



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

Diseño de controladores robustos para sistemas electromecánicos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :
DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

JULIO ALBERTO MENDOZA MENDOZA

DIRECTORES DE TESIS:

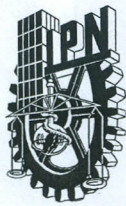
DR. CARLOS AGUILAR IBÁÑEZ

DR. JORGE DÁVILA MONTOYA



MEXICO, D.F.

MARZO DE 2016



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 12:00 horas del día 15 del mes de diciembre de 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

Centro de Investigación en Computación

para examinar la tesis titulada:

“Diseño de controladores robustos para sistemas electromecánicos”

Presentada por el alumno:

MENDOZA

Apellido paterno

MENDOZA

Apellido materno

JULIO ALBERTO

Nombre(s)

Con registro:

B	1	2	1	0	0	5
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

aspirante de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez

Dr. Jorge Ángel Dávila Montoya

Dr. Juan Humberto Sossa Azuela

Dr. Juan Carlos Chimal Eguía

Dra. Elsa Rubio Espino

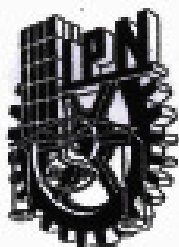
Dr. Ricardo Barrón Fernández

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN
EN COMPUTACIÓN
DIRECCIÓN

Dr. Luis Alfonso Villa Vargas




INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 24 del mes Febrero del año 2016,
el (la) que suscribe Julio Alberto Mendoza Mendoza alumno (a) del Programa
de Doctorado en Ciencias de la Computación con número de registro
B121005, adscrito a Centro de Investigación en Computación,
manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr.
Carlos Aguilar Ibáñez; Dr. Jorge Dávila Montoya y cede los derechos del trabajo intitulado
Diseño de controladores robustos para sistemas
electromecánicos, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión,
con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del
trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido
escribiendo a la siguiente dirección aladegabriel@hotmail.com. Si el
permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del
mismo.

Julio Alberto
Mendoza
Mendoza - 

Nombre y firma

Resumen

Este documento muestra el diseño y simulación de controladores robustos, basados en técnicas de modos deslizantes y saturaciones para la ejecución de diversas tareas en sistemas electromecánicos subactuados, teniendo como principales bancos de prueba al carro péndulo y al motor de corriente directa con péndulo simple rígido. Se muestra una técnica secuencial basada en saturaciones para la estabilización de sistemas con estructura de cascada, se parte de un ejemplo trivial de primer orden, se escala al motor DC y finalmente se llega a su generalización a sistemas de orden enésimo de tipo cascada de integradores con perturbaciones, clasificación en la cual encajan sistemas como el carro péndulo, el péndulo de Furuta, el sistema bola-viga y en general muchos otros del tipo no electromecánico, a los que pueda ser asociada esta forma de linealización parcial. Asimismo se propone una estrategia de control adaptable para obtener una estimación de las perturbaciones propias y externas al sistema, esto es logrado mediante la incorporación de un observador basado en modos deslizantes, la implementación de este último controlador se realizó en un prototipo experimental ubicado en las instalaciones del CINVESTAV. Todos los resultados propuestos son respaldados con publicaciones en revistas arbitradas y congresos nacionales e internacionales.

Abstract

This document shows and develops robust control techniques inspired by sliding modes and saturation techniques, the objective is to implement a wide range of tasks by means of electromechanical underactuated systems, the main test bed systems are the inverted pendulum on a cart and DC motor with an attached rigid pendulum. Is offered a sequential technique based on saturations for establishing cascade structure systems, starting from a trivial one degree system, scaling to a DC motor and finally reaching to n-order integrator cascade systems with perturbations, mathematical classification where is founded the cart pendulum system, the Furuta pendulum, the ball and beam system and so far, many other including non electromechanical systemes but partially linearized with feedback techniques. As well is proposed an adaptative control strategy for stimating inner an outer perturbations based on sliding mode observers, particulary, this counts with experimental results in a real DC motor with pendulum from CINVESTAV. As it was written, all this proposals are supported by international and national arbitrated publications and congresses.

