar un adecuado **ajuste de modelo**. La idea primordial del método es encontrar una ley de control que transforme el modelo parcialmente linealizado en un sistema denominado objetivo, el cual tiene ciertas propiedades de estabilidad. Para realizar lo anterior, fue necesario solucionar dos condiciones de ajuste (*matching conditions*), relacionadas con las energías potencial y cinética del sistema objetivo. Podemos mencionar que las condiciones de ajuste obtenidas son

solucionadas de manera sencilla comparadas con otras estrategias donde se utiliza este tipo de enfoque. Además, con esta propuesta se obtuvo un sistema en lazo cerrado asintóticamente y exponencialmente estable localmente alrededor del origen con un dominio de atracción grande. Para mostrar que el sistema es localmente estable asintóticamente se utilizó el Teorema de LaSalle y, para demostrar que el sistema es exponencialmente estable localmente se usó una linealización. Por consiguiente, el sistema en lazo cerrado es robusto con respecto a fuerzas externas pequeñas, como sería el efecto producido por un amortiguamiento en la coordenada no actuada.

Posteriormente, se desarrolló una técnica que permite solucionar el problema de estabilización de algunos sistemas subactuados utilizando un controlador basado en funciones de saturación anidadas, cuya característica más importante es proponer una ley de control sin que sea necesario tener un función de Lyapunov para todo el sistema. En este caso, hemos aplicado dicha estrategia para estabilizar los sistemas Péndulo Invertido sobre un Carro y Péndulo con Disco Inercial alrededor del punto de equilibrio inestable.

Físicamente, la estrategia de control propuesta en los dos sistemas consiste en dos etapas. La primera, es llevar al péndulo lo más cercano a la posición de equilibrio inestable para regular la posición del carro o del disco hasta que todos los estados se confinen en una vecindad de cero, provocando que el sistema en lazo cerrado se comporte como un sistema lineal exponencial con una perturbación no lineal pequeña pudiendo fácilmente aplicar el método de Lyapunov para garantizar que los estados converjan a cero.

Es importante comentar que en el caso del Péndulo con Disco Inercial, debido a que está fuertemente amortiguando, no es posible asegurar la estabilización del sistema, si se usaran estrategias como el moldeo de energía o aquellas basadas en pasividad [78, 156].

Otra aportación del trabajo presentada en el capítulo 6, es proponer una metodología muy simple pero efectiva para diseñar un controlador estabilizador para el **PEI**. Dicho controlador permite obtener un sistema en lazo cerrado asintóticamente estable

de forma local alrededor del punto de equilibrio inestable suponiendo que el péndulo se encuentra inicialmente por encima del plano horizontal. Esta ley de control tiene un dominio de atracción que puede ser calculado a partir del lema 6.3.1. Cabe destacar que la obtención del controlador se basó en la construcción de una función de Lyapunov, cuya derivada resultó ser disipativa con respecto a las variables auxiliares definidas en (6.12). El análisis de convergencia fue llevado a cabo mediante el Teorema de LaSalle y el desempeño de la estrategia de control se evaluó por medio simulaciones numéricas.

Además, en el capítulo 7 se ha obtenido la estabilización asintótica de un péndulo físico invertido con una masa radialmente móvil<sup>1</sup> por medio del método de Lyapunov. El movimiento del péndulo está restringido a moverse dentro de un conjunto denominado  $Q$  expresado en (7.8) que representa las restricciones físicas del sistema. La estrategia de control Proporcional Derivativo explota las propiedades físicas del sistema original que se utilizan para moldear la energía del sistema en lazo cerrado. Además, el análisis de estabilidad del sistema ha sido realizado por medio del Teorema de invariancia de LaSalle. Cabe mencionar que si se hubiera considerado una fuerza de amortiguamiento en la coordenada subactuada, la estabilidad asintótica del dispositivo se hubiera reforzado.

Por otra parte, es importante comentar que la aplicabilidad de la ley de control propuesta en dicho capítulo, es consecuencia de que el modelo no lineal del sistema representa una versión simplificada de la dinámica de edificios rígidos, restringidos a oscilar en el plano (excitaciones externas). Siendo un problema interesante la atenuación de los efectos provocados por perturbaciones desconocidas (fuerzas sísmicas o vientos) en las estructuras civiles por medio de un control activo. En nuestro modelo la masa móvil representa el elemento de control, y en lo que se refiere a su potencialidad, debe ser aclarada a través de la evaluación del consumo de energía de la ley de control.

---

<sup>1</sup>El péndulo está anclado al pivote por medio de un resorte torsional que mantiene el sistema en la posición vertical estable, como consecuencia, el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.

De lo expuesto anteriormente, podemos concluir que los métodos desarrollados en esta tesis son una forma de solucionar el problema de estabilización de los Sistemas tipo Péndulo Invertido en el punto del equilibrio inestable, que permite generar conocimiento científico, el cual es un objetivo importante en los propósitos del Instituto Politécnico Nacional.

## 8.1. Desarrollos futuros

Los problemas que se abordan en esta tesis abren las puertas a una serie de líneas de investigación futuras destinadas básicamente a extender el área de aplicación de los razonamientos teóricos aquí expuestos y refinar los resultados.

Algunos trabajos a realizar para continuar el desarrollo en esta línea de investigación son:

1. Diseñar y construir una plataforma experimental para el control y análisis del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro, con el fin de tener un dispositivo de pruebas para verificar los resultados de las estrategias obtenidas.
2. Implementar las estrategias de control propuestas en plataformas reales para verificar su funcionamiento.
3. Aplicar la estrategia de control presentada en el capítulo 4 para estabilizar al Sistema Péndulo Invertido sobre un plano inclinado por ser una versión más general que el sistema presentado en este trabajo.
4. Resolver la estabilización del Péndulo Esférico Invertido utilizando las técnicas propuestas en los capítulos 4 y 5.

# Apéndice A

## Modelos Dinámicos de Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido

En este apéndice se presenta la obtención del modelo dinámico de los Sistemas Subactuados tipo Péndulo Invertido estudiados en esta tesis utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

### A.1. Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro

#### A.1.1. Ecuaciones de movimiento

En esta sección presentamos las ecuaciones de movimiento del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro (**PIC**), derivadas de las ecuaciones de Euler-lagrange. Considerando la existencia de condiciones ideales, es decir, sin fricción ni fuerzas disipativas. Este sistema se describe en la figura A.1.

Consideremos las coordenadas del sistema como  $(x, y)$ , así como las coordenadas del centro de masa del péndulo  $(x_G, y_G)$  definidas en (A.1).

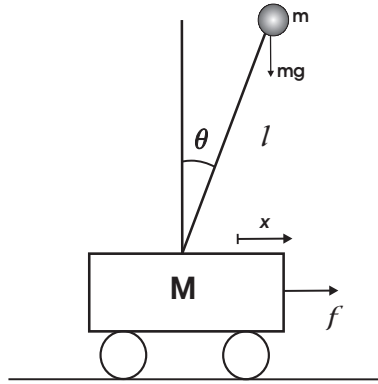


Figura A.1 Péndulo Invertido sobre un Carro.

Donde:

- $M$  : Masa del carro
- $m$  : Masa del péndulo
- $l$  : Distancia desde el pivote al centro de gravedad del péndulo
- $g$  : Aceleración debida a la gravedad
- $x$  : Distancia del centro de masa del carro desde su posición inicial
- $\theta$  : Ángulo del péndulo respecto a la vertical
- $f$  : Fuerza aplicada al carro

$$\begin{aligned} x_G &= x + l \operatorname{sen} \theta \\ y_G &= l \operatorname{cos} \theta \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Como primer paso para aplicar el método de Euler-Lagrange es necesario obtener la energía cinética y potencial del sistema que serán usadas para calcular la función de Lagrange ó Lagrangiano ( $\mathcal{L}$ ).

La energía cinética del carro  $K_1(q)$  es de la forma:

$$K_1(q) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{A.2})$$

La energía cinética del péndulo  $K_2(q)$  esta dada por:

$$K_2(q) = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_G^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (\text{A.3})$$



Por lo tanto, la energía cinética total del sistema  $K(q)$  es:

$$K(q) = K_1(q) + K_2(q) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 \quad (\text{A.4})$$

La energía potencial del sistema  $V(q)$  es definida como:

$$V(q) = mgl(\cos \theta - 1) \quad (\text{A.5})$$

Además, se conoce que la función de Lagrange ( $\mathcal{L}$ ) se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial dada como sigue:

$$\mathcal{L} = K(q) - V(q)$$

Entonces,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 - mgl(\cos \theta - 1) \quad (\text{A.6})$$

Las ecuaciones del sistema se derivan de la ecuación de Euler-lagrange definida como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = F \quad (\text{A.7})$$

donde,  $q = (q_1, \dots, q_n)^T$  representan las coordenadas generalizadas, una para cada grado de libertad del sistema y  $F = (f_1, \dots, f_n)^T$  denotan las fuerza externas aplicadas al sistema.

En este caso, las coordenadas generalizadas son  $x$  y  $\theta$ , es decir,  $q = (x, \theta)^T$  y  $F = (f, 0)^T$ .

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= ml\dot{x} \cos \theta + (I + ml^2)\dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= mgl \sin \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Y sustituyendo para cada variable, cada uno de los términos anteriores en la ecuación (A.7), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= f \\ \frac{d}{dt} \left( (M + m)\dot{x} + ml \cos \dot{\theta} \cos \theta \right) - 0 &= f \\ (M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} &= f \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( ml\dot{x} \cos \theta + (I + ml^2\dot{\theta}) \right) - mgl \sin \theta + ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta &= 0 \\ ml\ddot{x} \cos \theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, se asumirá que el momento de inercia del péndulo es insignificante, por lo que es cancelado de la ecuación (A.9) quedando el sistema de la siguiente forma:

$$(M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} = f \quad (\text{A.10})$$

$$ml\ddot{x} \cos \theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, las ecuaciones (A.10) y (A.11) describen el movimiento del Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro y constituyen el modelo matemático no lineal del sistema.