Agradecimientos

Agradezco al Instituto Politécnico Nacional y al Centro de Investigación en Computación la oportunidad otorgada para la realización de mi doctorado. Igualmente, agradezco al CONACYT y al BEIFI por el apoyo económico brindado y sin el cual esta tesis no hubiera podido ser desarrollada. Se agradece al pueblo de México que, pese a su sufrimiento, aún puede generar personas de valor.

Agradezco al Dr. Carlos Aguilar Ibáñez y al Dr. Jorge Dávila Montoya por haber sido mis asesores, dedicándome su espacio y tiempo, y por haberme concedido una gran cantidad de conocimientos y oportunidades de publicación. Gracias a ello tengo un mejor panorama interpretativo y la capacidad de asimilar conocimientos de muy alta complejidad. Agradezco particularmente al Dr. Barrón por haberme mostrado muchas maneras novedosas de realizar ciencia. Esta persona es un importante dato que me fomentó el interés por la investigación, como él dice: "La ciencia, más allá de ser un conocimiento externo, debería ser un arte proveniente de cada ser. La ciencia debería ayudar a crecer a cada individuo, más allá de buscar una meta material y efímera". Agradezco al Dr. Sossa, cuya ayuda y consejo, contribuyen a considerarlo como mi tercer asesor.

Ante todo agradezco y dedico esta tesis a mi abuelita, mi razón y ganas.

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Motivación y objetivos	8
1.2. Justificación	9
1.3. Consideraciones	11
2. Estado del arte	13
2.1. Comparación de los métodos desarrollados con el estado del arte	17
3. Marco teórico	21
3.1. Sistemas electromecánicos	21
3.1.1. Modelado de un sistema mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange	21
3.1.2. Sistemas mecánicos subactuados	22
3.1.3. Transformaciones lineales de sistemas subactuados	23
3.2. Modelado matemático de algunos sistemas subactuados	30
3.2.1. Motor de corriente directa	31
3.2.2. Carro péndulo	33
3.3. Nociones de estabilidad	35
3.3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	37
3.3.2. Teoremas de estabilidad según Lasalle y Barbalat	39
3.3.3. Estabilidad en tiempo finito	40
3.3.4. Escape en tiempo finito	41
3.3.5. Estabilidad de sistemas lineales	42
3.3.6. Función Lipschitziana	43
3.4. Nociones de control	43
3.4.1. Control por modos acotados	45
4. Contribuciones de la tesis	48
4.1. Controlador no lineal robusto tipo PI	48
4.2. Controlador no lineal robusto tipo PD con observador por modos deslizantes	56
4.3. Estabilización del carro péndulo mediante cascada de integradores	60
5. Resultados, conclusiones, recomendaciones y trabajo a futuro	65
5.1. Resultados	65
5.1.1. Publicaciones	65
5.1.2. Congresos	65

5.1.3. Adicionales	66
5.2. Conclusiones	66
5.3. Trabajo a futuro	68
5.4. Recomendaciones	69
A. Teoremas, herramientas y consideraciones utilizadas	70
A.1. Desigualdad cuadrática de Young	70
A.2. Polinomios Hurwitz	70
A.3. Perturbación evanescente	71
A.4. IDA-PBC vs efectos disipativos	71
A.5. Estabilidad parcial del sistema en q_3 y q_4	73
B. Aplicaciones del control a la teoría de sistemas computacionales	74
C. Tipos de perturbaciones vistas a lo largo de la tesis	75
D. Abstracción concentrada	76

Índice de figuras

1.1. Pose en 2D y 3D	10
2.1. Boceto jerárquico de controladores comunes	17
2.2. Oscilador armónico amortiguado diagramas de fase, tiempo y 3D	18
2.3. Intuición de modos acotados	18
2.4. Modos deslizantes, diagramas de fase, tiempo y 3D	19
3.1. Motor DC, diagrama electromecánico	22
3.2. Convertidor boost Sira-Ramirez	26
3.3. Clasificación de sistemas subactuados segun Olfati-Saber	28
3.4. Sistemas I, IIa y IV	29
3.5. Carro Péndulo	34
3.6. Estabilidad (izq.) y estabilidad asintótica (der.)	36
3.7. Estable (izq.) contra inestable (der.)	36
3.8. Punto de silla	37
3.9. Función de Lyapunov y curva de nivel (plano fase)	39
3.10. Ilustración del teorema L-B-K	40
3.11. Funciones sigmoidales (tomado de wikipedia)	46
4.1. Simulación motor DC con péndulo invertido	55
4.2. Tarea sinusoidal simulada	59
4.3. Tarea sinusoidal real	59
4.4. Tarea suma sinoidal simulada	60
4.5. Tarea suma sinoidal real	60
4.6. Estabilización del carro péndulo comparativa con Orlov	64
5.1. PVTOL seguimiento de trayectoria	67
D.1. Abstracción concentrada aplicada a electromagnetismo	76

Acrónimos y simbología

PID : Proporcional Integral Derivativo

GDL : Grado de Libertad

PD : Proporcional Derivativo

IDA : Asignación de Interconexión y Amortiguamiento

PBC: Control Basado en Pasividad

DC : Corriente Directa

TORA : Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional

L-B-K : Lasalle-Barbashin-Krasovskii

$\dot{*} = \frac{d*}{dt}$

$*^T = \text{Transpuesta}(*)$

Palabras clave

Control Robusto; Modos Acotados; Sigmoidal; Modos Deslizantes; Subactuados; Perturbaciones; Anidamiento; Lyapunov; Perturbaciones no acopladas

Glosario

Control : Aplicación de la teoría de sistemas para inducir comportamientos deseados en sistemas físicos [153, 150, 184].

Grado de Libertad: El número mínimo de estados que se necesitan para determinar completamente el modelo físico de un sistema [152, 200, 235, 184].

Actuador: Dispositivo capaz de transformar energía hidráulica, neumática o eléctrica en la activación de un proceso con la finalidad de generar un efecto sobre un proceso automatizado [44, 40, 184].

Observador: Son algoritmos de estimación, que calculan propiedades no medibles de un sistema a partir de sus entradas y salidas. Pueden ser de estados, paramétricos y de perturbaciones [219, 62].

Filtro : Es un discriminador de dinámicas ruidosas o parasitas las cuales, en general, poseen un comportamiento frecuencial mucho mayor que el sistema donde inciden [183, 119].

Estabilización: Comportamiento de los sistemas para responder con una salida de magnitud limitada ante una entrada también limitada [111, 223].

Región de atracción: Para un sistema estable, es el conjunto de todos los puntos que verifican que las trayectorias que se inician en ellos, convergen al origen [111, 223], es decir $R_o = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0\}$

Método de Lyapunov: Conceptos de estabilidad para sistemas dinámicos propuestos por Aleksandr Lyapunov en 1892 [133, 184].

Seguimiento: Problema fundamental del control automático donde el objetivo es que las variables a controlar sigan un comportamiento variante en el tiempo, predefinido por el operador sin importar la incidencia de perturbaciones [219, 104].

Regulación: Problema fundamental del control automático, donde el objetivo es hacer que las variables a controlar, lleguen a un valor deseado y permanezcan en este valor sin importar la incidencia de perturbaciones [219, 104].

Punto de equilibrio: En la teoría de las ecuaciones diferenciales, se define como aquel punto x_0 que dada una ecuación $\dot{x} = f(x)$, satisface que $f(x_0) = 0$, se clasifican en estables, inestables o puntos de silla [219, 235, 28, 65].

Punto de operación : Configuración dinámica que satisface características de uso y diseño también llamadas especificaciones de operación, un sistema puede tener múltiples puntos de operación que satisfagan un requerimiento dado, el más común e importante de ellos es el punto de equilibrio llamado estado estable, son de suma importancia para efectuar linealización y planificación de trayectorias [219, 185].

Pasividad: Capacidad de un sistema para consumir pero no producir energía [162, 26, 101, 184].

Sigmoide : Funciones matemáticas acotadas, con forma de "s", caracterizadas por poseer una primer derivada o aproximación de derivada con simetría par [93, 184].

Saturación: Un tipo de función sigmoideal que en su forma simétrica respecto a ordenadas y abscisas es definida como $y = S_k[x] = x$ si $|x| < \varsigma$; de otro modo $y = ksign(x)$, donde ς es un valor limite seleccionable en el eje horizontal y k , es un valor limite seleccionable para el eje vertical [68].

Linealización : Aproximación lineal de una función no lineal [146, 219].

Tiempo Finito: Se dice que un sistema $\dot{x} = f(x) + g(u)$ es estabilizable en tiempo finito, si existe una función u tal que el origen $x = 0$ del sistema en lazo cerrado es alcanzado en un modo no asintótico y generalmente dependiente de la estructura paramétrica de u [98, 161].