Además, el sistema formado por las expresiones (A.10) y (A.11) puede ser escrito en la forma estándar de los Sistemas de Lagrange definido como:

$$M(q)\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F \quad (\text{A.12})$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml(\sin \theta)\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix} \quad y \quad F = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Es importante notar que es  $M(q)$  simétrica y definida positiva para todo  $q$ .

Por otra parte, las estrategias de control propuestas en este trabajo son aplicadas a un modelo normalizado del sistema (capítulos 4 y 5). Con el fin de simplificar la manipulación algebraica en los análisis y generalizarlo, es decir, no limitarlo a parámetros específicos. Esto se logra por medio de una serie de procedimientos algebraicos que permiten normalizar las ecuaciones (A.10) y (A.11) (es decir manejar cantidades adimensionales) por lo que es necesario definir las siguientes relaciones de transformación [6].

$$q = x/l, \quad u = f/mg, \quad d\tau = dt\sqrt{g/l} \quad \delta = M/m \quad (\text{A.16})$$

Entonces, para realizar la simplificación del sistema con las relaciones anteriores, es necesario obtener las diferenciales con respecto al tiempo adimensional  $\tau$ , las cuales se definen como sigue [85].

$$\dot{q} = \dot{x} \frac{1}{\sqrt{gl}} \quad (\text{A.17a})$$

$$\dot{q} = \frac{\ddot{x}}{g} \quad (\text{A.17b})$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{l}} \dot{\theta} \quad (\text{A.18a})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \ddot{\theta} \quad (\text{A.18b})$$

Es importante recordar que las variables  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  son las derivadas con respecto al tiempo adimensional  $\tau$ . Así como, para evitar confusiones, las variables del lado derecho de (A.18a) y (A.18b) son la primera y segunda derivada con respecto a  $\tau$ , respectivamente.

Sustituyendo (A.16), (A.17a), (A.17b), (A.18a) y (A.18b) en la ecuaciones (A.10) y (A.11) se encuentra el sistema normalizado.

Primero, realizamos la sustitución para (A.11) de la siguiente forma:

$$mgl\ddot{q} \cos \theta + (ml^2) \frac{g}{l} \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

Dividiendo entre  $mgl$  se obtiene la ecuación normalizada

$$\ddot{q} \cos \theta + \ddot{\theta} - \sin \theta = 0 \quad (\text{A.19})$$

Efectuando un procedimiento similar para (A.10) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (M + m)g\ddot{q} - ml(\sin \theta) \frac{g}{l} \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \frac{g}{l} \ddot{\theta} &= f \\ mg \left( \frac{M}{m} + 1 \right) \ddot{q} - mg(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + mg(\cos \theta) \ddot{\theta} &= f \end{aligned}$$

y dividiendo ambos miembros entre  $mg$  se obtiene:

$$\left( \frac{M}{m} + 1 \right) \ddot{q} - (\sin \theta) \dot{\theta}^2 + (\cos \theta) \ddot{\theta} = \frac{f}{mg}$$

Finalmente, utilizando las relaciones de transformación (A.16) obtenemos la expresión normalizada

$$(1 + \delta)\ddot{q} - \dot{\theta}^2 \sin \theta + (\cos \theta)\ddot{\theta} = u \quad (\text{A.20})$$

El sistema normalizado que describe al sistema péndulo invertido sobre un carro esta formado por las ecuaciones (A.19) y (A.20) como sigue:

$$\begin{aligned} \ddot{q} \cos \theta + \ddot{\theta} - \sin \theta &= 0 \\ (1 + \delta)\ddot{q} - \dot{\theta}^2 \sin \theta + (\cos \theta)\ddot{\theta} &= u \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

### A.1.2. Inestabilidad del péndulo invertido en lazo abierto

Las ecuaciones no lineales del sistema del péndulo obtenidas de (A.10) y (A.11) son:

$$\ddot{x} = \frac{1}{M + m \operatorname{sen}^2 \theta} \left[ m \operatorname{sen} \theta (l \dot{\theta}^2 - g \cos \theta) + f \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l(M + m \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ -ml \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (M + m)g \operatorname{sen} \theta - f \cos \theta \right] \quad (\text{A.23})$$

las cuales tienen un punto de equilibrio inestable en  $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T = (0, 0, 0, 0)^T$ .

A continuación utilizaremos el modelo lineal del sistema para mostrar que el sistema es inestable en lazo abierto. Para lo cual obtendremos la linealización del modelo no lineal representado en (A.22) alrededor del punto de equilibrio inestable.<sup>1</sup>

Entonces, definiendo las siguientes variables de estado para el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= x & x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \theta & x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} f \quad (\text{A.24})$$

que tiene la siguiente forma:

$$\dot{X} = AX + Bf \quad (\text{A.25})$$

siendo  $A$  y  $B$  matrices, y  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ,

Por lo tanto, para mostrar que el sistema en lazo abierto es inestable es necesario conocer la ubicación de polos de la función de transferencia en lazo abierto, que para

<sup>1</sup>Para una explicación más detallada de la obtención del modelo lineal del péndulo invertido revisar [85, 148].

el caso de la representación en espacio de estado corresponden a los valores característicos (propios) de la matriz  $A$ .

Esto significa, que debemos calcular los valores propios de  $A$  utilizando la siguiente ecuación:

$$\det(sI - A) \quad (\text{A.26})$$

Consiguientemente, para la matriz  $A$  definida en (A.24), y utilizando (A.26) se obtienen los siguientes valores característicos o polos.

$$s = 0; \quad s = 0; \quad s = -\frac{\sqrt{g}\sqrt{m+M}}{\sqrt{l}\sqrt{M}}; \quad s = \frac{\sqrt{g}\sqrt{m+M}}{\sqrt{l}\sqrt{M}};$$

Evidentemente, el sistema tiene un polo en el semiplano derecho. Entonces, se puede decir que el sistema es inestable en lazo abierto.

## A.2. Sistema Péndulo con Disco Inercial

El Péndulo con Disco Inercial (**PDI**) es un robot subactuado de dos grados de libertad como muestra la figura A.2. En el cual, el primer eslabón es el péndulo, mientras que el segundo es el disco.

Los parámetros del sistema se describen en la siguiente tabla.

$m_1$	:	Masa del péndulo
$m_2$	:	Masa de la rueda
$l_1$	:	Longitud del péndulo
$l_2$	:	Distancia al centro de masa del péndulo
$\delta_1$	:	Coficiente de amortiguamiento de la coordenada subactuada
$\delta_2$	:	Coficiente de amortiguamiento de la coordenada actuada
$\theta_1$	:	Ángulo que forma el péndulo con la vertical
$\theta_2$	:	Ángulo del disco
$I_1$	:	Momento de Inercia del péndulo
$I_2$	:	Momento de Inercia de la rueda
$\tau$	:	Torque del motor aplicado al disco
		$\eta = m_1 l_2 + m_2 l_1$

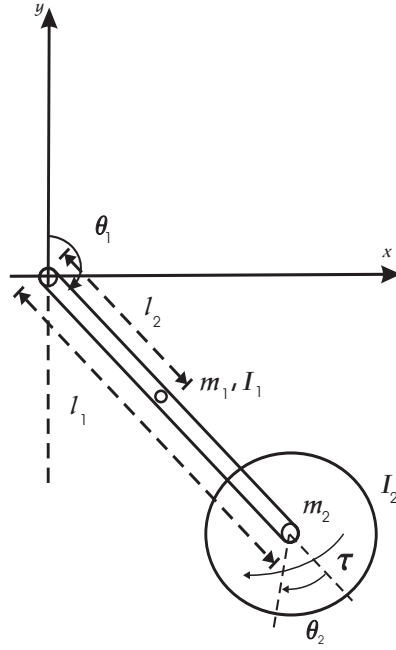


Figura A.2 Péndulo con Disco Inercial .

Entonces, como primer paso se define la energía cinética del péndulo como:

$$K_1(q) = \frac{1}{2}(m_1 l_2^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2$$

y la energía cinética del disco de la forma:

$$K_2(q) = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

Por lo tanto, la energía cinética total es:

$$K(q) = K_1(q) + K_2(q) = \frac{1}{2}(m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2) \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (\text{A.27})$$

Además, la energía potencial del sistema es  $V(q) = \eta g (\cos \theta_1 - 1)$ . Finalmente, el Lagrangiano ( $\mathcal{L}$ ) es de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2) \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 - \eta g (\cos \theta_1 - 1) \quad (\text{A.28})$$

Usando la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = u \quad (\text{A.29})$$

Donde, para este sistema, las coordenadas generalizadas son  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , es decir,  $q = (\theta_1, \theta_2)^T$  y  $u = (0, \tau)^T$ .

Por lo tanto, tenemos que.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2) \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= \eta g \sin \theta_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= I_2 \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned}$$

Y sustituyendo cada uno de los términos anteriores en la ecuación (A.29) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} ((m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2) \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2) - \eta g \sin \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$(I_1 + I_2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \eta g \sin \theta_1 = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (I_2 \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2) - 0 &= \tau \end{aligned}$$

$$I_2 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 = \tau \quad (\text{A.31})$$



Consignientemente, las ecuaciones dinámicas del sistemas son de la siguiente forma:

$$(I_1 + I_2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \eta g \sin \theta_1 = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$I_2 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 = \tau \quad (\text{A.33})$$

Este sistema puede ser escrito en forma vectorial como sigue:

$$D(q) \ddot{q} + g(q) = u$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad D(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_1^2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} -\eta g \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

### A.3. Sistema Péndulo Esférico Invertido

En esta sección presentamos las ecuaciones de movimiento del sistema Péndulo Esférico Invertido (**PEI**), obtenidas por medio de las ecuaciones de Euler-lagrange. Entonces, consideremos al péndulo invertido montado sobre una plataforma móvil como se muestra en la figura A.3.