Perturbación: Variables incidentales, propias o ajenas al sistema, pero que pueden influir en su comportamiento y no se pueden controlar al menos en forma directa. Normalmente no son consideradas en el modelado y la simulación [111, 223].

Robustez: Es la capacidad de un sistema o controlador para sobrellevar los efectos de incertidumbres no modeladas [83, 37, 254].

Adaptabilidad: Es la capacidad de una ley de control para estimar los parámetros variables o desconocidos en un proceso de forma numérica y mantener su adecuado funcionamiento [117, 222, 31].

Modos deslizantes: Es un método de control no lineal que altera la dinámica de un sistema mediante la inducción de señales discontinuas, forzando al sistema a deslizarse en una sección límite de su configuración, denominada "superficie de deslizamiento". Se dice que las señales de control son discontinuas o de estructura variable porque intercalan de una configuración a otra con base a la medición actual de los estados, siendo la llamada superficie de deslizamiento una zona de frontera entre dichas configuraciones [68, 214, 82, 241, 75].

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo trata sobre el objetivo general y los objetivos particulares de la tesis. Así mismo, presenta la justificación que da origen a este documento y las consideraciones hechas a lo largo del texto.

1.1. Motivación y objetivos

El objetivo principal de esta tesis consiste en el diseño, simulación y/o prueba experimental de controladores robustos ante cierto tipo de perturbaciones y, de forma muy concreta, a aquellas relacionadas con dinámicas no modeladas en las coordenadas libres de algunos sistemas subactuados, tal y como lo es la fricción lineal dinámica (ver apéndice A.4), siendo este diseño extensible desde casos muy particulares y simples, como lo es el motor de corriente directa, hasta sistemas de mayor complejidad, como lo es la familia de péndulos invertidos, teniendo como caso particular el carro péndulo [27, 180]. La demostración de estabilidad estará basada en el método de Lyapunov y otras técnicas compatibles con estructuras matemáticas similares a la de cierta clase de ecuaciones diferenciales del tipo Euler-Lagrange o Hamilton.

Objetivos particulares:

- Diseñar controladores robustos estables para el sistema de motor de corriente directa, extensibles al sistema electromecánico de péndulo invertido rígido de masa constante.
- Diseñar controladores robustos estables para el sistema mecánico subactuado de tipo carro péndulo.
- Emplear las metodologías de control por saturaciones, ya sean anidadas o paralelas.
- Emplear al menos un algoritmo de tipo adaptable y uno del tipo robusto para la compensación de perturbaciones endógenas y exógenas.

El presente documento se enfoca en el diseño de controladores robustos del tipo analítico (es decir, basados en herramientas del cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales) para un concreto grupo de sistemas electromecánicos, a saber, el motor de corriente directa y el carro

péndulo, no implicando que referidos controladores estén restringidos a dichos mecanismos; sin embargo, estos se eligieron de entre muchos otros por su fácil extensión a electromecanismos más complicados. A diferencia de la literatura revisada en el área de la teoría del control automático, esta tesis incluye el análisis de perturbaciones usualmente omitidas, tales como lo es el tratamiento de la fricción en las coordenadas subactuadas [51, 132]. Es de mencionarse que este tipo de perturbaciones suele ser referido como no acoplado o *unmatched* [68, 71]. Se entiende por perturbación acoplada a aquella que actúa en las mismas coordenadas que las variables de control y, por tanto, su efecto puede compensarse directamente. En contraparte, el efecto de las perturbaciones no acopladas, requiere de un proceso más complejo en el diseño del control, para lograr su atenuación o completa supresión.

Como es sabido, en el área del control automático, la robustez ante perturbaciones es uno de los retos más importantes, de ahí que existan dos importantes técnicas para contrarrestarlas: la adaptable, es decir, por efecto de compensación, y la robusta o por efecto de dominación. Ambos tipos de control son a su vez estudiados y divididos en cuatro subcategorías en [29, 30]. Las perturbaciones pueden ser debidas al propio sistema, al controlador utilizado o a la interacción de ambos, pueden provenir también de los sensores utilizados o incluso, y aún más preocupante, de dinámicas no modeladas.