Primero denotemos los centro de masa de la base móvil y del péndulo como  $x_{GM}$  y  $x_{Gm}$ , respectivamente de la siguiente manera:

$$x_{GM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{Gm} = \begin{bmatrix} x + l \sin \theta \\ y + l \cos \theta \sin \varphi \\ l \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Además, las velocidades del sistema asociadas con  $x_{GM}$  y  $x_{Gm}$ , son de la siguiente forma:

$$\dot{x}_{GM} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_{Gm} = \begin{bmatrix} \dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} - l \sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + l \cos \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \\ -l \sin \theta \cos \varphi \dot{\theta} - l \cos \theta \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

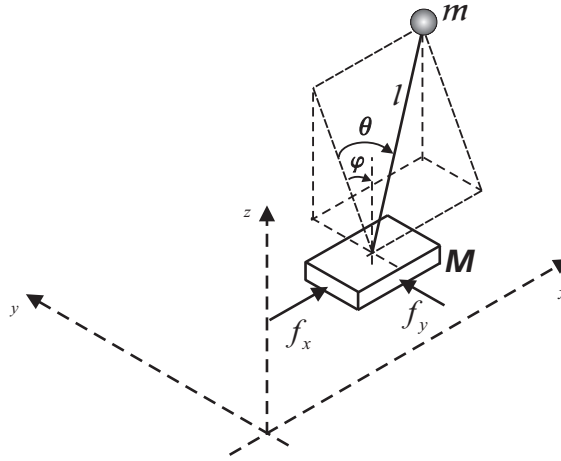


Figura A.3 Sistema Péndulo Esférico Invertido .

Los parámetros del sistema se describen en la siguiente tabla:

- $M$  : Masa de la base móvil
- $m$  : Masa del péndulo
- $l$  : Distancia desde el pivote al centro de gravedad del péndulo
- $x$  : Desplazamiento del centro de masa de la base móvil en el eje- $x$
- $y$  : Desplazamiento del centro de masa de la base móvil en el eje- $y$
- $\theta$  : Rotación alrededor del eje- $y$
- $\varphi$  : Rotación alrededor del eje- $x$
- $f_x$  : Fuerza aplicada a la base en la dirección  $x$
- $f_y$  : Fuerza aplicada a la base en la dirección  $y$

Por consiguiente, las energías cinética y potencial del sistema son:

$$K = \frac{1}{2} \dot{x}_{GM}^T M \dot{x}_{GM} + \frac{1}{2} \dot{x}_{Gm}^T m \dot{x}_{Gm} \quad , \quad V(q) = mgl \cos \theta \cos \varphi$$

Y por tanto, la expresión de la energía cinética puede simplificarse como sigue:

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M + m & 0 & ml \cos \theta & 0 \\ 0 & M + m & -ml \sin \theta \sin \varphi & ml \cos \theta \cos \varphi \\ ml \cos \theta & -ml \sin \theta \sin \varphi & ml^2 & 0 \\ 0 & ml \cos \theta \cos \varphi & 0 & ml^2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Es evidente que la matriz de inercia de este sistema solo depende de  $(\theta, \varphi)$ . Por lo tanto, aplicando la ecuación de Euler Lagrange, descrita en (A.37) donde el vector de coordenadas generalizadas se define como:  $q = (x, y, \theta, \varphi)$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas para el sistema Péndulo Esférico Invertido.

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} &= ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + f_x & (\text{A.38}) \\ (M + m)\ddot{y} - ml \sin \theta \sin \varphi \ddot{\theta} + ml \cos \theta \cos \varphi \ddot{\varphi} &= ml \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta}^2 + 2ml \sin \theta \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ &+ ml \cos \theta \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + f_y \\ ml \cos \theta \ddot{x} - ml \sin \theta \sin \varphi \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\theta} &= mgl \sin \theta \cos \varphi - ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \\ ml \cos \theta \cos \varphi \ddot{y} + ml^2 \cos^2 \theta \ddot{\varphi} &= mgl \cos \theta \sin \varphi + 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} \end{aligned}$$

# Apéndice B

## Linealización Parcial por Retroalimentación

Para evitar las estrictas condiciones de la linealización por realimentación [97, 133, 165], así como la inconveniencia de no proporcionar elementos constructivos para el diseño de la ley de control, se desarrollaron nuevas líneas de investigación entre las que destaca el trabajo de M. Spong [184] que consiste en linealizar parcialmente los sistemas mecánicos subactuados usando un cambio variable en la señal de control. Enseguida presentamos sus resultados.

Considere el siguiente sistema subactuado

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1(q) \\ \phi_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde  $q_1 \in \mathbb{R}^l$  y  $q_2 \in \mathbb{R}^m$  corresponden a los grados de libertad subactuados y actuados, respectivamente. Además,

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

es una matriz simétrica definida positiva, así como las funciones  $h_1(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^l$  y  $h_2(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^m$  contienen los términos Centrífgos y de Coriolis del sistema, los

elementos  $\phi_1(q, \dot{q}) \in R^l$  y  $\phi_2(q, \dot{q}) \in R^m$  contienen componentes gravitacionales y  $\tau \in R^m$  es el vector que representa las fuerzas producidas por los  $m$  actuadores.

A continuación, describimos los fundamentos del método, que se utilizaron en este trabajo de tesis.

Consideremos que de la primera línea de (B.1) se obtiene:

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) + \phi_1(q) = 0 \quad (\text{B.3})$$

siendo  $m_{11}(q)$  invertible, debido a que la matriz  $M(q)$  es definida positiva. Por lo tanto, podemos resolver de la ecuación (B.3) a  $\ddot{q}_1$  como sigue:

$$\ddot{q}_1 = -m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)\ddot{q}_2 - m_{11}^{-1}(q)[h_1(q, \dot{q}) + \phi_1(q)]. \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.4) en la segunda línea de (B.1) obtenemos

$$\bar{m}_{22}(q)\ddot{q}_2 + \bar{h}_2(q, \dot{q}) + \bar{\phi}_2(q, \dot{q}) = \tau \quad (\text{B.5})$$

donde los términos  $\bar{m}_{22}(q)$ ,  $\bar{h}_2(q, \dot{q})$  y  $\bar{\phi}_2(q)$  son de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{m}_{22}(q) &= m_{22}(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q) \\ \bar{h}_2(q, \dot{q}) &= h_2(q, \dot{q}) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)h_1(q, \dot{q}) \\ \bar{\phi}_2(q) &= \phi_2(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)\phi_1(q) \end{aligned}$$

Además, para poder definir un controlador  $u$  es necesario que la matriz  $\bar{m}_{22}(q)$  de  $m \times m$  sea simétrica y definida positiva. La cual puede ser calculada de forma simple con la siguiente relación [82, 83]

$$\bar{m}_{22} = T^T M T \quad (\text{B.6})$$

donde  $T$  es una matriz de  $n \times m$  definida como:

$$T = \begin{bmatrix} -m_{11}^{-1}m_{12} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Entonces, se define la nueva entrada de control  $u$  para la ecuación (B.5) como:

$$\tau = \bar{m}_{22}u + \bar{h}_2(q, \dot{q}) + \bar{\phi}_2(q, \dot{q}) \quad (\text{B.8})$$

Por lo tanto, el sistema parcialmente linealizado es de la forma:

$$m_{11}\ddot{q}_1 + h_1(q, \dot{q}) + \phi_1(q, \dot{q}) \quad (\text{B.9})$$

$$\ddot{q}_2 = u \quad (\text{B.10})$$

Podemos observar que el sistema entrada-salida de  $u$  a  $q_2$  es lineal y de segundo orden. Entonces, de lo anterior se deriva la siguiente proposición

**Proposición B.0.1** (*Spong [184]*) Si existe una señal de control de la forma

$$\tau = \gamma(q)u + \beta(q, \dot{q})$$

la dinámica de (B.1) se puede linealizar parcialmente obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 &= f(q, \dot{q}) + g(q)u \\ \dot{q}_2 &= \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 &= u \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde,

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= m_{22}(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q) \\ \beta(q, \dot{q}) &= h_2(q, \dot{q}) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)h_1(q, \dot{q}) + \phi_2(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)\phi_1(q) \\ f(q, \dot{q}) &= -m_{11}^{-1}(q)[h_1(q, \dot{q}) + \phi_1(q, \dot{q})] \\ g(q) &= -m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q) \end{aligned}$$

De la discusión anterior podemos concluir que la propiedad principal del sistema subactuado (B.11) es que al aplicar la linealización parcial por retroalimentación la nueva entrada de control  $u$  transforma la dinámica del sistema (B.1), en el subsistema

$(q_1, \dot{q}_1)$  (subsistema no lineal) y en el subsistema  $(q_2, \dot{q}_2)$  (subsistema lineal). Por lo cual se puede escribir como:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u \quad (\text{B.12})$$

Siendo  $x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^T$

# Apéndice C

## Demostraciones de lemas y comentarios adicionales

### C.1. Demostración del lema 4.3.2

Comencemos verificando la primera condición de ajuste relacionada con la energía potencial  $V_d$ .

Entonces, sustituyendo los valores de  $M_d^{-1}$  y  $F(\theta)$  en la primera condición de (4.9) definidos en (4.11) y (4.4), respectivamente y recordando que  $G^\perp = (1, \cos \theta)$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$G^\perp \left[ M_d^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V_d(\mathbf{x}) - F(\theta) \right] = \frac{\partial V_d}{\partial \theta} (1 - \mu_2 \cos \theta) + \frac{\partial V_d}{\partial q} (-\mu_2 + \mu_3 \cos \theta) + \sin \theta = 0 \quad (\text{C.1})$$

Por lo tanto, es sencillo verificar que la siguiente función

$$V_d(\mathbf{x}) = k_1 - \frac{1}{\mu_2} \ln(-1 + \mu_2 \cos \theta) + \Phi_p(s) \quad (\text{C.2})$$

es una solución de la **EDP** descrita en (C.1), donde  $k_1$  es una constante,  $s$  es una variable auxiliar definida en (4.14), y  $\Phi_p$  es una función arbitraria.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>La **EDP** fue solucionada con ayuda del programa *Mathematica*<sup>TM</sup>.



Para garantizar que la energía potencial  $V_d$  sea definida positiva localmente en la vecindad de  $\mathbf{x} = 0$  se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$V_d(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial V_d}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V_d}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{x=0} > 0. \quad (\text{C.3})$$

Aplicando las condiciones de (C.3) en (C.2), se obtiene

$$k_1 = \ln(-1 + \mu_2)/\mu_2, \Phi'_p(0) = 0, \Phi''_p(0) > 0, \mu_2 > 1, \mu_3 > \mu_2^2. \quad (\text{C.4})$$

Y por simplicidad, la función  $\Phi_p$  es escogida como:

$$\Phi_p(z) = \frac{k_p}{2} z^2, \quad (\text{C.5})$$

con  $k_p > 0$ .

Por lo tanto, se valida la expresión de  $V_d$  definida en (4.13), la cual es estrictamente positiva y bien definida si

$$-1 + \mu_2 \cos \theta > 0. \quad (\text{C.6})$$

Evidentemente, la desigualdad anterior se satisface para todo  $\theta \in (-\theta_\mu, \theta_\mu)$  con  $\theta_\mu$  definida en (4.15). Por consiguiente, la función  $V_d$  propuesta satisface la primera condición de ajuste, para todo  $\theta \in I_\mu$ .

Enseguida, procedemos a mostrar que la matriz  $K_d$  propuesta garantiza la segunda condición de ajuste.

De la expresión (4.10) podemos seleccionar a  $K_d$  tal que,

$$G^\perp M_d^{-1} K_d(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{C.7})$$

Entonces, sustituyendo la matriz  $M_d^{-1}$  definida en el lema 4.3.2 se obtienen dos ecuaciones lineales, de las cuales se puede observar fácilmente, que la matriz  $K_d$  propuesta satisface la ecuación (C.7).

Las condiciones de ajuste fueron solucionadas fácilmente, ya que sólo hemos solucionado una **EDP** y un conjunto de ecuaciones algebraicas que estaban relacionadas con

la estructura del sistema objetivo. Cabe mencionar que si se empleara la metodología que utiliza las condiciones de ajuste del método de Lagrangianos controlados, sería necesario resolver tres ecuaciones diferenciales ordinarias relacionadas con el moldeo de energía cinética y una ecuación diferencial parcial no lineal derivada de la energía potencial [32, 33, 52]. Un número similar de ecuaciones se requiere si se usa el enfoque presentado en [26]. Entonces, cabe destacar que la sencillez para solucionar las dos condiciones de ajuste que se presentó es una consecuencia de la estructura del sistema en lazo cerrado deseado (4.5). La principal dificultad para realizar el ajuste de modelo dependerá de la habilidad que se tenga para escoger el sistema en lazo cerrado objetivo.

## C.2. Comentario 4.2.2

En este apéndice estudiamos algunas ventajas del sistema en lazo cerrado (4.5) linealizado. Por lo tanto, diferenciando la ecuación (4.5) con respecto a sus estados evaluados en el origen obtenemos el siguiente sistema lineal.

$$M_d \ddot{\mathbf{x}} = -\gamma H_d \dot{\mathbf{x}} - H_p \mathbf{x} \quad (\text{C.8})$$

donde  $H_d$  es una matriz semi-definida positiva de la forma:

$$H_d = \begin{bmatrix} \frac{(\mu_2 - \mu_3)^2}{(\mu_2^2 - \mu_3)^2} & \frac{(-1 + \mu_2)(-\mu_2 + \mu_3)}{(\mu_2^2 - \mu_3)^2} \\ \frac{(-1 + \mu_2)(-\mu_2 + \mu_3)}{(\mu_2^2 - \mu_3)^2} & \frac{(-1 + \mu_2)^2}{(\mu_2^2 - \mu_3)^2} \end{bmatrix}$$

y  $H_p$  es una matriz definida positiva definida por:

$$H_p = \begin{bmatrix} \frac{-1 + \mu_2 + k_p \mu_2^2 - 2k_p \mu_2 \mu_3 + k_p \mu_3^2}{(-1 + \mu_2)^2} & \frac{k_p(-\mu_2 + \mu_3)}{-1 + \mu_2} \\ \frac{k_p(-\mu_2 + \mu_3)}{-1 + \mu_2} & k_p \end{bmatrix}$$

Las afirmaciones anteriores son sencillas de demostrar, ya que el  $\det(H_d) = 0$  y  $\det(H_p) = k_p / (-1 + \mu_2) > 0$ , con  $\mu_2 > 1$ . Ahora, introduciendo la siguiente función candidata a Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T M_d \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T H_p \mathbf{x},$$

cuya derivada con respecto al tiempo alrededor de la trayectoria (C.8), tiene la siguiente forma:

$$\dot{V} = -\gamma \dot{\mathbf{x}}^T H_d \dot{\mathbf{x}}.$$

Y como  $\dot{V}$  es semi-definida negativa podemos asegurar la estabilidad en el sentido de Lyapunov, para posteriormente aplicando el teorema de LaSalle mostrar fácilmente que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado linealizado convergen asintóticamente al origen. Sin embargo, como el sistema (C.8) es lineal. El sistema en lazo cerrado es estable asintóticamente de manera local, así como exponencialmente estable alrededor del punto de equilibrio inestable. Esto implica que el sistema en lazo cerrado sea robusto con respecto a dinámicas pequeñas no modeladas. Es decir, el sistema es robusto con respecto al efecto del amortiguamiento lineal cuando es pequeño. Para un análisis de estabilidad más riguroso tenemos que incluir la fuerza de amortiguamiento en el modelo original. Entonces, el sistema linealizado puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_d^{-1} H_p & -M_d^{-1} (\gamma H_d + B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Realizando algunas manipulaciones algebraicas es posible mostrar que existen matrices  $M_d$  y  $H_p$ , así como constantes  $\gamma$  tal que el sistema (C.9) sea exponencialmente estable. Por lo tanto, podemos compensar los efectos indeseables del amortiguamiento localmente.

### C.3. Demostración del lema 6.3.1

Tomando como base, la definición de  $V$  dada en (6.3) y (6.9), se deduce que  $V$  puede ser expresada como:

$$V(\mathbf{q}) = K_p(\mathbf{q}) + K_c(\mathbf{q}), \quad (\text{C.10})$$

donde  $K_p$  representa la energía potencial del sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} K_p(\mathbf{q}) &= \frac{k_1}{2}(x + k_p S_\theta)^2 \\ &+ \frac{k_2}{2}(y + k_p C_\theta S_\varphi)^2 + lk_p(1 - C_\theta C_\varphi) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

y  $K_c$  define la energía cinética

$$\begin{aligned} K_c(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left( \dot{x} + k_p C_\theta \dot{\theta} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left( \dot{y} + k_p (C_\theta C_\varphi \dot{\varphi} - S_\theta S_\varphi \dot{\theta}) \right)^2 \\ &+ \frac{l}{2} \dot{x}^2 + \frac{l}{2} \dot{y}^2 - \frac{lk_p}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{lk_p}{2} C_\theta^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Evidentemente,  $K_p$  es definida positiva globalmente, ya que para todo  $\mathbf{q} \neq 0$  se tiene que  $K_p(\mathbf{q}) > 0$ . Enseguida mostraremos que  $K_c > 0$ , para todo  $\theta, \varphi \in I_\alpha$ . Como primer aspecto, expresemos la energía cinética como una forma cuadrática de la forma  $K_c = X^T Q X / 2$ , donde  $X = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}]^T$  y

$$Q(\theta, \varphi) = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+l & 0 & k_p C_\theta & 0 \\ 0 & 1+l & -k_p S_\theta S_\varphi & k_p C_\theta C_\varphi \\ k_p C_\theta & -k_p S_\theta S_\varphi & -k_p l + k_p^2 (C_\theta^2 + S_\theta^2 S_\varphi^2) & -k_p^2 C_\theta S_\theta C_\varphi S_\varphi \\ 0 & k_p C_\theta C_\varphi & -k_p^2 C_\theta S_\theta C_\varphi S_\varphi & -k_p l C_\theta^2 + k_p^2 C_\theta^2 C_\varphi^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Además,<sup>2</sup> cabe notar que la submatriz de orden  $k$  de la forma  $Q_k = [q_{ij}]$ , siendo  $i, j = 1, \dots, k$ , con  $k \leq 4$  servirá para evaluar si la matriz  $Q$  es positiva. Entonces, se puede observar claramente que  $Q_1$  y  $Q_2$  son estrictamente positivas. Para determinar

<sup>2</sup>Recuerde que  $Q > 0$  si el  $\det(Q_i) > 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

el determinante de  $Q_3$  y  $Q_4$ , nos apoyamos en el programa *Mathematica*<sup>TM</sup> obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}\det(Q_3) &= k_p l(1+l) \left(-1-l + (C_\theta^2 + S_\theta^2 S_\varphi^2) k_p\right), \\ \det(Q_4) &= \det Q(\theta, \varphi) = l^2 k_p^2 C_\theta^2 \det(N(\theta, \varphi)),\end{aligned}\tag{C.14}$$

donde el  $\det(N)$  está definido en (6.18). Y del lema 6.3.1, podemos garantizar que el  $\det(Q_4) > 0$ , para todo  $\theta, \varphi \in I_\alpha$ . Por otra parte, se puede observar que

$$k_p(C_\theta^2 + S_\theta^2 S_\varphi^2) > k_p C_\theta^2 C_\varphi^2 > 0, \quad \forall \theta, \varphi \in I_\alpha.\tag{C.15}$$

Por consiguiente, el  $\det(Q_3) > 0$ , para todo  $\theta, \varphi \in I_\alpha$ , y la matriz  $Q(\theta, \varphi)$  es definida positiva,  $\forall \theta, \varphi \in I_\alpha$ . Podemos concluir que  $V(\mathbf{q})$  es definida positiva localmente para todo  $|\theta| < \alpha$  y  $|\varphi| < \alpha$ .

## C.4. Demostración del lema 7.3.5

En la primer parte de esta sección, estimaremos el valor de la cota  $\bar{E}$  definida en (7.17). Para realizarlo, construiremos la curva de nivel más grande contenida en el conjunto  $Q$ .