Esta tesis presenta el diseño de tres tipos de controladores, uno de ellos compensa cierto tipo de perturbaciones acopladas y no acopladas mediante la inclusión de un observador basado en modos deslizantes a manera de mecanismo de adaptación; otro más aborda una técnica de control de tipo robusto, dado que, mediante el concepto de alta ganancia aplicado a funciones sigmoidales, muestra robustez por superioridad ante perturbaciones acopladas y no acopladas, en tanto se encuentren acotadas en magnitud; finalmente se aborda el diseño de un tercer controlador, también de tipo dominante, cuya principal característica es que permite compensar perturbaciones del tipo acoplado y no acoplado, a pesar de que éstas no exhiban acotamiento de amplitud, a condición de que sean positivas.

Como se comentó anteriormente, hasta este momento los trabajos previos excluyen partes de importancia nodular para el desempeño de los controladores. Una de ellas suele ser la perturbación por los efectos de distintos tipos fricción. De hecho, en el estado del arte referente a sistemas subactuados, se suele despreciar la fricción de las coordenadas no actuadas (ver apéndice A.4). Ello conlleva a muchas pérdidas de desempeño del controlador propuesto pues, de hecho, existen publicaciones que muestran cómo tal disipación puede desestabilizar al propio sistema [247, 246].

1.2. Justificación

Dos elementos fundamentales en el diseño de esquemas de control son el modelado y la síntesis de leyes de control. Esta tesis se enfoca al diseño de algoritmos de control para sistemas electromecánicos subactuados [157].

Se dice que un sistema con n variables de configuración, para el cual el vector de control tiene dimensión menor a n , es subactuado [200].

Para comprender el concepto de subactuación relativo al rubro mecánico es necesario definir el concepto de pose:

Pose, Fig(1.1), es la cantidad admisible de traslaciones y rotaciones de un objeto. En el mundo bidimensional, la pose está compuesta de tres grados de libertad: es decir, dos traslaciones y una rotación. En el tridimensional es de seis grados de libertad, es decir, tres traslaciones y tres rotaciones.

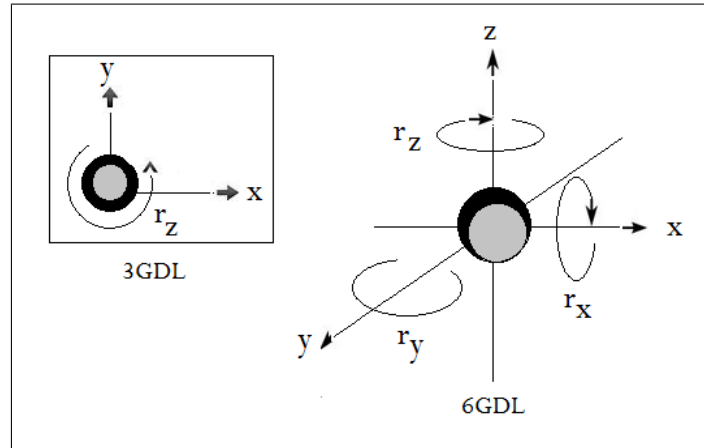


Figura 1.1: Pose en 2D y 3D

Los sistemas subactuados aparecen por alguna de las siguientes razones o combinación de las mismas: [144, 217, 90]:

- Naturaleza de la movilidad
- Fallo
- Economía

Cabe mencionar que en la naturaleza, explicado bajo el conocido principio de mínima acción, casi todos los seres vivos presentan múltiples tipos de subactuación [235].

La importancia de su estudio radica en que una gran clase de modelos presentan este fenómeno, de entre ellos se pueden mencionar las distintas configuraciones de vuelo de diversos aeromecanismos, el desplazamiento de la mayoría de los vehículos y el proceso de humano de caminado [43, 109].

Sí bien existe una enorme cantidad de trabajos enfocados al control de sistemas mecánicos subactuados, en su gran mayoría estos dividen la tarea de estabilización en dos segmentos: uno relativo a llevar al sistema en las proximidades de la zona de estabilización y el otro en mantenerlo alrededor de la misma. Ambas tareas son conocidas como *swing-up* y regulación alrededor de punto o trayectoria de operación según sea requerido (seguimiento y regulación). La presente tesis tiene por objetivo desarrollar controladores que logren ambas tareas mediante la aplicación de una sola ley de control, la cual por sí misma ya es de naturaleza conmutable.