Como primer aspecto, definamos al conjunto  $S_c$  como:

$$S_c = \{q \in Q : K_m(q) \leq c > 0\}\tag{C.16}$$

Cabe notar, que debido a la suposición **A1** y el comentario 7.3.6 el conjunto  $S_c$  es un conjunto convexo. Entonces, calculando los puntos extremos en la dirección de  $\theta$  y  $r$  del conjunto  $S_c$ , obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial K_m}{\partial \theta}(q) = -(\kappa_3 + \kappa_2 r) \text{sen } \theta + \kappa_1 \theta = 0\tag{C.17}$$

y

$$\frac{\partial K_m}{\partial r}(q) = -\kappa_2(1 - \cos \theta) + k_p(r - \bar{r}) = 0\tag{C.18}$$

Podemos concluir de **A1**, que la solución de (C.17) es dada por  $\theta = 0$ . Por consiguiente, los puntos extremos en la dirección de  $\theta$  son definidos como  $q_1 = (\bar{r} + \varepsilon, 0)$

y  $q_2 = (\bar{r} - \varepsilon, 0)$ . Y si se desea que  $q_1$  y  $q_2$  pertenezcan a  $\partial Q^3$  entonces, tenemos que  $K_m(q_1) = K_m(q_2) = k_p \varepsilon^2 / 2$ .

De manera similar, los puntos extremos en la dirección de  $r$  que pertenecen a  $\partial Q$  son  $q_3 = (r, \frac{\varepsilon}{\lambda}, \bar{\theta})$  y  $q_4 = (r, \frac{\varepsilon}{\lambda}, \bar{\theta})$ ; donde el parámetro  $\lambda$  se escoge como:

$$K_m(q_3) = K_m(q_4) = \lambda \kappa_2 (1 - \cos \theta) \varepsilon = \frac{k_p}{2} \varepsilon.$$

Entonces, después de solucionar la ecuación (C.18) y forzando a que las dos soluciones pertenezcan a  $\partial Q$ , se tiene que  $q = (r_*, \pm \bar{\theta}) \in \partial Q$ ; donde  $r_* = \bar{r} + \kappa_2 (1 - \cos \bar{\theta}) / k_p$ . Por lo tanto,  $k_p$  se define como:

$$k_p = \frac{\lambda \kappa_2 (1 - \cos \theta)}{\varepsilon} \quad (\text{C.19})$$

con  $\lambda > 1$  y  $\bar{E} = k_p \varepsilon^2 / 2$ , por lo cual los valores de  $r_*$  y  $\bar{E}$  se pueden expresar como:

$$r_* = \bar{r} + \frac{\varepsilon}{\lambda}; \quad \bar{E} = \lambda \kappa_2 (1 - \cos \bar{\theta}) \varepsilon.$$

Evidentemente,  $\lambda > 1$  satisface (7.18).

Además, ya que la función  $E_T$  es decreciente, se deduce que si  $x_0 = (q_0, \dot{q}_0)$  con  $q_0 \in Q$  y  $E_T \leq \bar{E}$ , tenemos que:

$$K_m(q(t)) \leq K_m(q(t)) + \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) M \dot{q}(t) \leq E_T(x(t)) \leq E_T(x_0) \leq \bar{E}; \quad \forall t \geq 0.$$

De la desigualdad anterior obtenemos que  $q(t) \in S_{\bar{E}} \subset Q$ , para todo  $t \geq 0$ . Por lo tanto, el lema 7.3.5 se cumple.

---

<sup>3</sup> $\partial Q$  representa el conjunto de todos los puntos frontera de  $Q$ .

# Apéndice D

## Publicaciones y congresos generados del trabajo de investigación

### ■ Publicaciones en Revistas

- C. Aguilar-Ibáñez and O. O. Gutiérrez-Frías. A simple model matching for the stabilization of an inverted pendulum cart system, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.18, No. 6, pp. 688-699, 2008.
- C. Aguilar-Ibáñez and O. Gutiérrez-Frías. Controlling the inverted pendulum by means of a nested saturation functions, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 53, No. 4, pp. 273-280, 2008.
- C. Aguilar-Ibáñez, O. Gutiérrez F. and H. Sossa-Azuela. Controlled Lagrangian approach to the stabilization of the inverted pendulum system, *Revista Mexicana de Física*, Vol. 54, No. 4, pp. 329-335, 2008.
- O. Octavio Gutiérrez F., Carlos Aguilar Ibáñez and Humberto Sossa A. Stabilization of the inverted spherical pendulum via Lyapunov approach, *Asian Journal of Control*, Vol. 11, No. 6, pp. 587-594, 2009.

**■ Participación en Congresos**

- C. Aguilar-Ibáñez, O. Gutiérrez F. and M. Suárez-C. Stabilization of the strongly damping inertia wheel pendulum by a nested saturation functions, In *Proceeding of the 2008 American Control Conference*, pp. 3434-3439, Seattle, WA., USA, 2008.
- C. Aguilar, O. Gutiérrez, J. C. Martínez, R. Garrido and B. Gómez. Lyapunov-based PD linear control of the oscillatory behavior of a nonlinear mechanical system: the inverted physical pendulum with moving mass case, In *8th International symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2008)*, Blacksburg, Virginia, USA, 2008.



# Referencias

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 2nd edition, 1987.
- [2] J. A. Acosta-Rodriguez. *Control No Lineal de Sistemas Subactuados*. Ph.D. Thesis, Universidad de Sevilla, España, 2004.
- [3] S. Afkhami, M. J. Yazdanpanah and P. J. Maralani. Stabilization of inertia wheel pendulum using output feedback back-stepping. In *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications*, volume 2, pages 977–982, Istanbul, Turkey, 2003.
- [4] C. Aguilar, O. Gutiérrez, J. C. Martínez, R. Garrido and B. Gómez. Lyapunov-based PD linear control of the oscillatory behavior of a nonlinear mechanical system: the inverted physical pendulum with moving mass case. In *18th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2008)*, Blacksburg, Virginia, USA, 2008.
- [5] C. Aguilar-Ibáñez and H. Sossa A. Stabilization of the Furuta pendulum based on a Lyapunov function. *Nonlinear Dynamics*, 49(1-2):1–8, 2007.
- [6] C. Aguilar-Ibáñez, O. Gutiérrez F. and M. S. Suarez C. Lyapunov based controller for the inverted pendulum cart system. *Nonlinear Dynamics*, 40(4):367–374, 2005.
- [7] C. Aguilar-Ibáñez, O. Gutiérrez F. and H. Sossa-Azuela. Controlled lagrangian

- approach to the stabilization of the inverted pendulum system. *Revista Mexicana de Física*, 54(4):329–335, 2008.
- [8] C. Aguilar-Ibáñez and O. O. Gutiérrez F. Controlling the inverted pendulum by means of a nested saturation functions. *Nonlinear Dynamics*, 53(4):273–280, 2008.
- [9] C. Aguilar-Ibáñez, O. Gutiérrez-F and H. Sossa-Azuela. Control of the Furuta pendulum by using a Lyapunov function. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6128–6132, San Diego,CA, USA, Dec 2006.
- [10] C. Aguilar-Ibáñez, O. Gutiérrez-F and H. Sossa-Azuela. Lyapunov approach for the stabilization of inverted spherical pendulum. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6133–6136, San Diego,CA, USA, 2006.
- [11] C. Aguilar-Ibáñez and O. O. Gutiérrez-Frías. A simple model matching for the stabilization of an inverted pendulum cart system. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(6):688–699, 2008.
- [12] C. Aguilar-Ibáñez and H. Sira-Ramírez. Control of the Furuta pendulum based on a linear differential flatness approach. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, volume 3, pages 1954–1959, Anchorage Alaska, USA, 2002.
- [13] C. Aguilar-Ibáñez and H. Sira-Ramírez. PD control for active vibration damping in an underactuated nonlinear system. *Asian Journal of Control*, 4(4):502–508, 2002.
- [14] C. F. Aguilar-Ibáñez, O. O Gutierrez F. and M. S. Suarez C. Stabilization of the strongly damping inertia wheel pendulum by a nested saturation functions. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 3434–3439, Seattle, WA, 2008.

- [15] X. Albouy and L. Praly. On the use of dynamic invariants and forwarding for swinging up a spherical inverted pendulum. In *Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1667–1672, Sydney, Australia, 2000.
- [16] C. W. Anderson. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. *IEEE, Control Systems Magazine*, 9(3):31–37, 1989.
- [17] B. R. Andrievskii, P. Yu. Guzenko and A. L. Fradkov. Control of nonlinear vibrations of mechanical systems via the method of velocity gradient. *Automation and Remote Control*, 57(4):456–467, 1996.
- [18] D. Angeli. Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback. *Automatica*, 37(7):1103–1108, 2001.
- [19] J. Aracil and F. Gordillo. The inverted pendulum: a benchmark in nonlinear control. In *Proceedings World Automation Congress*, 2004.
- [20] J. Aracil and F. Gordillo. El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *RIAI: Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2(2):8–19, 2005.
- [21] K. J. Åström. Adaptive control around 1960. *IEEE, Control Systems Magazine*, 16(3):44–49, 1996.
- [22] K. J. Åström, S. P. Boyd, R. W. Brockett and G. Stein. *Control in an Information Rich World: Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics, and Systems*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [23] K. J. Åström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. In *IFAC*, San Francisco, 1996.
- [24] K. J. Åström and K. Furuta. Swing up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2):287–295, 2000.