La mayor contribución de esta investigación y sus publicaciones derivadas, consiste en la supresión, o al menos gran robustez ante el efecto de los términos de fricción desconocidos, así como ante perturbaciones externas o internas al sistema incidentes en las coordenadas subactuadas, de lo cual puede aseverarse que existe un área poco explotada a nivel de investigación, más aún, se propone su uso en algunas aplicaciones físicas muy conocidas y extensibles a modelos más complejos, por ejemplo, el carro péndulo y el motor de corriente directa.

La tesis se organiza de la siguiente forma: el capítulo 2 presentan un amplio estado del arte respecto a los temas tratados a lo largo de esta tesis; el capítulo 3, en su carácter de marco teórico, presenta a detalle la definición y representaciones matemáticas generales de los sistemas electromecánicos, así como nociones de control y estabilidad; el capítulo 4 contiene las contribuciones de esta tesis y, finalmente, en el capítulo 5 se abordan las conclusiones generales, trabajo a futuro y algunos pormenores de importancia.

1.3. Consideraciones

Se asume lo siguiente:

1. Los sistemas a analizar serán aquellos del tipo electromecánico subactuado clases I y II de la clasificación hecha por Olfati-Saber y extensibles bajo ciertas consideraciones a la clasificación IV [157]. Su modelo es obtenido al aplicar las técnicas de Euler-Lagrange o Hamilton.
2. Las perturbaciones son desconocidas pero acotadas.
3. Se dispone la retroalimentación de todos los estados del sistema, a excepción de que se indique lo contrario.
4. La estabilidad es estudiada mediante el método clásico de Lyapunov.
5. En todos los casos analizados, salvo cuando se indique lo opuesto, el subsistema mecánico es de acción mucho más lenta que el eléctrico, es decir, el comportamiento eléctrico puede omitirse.
6. Los sistemas analizados no poseen flexibilidad, es decir, son rígidos.
7. La acción de control y los sensores son lo suficientemente rápidos como para considerar un modelo en tiempo continuo mediante ecuaciones diferenciales.

8. Se asume transferencia de energía íntegra, es decir, no hay pérdidas por calor, sonido o cualquier otra forma de disipación que no sea la fricción.

Se profundizará en estas suposiciones en los capítulos subsecuentes.

Capítulo 2

Estado del arte

El presente capítulo aborda el estado del arte y una breve comparativa del contenido de este documento con respecto a otras publicaciones y tesis.

Sobre el modelado y descripción de sistemas electromecánicos subactuados, existe un considerable acervo [157, 101, 57]. Sobre el control, que es el tema medular de este trabajo, se debe partir con un análisis histórico, el cual dará la pauta a lo que conocemos por robustez.

El control es una subdisciplina científica enfocada en el diseño de sistemas programables y/o virtuales de comportamiento estable [219, 106, 48], para inyectarlos en sistemas reales tal que estos últimos adquieran un modo de operación deseado y, desde luego, también estable. Se dice que es una subdisciplina porque deriva de las matemáticas, la física y diversas ingenierías.

Uno de los elementos claves en control es el concepto de estabilidad. Sin duda el instinto de conservación es el primer sistema de control conocido; por ejemplo, de hacer calor excesivo buscamos enfriarnos, si nos enfriamos demasiado buscamos nuevamente calor, de esta manera es que logramos la estabilización de nuestra temperatura. No obstante, existen procesos donde la intervención humana es demasiado lenta o riesgosa tanto para el sistema como para el propio ser humano, es por ello que el control se ha automatizado, es decir, prescindido o reducido al mínimo la intervención del hombre utilizando en su lugar máquinas.

A continuación se exhibe una cronología del control automático basada en la clasificación de [2]:

- Control ON/OFF: Como ya se mencionó, todo ser vivo lo lleva implícito, pero sus aplicaciones más relevantes en procesos y sistemas tuvieron lugar durante la revolución industrial, porque prácticamente los controladores eran mecanismos complejos dedicados a regular el flujo de vapor en barcos y trenes. Es conocido el regulador centrífugo de Watt desarrollado en 1788 [36]; aunque es la familia de controladores más vieja y muchos pudiesen considerarla deficiente, en la actualidad ha dado lugar al desarrollo de controladores inteligentes de tipo difuso o neuronal.
- Estabilidad de ecuaciones diferenciales: Durante mucho tiempo se desarrolló teoría matemática totalmente deslindada del control como hoy lo conocemos, de hecho, las