- [25] D. Auckly and L. Kapitanski. *Nonlinear Dynamics and Renormalization Group-CRM Proceedings and Lecture Notes*, volume 27, chapter Mathematical problems in the control of underactuated systems, pages 29–40. AMS Bookstore, 2001.
- [26] D. Auckly and L. Kapitanski. On the  $\lambda$  equations for matching control laws. *SIAM J. Control Optim*, 41(5):1372–1388, 2002.
- [27] D. Auckly, L. Kapitanski and W. White. Control of nonlinear underactuated systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 53(3):354–369, 2000.
- [28] M. Barão and J. M. Lemos. Nonlinear control of HIV-1 infection with a singular perturbation model. *Biomedical Signal Processing and Control*, 2(3):248–257, 2007.
- [29] R. Bellman. *Dynamic Programming*. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1957.
- [30] M. Bergerman. *Dynamics and control of underactuated manipulators*. Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, 1996.
- [31] H. Berghuis and H. Nijmeijer. A passivity approach to controller-observer design for robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6):740–754, 1993.
- [32] G. Blankenstein, R. Ortega and A. Van der Schaft. The matching conditions of controlled lagrangians and IDA passivity based control. *International Journal of Control*, 75(9):645–665, 2002.
- [33] A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard and J. E. Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1556–1571, 2001.
- [34] A. M. Bloch, N. E. Leonard and J. E. Marsden. Stabilization of the pendulum on a rotor arm by the method of controlled lagrangians. In *Proceedings. 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 500–505, Detroit, MI, USA, 1999.

- [35] A. M. Bloch, N. E. Leonard and J. E. Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: the first matching theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12):2253–2270, 2000.
- [36] A. M. Bloch, N. E. Leonard and J. E. Marsden. Stabilization of mechanical systems using controlled lagrangians. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2356–2361, San Diego, CA, USA, 1997.
- [37] A. M. Bloch, N. E. Leonard and J. E. Marsden. Matching and stabilization by the method of controlled lagrangians. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1446–1451, Tampa, FL, USA, 1998.
- [38] A. M. Bloch, J. E. Marsden and D. V. Zenkov. Nonholonomic dynamics. *Notices of the American Mathematical Society*, 52(3):324–333, 2005.
- [39] D. J. Block. Mechanical design and control of the pendubot. Master’s Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, IL, USA, 1996.
- [40] D. J. Block and M. W. Spong. Mechanical design & control of the pendubot. In *SAE 46th annual Earthmoving Industry Conference*, Peoria, IL, USA, 1995.
- [41] H. W. Bode. Feedback amplifier design. *Bell Syst. Technol. J.*, 19:42, 1940.
- [42] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand, 1945.
- [43] S. Bortoff and M. W. Spong. Pseudolinearization of the acrobot using spline functions. In *Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control*, volume 1, pages 593–598, Tucson AZ, USA, 1992.
- [44] J. P. Bransa, C. Macharisa, P. L. Kunschb, A. Chevalierc and M. Schwaningerd. Combining multicriteria decision aid and system dynamics for the control of socio-economic processes. An iterative real-time procedure. *European Journal of Operational Research*, 109(2):428–441, 1998.

- [45] R. W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pages 181–191. Birkhauser, Boston, MA., 1983.
- [46] B. Brogliato, I. D. Landau and R. Lozano. Adaptive motion control of robot manipulators: A unified approach based on passivity. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 1(3):187–202, 1991.
- [47] S. C. Brown and K. M. Passino. Intelligent control for an acrobot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 18(3):209–248, 1997.
- [48] R. T. Bupp, D. S. Bernstein, and V. T. Coppola. A benchmark problem for nonlinear control design. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8:307–310, 1998.
- [49] A. Castelletti and R. Soncini-Sessa. Coupling real-time control and socio-economic issues in participatory river basin planning. *Environmental Modelling & Software*, 22(8):1114–1128, 2007.
- [50] P. Castillo, R. Lozano and A. Dzul. *Modelling and Control of Mini Flying Machines*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [51] P. C. Chandrasekharan. *Robust Control of Linear Dynamical Systems*. Academic Press, 1996.
- [52] D. E. Chang, A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden and C. A. Woolsey. The equivalence of controlled lagrangian and controlled hamiltonian systems for simple mechanical systems. *ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations*, 8:393–422, 2002.
- [53] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1998.
- [54] C. C. Chung and J. Hauser. Nonlinear control of a swinging pendulum. *Automatica*, 31(6):851–862, 1995.

- [55] P. Dong, H. Benaroya and T. Wei. Integrating experiments into an energy-based reduced-order model for vortex-induced-vibrations of a cylinder mounted as an inverted pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 276(1-2):45–63, 2004.
- [56] G. Escobar, R. Ortega and H. Sira-Ramirez. Output-feedback global stabilization of a nonlinear benchmark system using a saturated passivity-based controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(2):289–293, 1999.
- [57] S. Esteban, J. Aracil and F. Gordillo. Estudio para la sintonización de parámetros de leyes de control del péndulo invertido. In *Actas de las XXV Jornadas de Automática (Ja2004)*, 2004.
- [58] W. R. Evans. Graphical analysis of control system. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, 67:547–551, 1948.
- [59] I. Fantoni and R. Lozano. *Nonlinear Control for the Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag, London, UK, 2002.
- [60] I. Fantoni and R. Lozano. Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit. *International Journal of Control*, 45(6):390–398, 2002.
- [61] I. Fantoni and R. Lozano. Global stabilization of the cart-pendulum system using saturation functions. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 4393–4398, Maui, HI, 2003.
- [62] I. Fantoni, R. Lozano and F. Mazenc. Control of the PVTOL aircraft using the forwarding technique and a Lyapunov approach. In *European Control Conference, ECC2001*, pages 3032–3037, Porto, Portugal, 2001.
- [63] I. Fantoni, R. Lozano and M. Spong. Energy based control of the pendubot. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(4):725–729, 2000.
- [64] I. Fantoni, R. Lozano and M. W. Spong. Passivity based control of the pendubot. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, volume 1, pages 268–272, San Diego, California, USA, 1999.

- [65] I. Fantoni, A. Zavala and R. Lozano. Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, December 2002, volume 4, pages 4462–4467, Las Vegas, Nevada USA, 2002.
- [66] R. Fierro, F. L. Lewis and A. Lowe. Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A*, 29(6):649–654, 1999.
- [67] A. L. Fradkov. Swinging control of nonlinear oscillations. *Int. Jour. Control*, 64(6):1189–1202, 1996.
- [68] A. L. Fradkov and A. Yu. Pogromsky. *Introduction to control of oscillations and chaos*, volume 35. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A - Vol. 35, 1998.
- [69] L. A. Fradkov, O. P. Tomchina and O. L. Nagibina. Swing control of rotating pendulum. *Proceedings of 3rd IEEE Mediterranean Symposium on Control and Automation*, 1:347–351, 1995.
- [70] K. Furuta. Control of pendulum: From super mechano-super to human adaptive mechatronics. In *Proceedings of 42nd IEEE Conference on Decision and Control.*, volume 2, pages 1498–1507, Maui, HI, 2003.
- [71] K. Furuta and M. Iwase. Swing-up time analysis of pendulum. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences.*, 52(3), 2004.
- [72] K. Furuta, M. Yamakita and S. Kobayashi. Swing up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Journal of System and Control Engineering*, 206:263–269, 1992.
- [73] S. García-Nieto, M. Martínez, Á. Llosá and J. Sanchis. Estrategias de enseñanza a distancia sobre control no-lineal aplicada al péndulo invertido. *Información Tecnológica*, 18(5):85–98, 2007.



- [74] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3rd edition, 2001.
- [75] H. Gollee, D. J. Murray-Smith and J. C. Jarvis. A nonlinear approach to modeling of electrically stimulated skeletal muscle. *IEEE transactions on biomedical engineering*, 48(4):406–415, 2001.
- [76] F. Gómez-Estern. *Control de Sistemas No Lineales Basados en la Estructura Hamiltoniana*. Ph.D. Thesis, Universidad de Sevilla, España, 2003.
- [77] F. Gómez-Estern, R. Ortega, F. Rubio and J. Aracil. Stabilization of a class of underactuated mechanical via total energy shaping. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1137–1143, Orlando, FL, U.S.A, 2001.
- [78] F. Gómez-Estern and A. J. van der Schaft. Physical damping in IDA-PBC controlled underactuated mechanical systems. *European Journal of Control*, 10(5):451–468, 2004.
- [79] F. Gordillo, J. A. Acosta and J. Aracil. A new swing-up law for the furuta pendulum. *International Journal of Control*, 76(8):836–844, 2003.
- [80] F. Gordillo and J. Aracil. A new controller for the inverted pendulum on a cart. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(17):1607–1621, 2008.
- [81] F. Gordillo, J. Aracil and J. A. Acosta. Control strategy for the cart-pendulum system. In *Proceedings of Control 2004*, volume 6, pages 214–219, Faro, Portugal, 2004.
- [82] Y. Gu and N. Loh. Control system modeling for robot manipulators by use of a canonical transformation. In *Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, volume 4, pages 484– 489, 1987.
- [83] Y. L. Gu and Y. Xu. A normal form augmentation approach to adaptive control of spacerobot systems. In *Proceedings, 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 731–737, Atlanta, GA, USA, 1993.

- [84] O. O. Gutiérrez-F, C. Aguilar-Ibáñez and H. Sossa-Azuela. Stabilization of the inverted spherical pendulum via Lyapunov approach. *Asian Journal of Control*, 11(6):587–594, 2009.
- [85] O. O. Gutiérrez-Frías. Diseño de leyes de control de un Péndulo invertido montado sobre un carro. Tesis de maestría, CIC-IPN, Mexico, 2006.
- [86] J. Hamberg. General matching conditions in the theory of controlled lagrangians. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2519–2523, Phoenix, AZ, USA, 1999.
- [87] J. Hamberg. *IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, chapter Controlled Lagrangians, symmetries and conditions for strong matching, pages 98–103. Elsevier, Princeton, NJ, USA, 2000.
- [88] J. Hauser and R. Murray. Nonlinear controllers for non-integrable systems: The acrobot example. In *Proc. American Control Conference*, pages 669–671, 1990.
- [89] J. Hauser, S. Sastry and P. Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3):392–398, 1992.
- [90] J. Hauser, S. Sastry and G. Meyer. Nonlinear control design for slightly nonminimum phase system: Application to v/stol aircraft. *Automatica*, 28(4):665–679, 1992.
- [91] T. Henmi, M. Deng and A. Inoue. Swing-up control of the acrobot using a new partial linearization controller based on the Lyapunov Theorem. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, 2006. ICNSC '06.*, pages 60–65, Ft. Lauderdale, FL, 2006.
- [92] S. Horikawa, M. Yamaguchi, T. Furuhashi and Y. Uchikawa. Fuzzy control for inverted pendulum using fuzzy neural network. *Journal of Robotics and Mechatronics*, 17(1):36–44, 1995.

- [93] T. Hoshino, K. Kawai and K. Furuta. Stabilization of the triple spherical pendulum - a simultaneous design approach. *Automatisierungstechnik*, 48:577–587, 2000.
- [94] A. Hurwitz. On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts. *Mathematische Annalen*, 46:273–284, 1895.
- [95] D. J. Inman. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, 2008.
- [96] T. Ishida, N. Shiokawa, T. Nagado and S. Ganeko. Learning control of an inverted pendulum using a neural network. In *Proceedings. IECON apos;91., 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, volume 2, pages 1401–1404, Kobe, Japan, 1991.
- [97] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, London, 3rd edition, 1995.
- [98] M. Iwashiro, K. Furuta and K. J. Aström. Energy based control of pendulum. In *Proceedings of the 1996 IEEE. International Conference on Control Applications*, pages 715–720, Michigan, USA, 1996.
- [99] B. Jakubczyk and W. Respondek. On the linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser Math. Astron. Physics*, 28:517–522, 1980.
- [100] M. Jankovic, D. Fontaine and P.V. Kokotovic. TORA example: cascade-and passivity-based control designs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(3):292–297, 1996.
- [101] Z. P. Jiang, D. J. Hill and Y. Guo. Stabilization and tracking via output feedback for the nonlinear benchmark system. *Automatica*, 34(7):907–915, 1998.
- [102] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Yokoi and H. Hirukawa. The 3D linear inverted pendulum mode: a simple modeling for a bipedwalking pattern generation. In *Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 239–246, Maui, HI, USA, 2001.

- [103] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 5:102–119, 1960.
- [104] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Transactions, Part D (Journal of Basic Engineering)*, 82:35–45, 1960.
- [105] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control system analysis and design via the ‘second method’ of Lyapunov I. continuous-time systems. *Trans. ASME J. Basic Eng.*, pages 371–393, 1960.
- [106] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in lineal filtering and prediction theory. *ASME Trans., Part D (Journal of Basic Engineering)*, pages 95–108, 1961.
- [107] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic and A. S. Morse. Systematic design of adaptive controller for feedback linearizable systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 36(11):1241–1253, 1991.
- [108] I. Kanellakopoulos and J. Zhao. Tracking and disturbance rejection for the benchmark nonlinear control problem. In *Proceedings of the American Control Conference, 1995.*, volume 6, pages 4360–4362, Seattle, WA, USA, 1995.
- [109] A. G. Kelkar, B. Fang, W. White and Xin Guo. Feedback stabilization of underactuated nonlinear pendulum cart system using matching conditions. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, volume 6, pages 4696 – 4701, Anchorage, Alaska, USA, 2002.
- [110] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall., Upper Sadler River, NJ, 3rd edition, 2002.
- [111] Mojtaba Ahmadiéh Khanesar, Mohammad Teshnehláb and Mahdi Aliyari Shoorehdéli. Sliding mode control of rotary inverted pendulum. In *Proceeding of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation. MED apos ’07.*, pages 1–6, Athens, Grece, June 2007.

- [112] D. E. Koditschek. The application of total energy as a Lyapunov function for mechanical control systems. In J. Marsden, Krishnaprasad, and J. Simo, editors, *Control Theory and Multibody Systems*, volume 97, pages 131–158. AMS Series in Contemporary Mathematics, 1989.
- [113] A. D. Kuo, J. M. Donelan and A. Ruina. Energetic consequences of walking like an inverted pendulum: step-to-step transitions. *Exerc. Sport Sci Rev*, 33(2):88–97, 2005.
- [114] L. Landau and E. Lifchitz. *Curso de física teórica, Tomo I: Mecánica*. Ediciones MIR, Moscú., 1964.
- [115] E. Lefeber. *Tracking Control of Nonlinear Mechanical Systems*. Ph.D. Thesis, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, The Netherlands, 2000.
- [116] Wei Li, K.Tanaka and H. O. Wang. Acrobatic control of a pendubot. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(4):549–554, 2004.
- [117] F. Lin, W. Zhang and R. D.Brandt. Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3):343–351, 1999.
- [118] Z. Lin, A. Saberi, M. Gutmann and Y. A. Shamash. Linear controller for an inverted pendulum having restricted travel: A high-and-low gain approach. *Automatica*, 32(6):933–937, 1996.
- [119] G. Liu. *Modelling, Stabilizing Control and Trajectory Tracking of a Spherical Inverted Pendulum*. Ph.D. Thesis, The University of Melbourne, Australia, 2006.
- [120] G. Liu and L. Marconi. High-low gain redesign for a 4 DOF spherical inverted pendulum. In *17th IFAC World Congress*, pages 5921–5926, Seoul, Korea, 2008.
- [121] G. Liu, I. Mareels and D. Netic. Way point tracking of a spherical inverted pendulum. In *ICCA 2007, IEEE International Conference on Control and Automation*, 2007.

- [122] G. Liu, D. Nesic and I. Mareels. Modelling and stabilisation of a spherical inverted pendulum. In *16th IFAC World Congress*, pages 1–6, Prague, Czeck Republic, 2005.
- [123] G. Liu, D. Nesic and I. Mareels. Nonlinear stable inversion-based output tracking control for a spherical inverted pendulum. In *The 6th Asian Control*, 2006.
- [124] G. Liu, D. Nesic and I. Mareels. Non-local stabilization of a spherical inverted pendulum. *International Journal of Control*, 81(7):1035–1053, 2008.
- [125] R. Lozano, B. Brogliato, B. Maschke and O. Egeland. *Dissipative Systems Analysis and Control Theory and Applications*. Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, 2nd edition, 2007.
- [126] R. Lozano, P. Castillo and A. Dzul. Global stabilization of the PVTOL: real-time application to a mini-aircraft. *Int. Journal of Control*, 77(8):735–740, 2004.
- [127] R. Lozano and D. Dimogianopoulos. Stabilization of a chain of integrators with nonlinear perturbations: Application to the inverted pendulum. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 5191–5196, Maui, HI, 2003.
- [128] R. Lozano, I. Fantoni and D.J. Block. Stabilization on the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *System & Control Letter*, 40(3):197–204, 2000.
- [129] A. M. Lyapunov. Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. Fac. Sci Univ. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, 9:203–474, 1907:original paper published in 1893 in *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 1893: reprinted as vol. 17 in *Annals of Math studies.*, Princeton University Press, Princeton N. J., 1949.
- [130] Xiao Qing Ma and Chun-Yi Su. A new fuzzy approach for swing up control of pendubot. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, volume 2, pages 1001–1006, Anchorage Alaska, USA, 2002.

- [131] M. E. Magana and F. Holzapfel. Fuzzy-logic control of an inverted pendulum with vision feedback. *IEEE Transactions on Education*, 41(2):165–170, 1998.
- [132] D. I. Makarenko, Z. K. Avdeeva and V. Maximov. Cognitive approach to control of socio-economic systems security. In *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 899–903, The Hague, The Netherlands, 2004.
- [133] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control design: geometric, adaptive and robust*. Prentice-Hall, 1995.
- [134] S. Márka, A. Takamori, M. Ando, A. Bertolini, G. Cella, R. DeSalvo, M. Fukushima, Y. Iida, F. Jacquier, S. Kawamura, Y. Nishi, K. Numata, V. Sanibale, K. Somiya, R. Takahashi, H. Tariq, K. Tsubono, J. Ugas, N. Viboud, C. Wang, H. Yamamoto and T. Yoda. Anatomy of the TAMA SAS seismic attenuation system. *Classical and Quantum Gravity*, 19(7):1605–1614, 2002.
- [135] P. Martin, S. Devasia and B. Paden. A different look at output tracking: Control of a vtol aircraft. *Automatica*, 32(1):101–107, 1996.
- [136] H. Marzi. Multi-input fuzzy control of an inverted pendulum using an armature controlled DC motor. *Robotica*, 23(6):785–788, 2005.
- [137] H. Matsuhisa, R. Gu, Y. Wang, O. Nishihara and S. Sato. Vibration control of a ropeway carrier by passive dynamic vibration absorbers. *JSME International Journal. Series C, Mechanical systems, machine elements and manufacturing*, 38C(4):657–662, 1995.
- [138] J. C. Maxwell. On governors. *Proc. R. Soc. London*, 16:273–283, 1868.
- [139] O. Mayr. *The Originis of Feedback Control*. Cambrigde, MA: MIT Press, 1970.
- [140] F. Mazenc and L. Praly. Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11):1559–1578, 1996.

- [141] N. H. McClamroch and I. Kolmakovsky. A hybrid switched mode control for v/stol flight control problems. In *Proc. 35th IEEE conf. on Decision and Control*, pages 2648–2653, Kobe, Japan, 1996.
- [142] T. Miyagawa and Y. Ishida. Neural network-based model reference control for inverted pendulum. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, volume 1, pages 640–644, Perth, WA, Australia, 1995.
- [143] M. A. Moreno-Armendariz. Control adaptable del sistema no-lineal TORA usando redes neuronales dinámicas. Tesis de maestría, CINVESTAV, México, 1999.
- [144] R. M. Murray and S. S Sastry. Steering nonholonomic systems in chained form. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1121–1126, Brighton, UK, 1991.
- [145] S. Nair and N. E. Leonard. A normal form for energy shaping: Application to the Furuta pendulum. In *Proc. of the 41th Conf. on Decision and Control*, volume 1, pages 516–521, Vegas Nev, USA, December 2002.
- [146] F. Naranjo, A. Matta, J. C. Acosta and J. D. Colorado. Controlab: Laboratorio virtual de simulación de algoritmos de control no lineales para sistemas subactuados. In *VII Congreso de la Asociación Colombiana de Automática*, 2007.
- [147] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell Syst. Technol. J.*, 11:126–147, 1932.
- [148] K. Ogata. *Ingeniería De Control Moderna*. Pearson, 2003.
- [149] R. Olfati-Saber. Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole and rotating pendulum. In *Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control*, volume 2, pages 1174–1181, Phoenix, Az., 1999.
- [150] R. Olfati-Saber. Cascade normal forms for underactuated mechanical systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2162–2167, Sydney, NSW, Australia, 2000.



- [151] R. Olfati-Saber. Global stabilization of a flat underactuated system: the inertia wheel pendulum. In *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3764–3765, Orlando, FL, USA, 2001.
- [152] R. Olfati-saber. *Nonlinear Control Of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. Ph.D. Thesis, MIT, Cambridge, MA, 2001.
- [153] R. Olfati-Saber and A. Megretski. Controller design for the beam-and-ball system. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4555–4560, Tampa, FL, US, 1998.
- [154] G. Oriolo and Y. Nakamura. Control of mechanical system with second-order nonholomic constraints: Underactuated manipulators. In *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, volume 3, pages 2398–2403, Brighton, England, 1991.
- [155] G. Oriolo and Y. Nakamura. Free-joint manipulators: motion control under second-order nonholonomic constraints. In *Proc. IROS '91. IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, volume 3, pages 1248–1253, 1991.
- [156] R. Ortega and E. García-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control*, 10(5):432–450, 2004.
- [157] R. Ortega, A. Loría, P. J. Nicklasson and H. Sira-Ramirez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer-Verlag, 1998.
- [158] R. Ortega and M. W. Spong. Adaptive control of robot manipulators: A tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888, 1989.
- [159] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gómez-Estern and G. Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical system via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1218–1233, 2002.

- [160] R. Ortega, A. van der Schaft and B. Maschke. *Stability and Stabilization of Non-linear Systems*, volume 246 of *LNCIS*, chapter Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems via energy balancing, pages 239–260. Springer Berlin, 1999.
- [161] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4):585–596, 2002.
- [162] R. Ortega, A. J. van der Schaft, I. Mareels and B. Maschke. Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(2):18–31, 2001.
- [163] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley, 1962.
- [164] N. Qaiser, N. Iqbal and N. Qaiser. Stabilization of the acrobot via multiple sliding surface control. In *IMCAS'07: Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Instrumentation, Measurement, Circuits and Systems*, pages 175–180, Hangzhou, China, 2007.
- [165] F. Rampazzo and H. Sussmann. Set-valued differentials and a nonsmooth version of chow's theorem. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2001.
- [166] C. K. Reddy, W. W. Whitacre and C. A. Woolsey. Controlled lagrangians with gyroscopic forcing: an experimental application. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, volume 1, pages 511 – 516, Boston, Massachusetts, USA, 2004.
- [167] E. J. Routh. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. London: Macmillan & Co., 1877.
- [168] E. J. Routh. *Dynamics of a system of rigid bodies.*, page 371. Dover, New York,, 7th edition, 1960.

- [169] F. Salas, J. Aracil and F. Gordillo. Control de un péndulo invertido usando métodos de diseño no lineales. In *XXIV Jornadas de Automática.*, volume 24, 2003.
- [170] R. Sepulchre, M. Janković and P. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag,, 1997.
- [171] D. Seto and J. Baillieul. Control problems in super-articulated mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2442–2453, 1994.
- [172] J. Shen, A. K. Sanyal, N. A. Chaturvedi, D. S. Bernstein and N.H. McClamroch. Dynamics and control of a 3D pendulum. In *Proc. of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 323–328, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [173] A. S. Shiriaev, H. Ludvigsen and O. Egeland. Swinging up the spherical pendulum via stabilization of its first integrals. *Automatica*, 40(1):73–85, 2004.
- [174] A. S. Shriaev, A. Pogromsky, H. Ludvigsen and O. Egeland. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 10:283–300, 2000.
- [175] H. Sira-Ramírez and S. K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York, NY, USA, 2004.
- [176] H. Sira-Ramírez and O. Llanes-Santiago. Sliding mode control of nonlinear mechanical vibrations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122(4):674–678, 2000.
- [177] J. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [178] E. D. Sontag. Some new directions in control theory inspired by systems biology. *IEE Proceedings Systems Biology*, 1(1):9–18, 2004.
- [179] E. D. Sontag. Molecular systems biology and control. *European journal of control*, 11(4-5):396–435, 2005.

- [180] E. D. Sontag. Molecular systems biology and control: A qualitative-quantitative approach. In *44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC apos;05.*, pages 2314–2319, Seville, Spain, 2005.
- [181] M. W. Spong. On the robust control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-37,(11):1782–1786, November 1992.
- [182] M. W. Spong. Swing up control of the acrobot. In *1994 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2356–2361, 1994.
- [183] M. W. Spong. The swing up control problem for the acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(1):49–55, 1995.
- [184] M. W. Spong. Energy based control of class of underactuated mechanical systems. In *IFAC World Congress*, San Francisco, CA, 1996.
- [185] M. W. Spong. *Control Problems in Robotics and Automation*, volume 230, chapter Underactuated mechanical systems, pages 135–150. Springer Berlin / Heidelberg, London, UK, 1998.
- [186] M. W. Spong and D. J. Block. The pendubot: a mechatronic system for control research and education. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 555–556, New Orleans, USA, 1995.
- [187] M. W. Spong, P. Corke and R. Lozano. Nonlinear control inertial wheel pendulum. *Automatica*, 37:1845–1851, 2001.
- [188] M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006.
- [189] M. W. Spong and L. Praly. Control of underactuated mechanical systems using switching and saturation. In Springer-Verlag, editor, *Proceedings of the Block island workshop on control using logic based switching*, 1996.

- [190] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 1989.
- [191] Ilaria Taurasi. Inverted pendulum studies for seismic attenuation. Surf final report, California Institute of Technology, 2005.
- [192] A. R. Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *System & Control Letter*, 18(3):165–171, 1992.
- [193] A. R. Teel. Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems. In *IFAC NOLCOS'92 Symposium*, pages 269–374, 1992.
- [194] A. R. Teel. Semi-global stabilization of the ‘ball and beam’ using ‘output’ feedback. In *Proceeding of the American Control Conference*, San Francisco, CA, USA, 1993.
- [195] A. R. Teel. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control system with saturation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 41(9):1256–1270, 1996.
- [196] A. R. Teel and L Praly. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 33:1443–1488, 1995.
- [197] P. Tsiotras, M. Corless and M.A. Rotea. An  $l_2$  disturbance attenuation approach to the nonlinear benchmark problem. In *Proceedings of the American Control Conference, 1995.*, volume 6, pages 4352–4356, Seattle, WA, USA, 1995.
- [198] A. J. van der Schaft.  *$L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2000.
- [199] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. SIAM, 2nd edition, 2000.
- [200] A. Viguria, A. Prieto-Yerro, M. Fiacchini, R. Cano, F. Rubio, J. Aracil and C. Canudas de Wit. Desarrollo y experimentación de un vehículo basado en

- péndulo invertido (PPCar). *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)*, 3(4):54–63, 2006.
- [201] C. J. Wan, D. S. Bernstein and V. T. Coppola. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4024–4029, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994.
- [202] Q. Wei, W. P. Dayawansa and W. S. Levine. Nonlinear controller for an inverted pendulum having restricted travel. *Automatica*, 36(6):841–850, 1995.
- [203] S. Weibel. *Applications of qualitative methods in the nonlinear control of superarticulated mechanical systems*. Ph.D. Thesis, Boston University, Boston, Massachusetts, 1997.
- [204] W. Wenqing and F. Cheong. Using system dynamics to simulate the strategic planning of the mobile commerce terminal (MCT) industry and mobile commerce diffusion. In *International Conference on Mobile Business, 2005. ICMB 2005.*, pages 420–426, Sydney, Australia, 2005.
- [205] M. Wiklund, A. Kristenson and K. J. Åström. A new strategy for swinging up an inverted pendulum. In *Proc. IFAC 12th World Congress*, volume 9, pages 151–154, Sydney, Australia, 1993.
- [206] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems part i: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45(5):321–351, 1972.
- [207] J. C. Willems. 1696: the birth of optimal control. In *Proceedings of the 35th IEEE Decision and Control*, volume 2, pages 1586–1587, Kobe, Japan, 1996.
- [208] O. Wolkenhauer, M. Ullah, P. Wellstead and K. Cho. The dynamic systems approach to control and regulation of intracellular networks. *FEBS Letters*, 579(8):1846–1853, 2005.

- [209] C. Woolsey, C. K. Reddy, A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard and J. E. Marsden. Controlled lagrangian systems with gyroscopic forcing and dissipation. *European Journal of Control*, 10(5):478–496, 2004.
- [210] C. Xu and X. Yu. Mathematical modeling of elastic inverted pendulum control system. *Journal of Control Theory and Applications*, 2(3):281–282, 2004.
- [211] R. Xu and Ümit Özgüner. Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 44(1):233–241, 2008.
- [212] R. Yang, Y Kuen and Z. Li. Stabilization of 2-DOF spherical pendulum on x-y table. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on control applications*, pages 724–729, Anchorage, Alaska, USA, 2000.
- [213] H. Ye, H. Wang and H. Wang. Stabilization of a PVTOL aircraft and an inertia wheel pendulum using saturation technique. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(6):1143–1150, 2007.
- [214] D. V. Zenkov, A. M. Bloch, N. E. Leonard and J. E Marsden. Matching and stabilization of low-dimensional nonholonomic systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1289–1294, Sydney, NSW, Australia, 2000.
- [215] J. Zhao and M. W. Spong. Hybrid control for global stabilization of the cart pendulum system. *Automatica*, 37(12):1941–1951, 2001.
- [216] Y. Zheng and Y. Jing. Fuzzy variable structure control for acrobot based on T-S model. In *2005 IEEE International Conference Mechatronics and Automation*, volume 2, pages 842–846, 2005.
- [217] F. Zonfrilli, D. Wollherr and Y. Nakamura. Walking control of the humanoid UT-Theta. In *Proceedings, 12th International Conference on Advanced Robotics, 2005. ICAR '05*, pages 698–704, Seattle, WA, 2005.