ecuaciones diferenciales actualmente son el equivalente matemático del control. Toda esta teoría simplemente buscaba encontrar solución a ecuaciones diferenciales para aplicaciones específicas, eso o cuando menos indicar que la ecuación diferencial y, desde luego, el sistema físico asociado poseían puntos estables, fue entonces que se desarrollaron técnicas cualitativas y cuantitativas. En 1868, por ejemplo, Maxwell creó un modelo matemático para dar explicación al regulador de Watt; Routh, en 1877, diseñó un criterio de estabilidad, en 1893, Lyapunov publicó su teoría de estabilidad; en 1895 Hurwitz inventa un método tabular de estabilidad compatible con Routh, en 1932, Nyquist diseñó métodos para demostrar estabilidad basados en frecuencia; en 1940, Bode crea un método gráfico compatible con las ideas de Nyquist, en 1948, Evans desarrolla las bases de lo que hoy en estabilización lineal se conoce como lugar geométrico de las raíces; en 1957 Bellman extiende los conceptos previos a sistemas discretos y con retardos de transmisión; en 1958, Pontryagin introduce el cálculo variacional, en 1960 Kalman da la pauta para expandir todo el conocimiento previo a los sistemas naturales (es decir, no lineales). Véase [36, 35, 34].

- Control PID: Casi por más de un siglo, a partir del regulador de Watt, el control se estancó en la teoría ON/OFF. No fue sino hasta 1911 que Elmer Sperry diseñó el primer controlador PID y, aún más, hasta 1922 Nicolas Minorsky publicó un artículo formal sobre el funcionamiento del PID[36, 35, 34].

Este es el primer control robusto del cual se tiene conocimiento. Se dice que es robusto, porque presenta cierto grado de insensibilidad respecto a perturbaciones de tipo interno y/o externo.

Una perturbación es cualquier acción indeseable que puede o no ser medible sobre el sistema. Toda perturbación ocurre debido a que en todos los modelos matemáticos conocidos existe un grado de incertidumbre no modelada, que suele generar efectos adversos al desempeño para el cual se idealizaron los diseños.

La robustez del PID radica en que es un control de tipo dominante, es decir, mediante la adecuada selección de ganancias, se fuerza al sistema a tener un efecto abrumativo respecto a las perturbaciones. Sin embargo, si las perturbaciones ocurren muy rápido o presentan picos de magnitud grande (por ejemplo impulsos), el PID pierde parcial o totalmente su robustez.

Otra ventaja que mantuvo por algunas décadas al PID como controlador líder es que para su aplicación sólo necesita de la medición del error de operación y de ningún parámetro asociado al sistema, por ello incluso se le nombró “controlador universal” [151, 153, 116, 150, 25, 148].

- Controladores Adaptables: Con ellos se desarrolla la robustez compensativa, es decir, técnicas que intentan cancelar el efecto de las perturbaciones incluyendo una acción opuesta en magnitud, esto significa que en vez de dominar las perturbaciones como en el caso del PID, esta familia de controladores pretende contrarrestarlas.

Quizás los primeros tipos de control adaptable fueron aquellos de compensación gravitatoria. Dado que algunos brazos manipuladores venían solo con controladores PD, el efecto de

la gravedad mermaba su desempeño; no obstante este efecto podía medirse y ello permitía obtener un estimado de las fuerzas gravitatorias, este estimado se inyectaba a los motores y con ello se realizaba una compensación [110, 228, 59, 205, 206, 215]

Este tipo de controladores tiene la desventaja de requerir parcial o totalmente el modelo matemático del sistema a controlar y esto, como consecuencia, los vuelve particularizantes. Ello implica un rediseño del control para cada sistema e incluso para cada condición de operación de un mismo sistema.[222, 99, 110, 117, 21, 254, 60, 165, 62, 61].

- Controladores por modos deslizantes: Surgen en los años 60 como un esfuerzo por combinar la universalidad y versatilidad del PID con el funcionamiento intuitivo y de alta velocidad de los controladores ON/OFF (eso y el hecho de que la tecnología de la época se basaba en relevadores cuyo principio de operación solo admite encendido y apagado).

Técnicamente pueden ser considerados como PIDs con ganancia “infinita”, de ahí su robustez, pues son altamente dominantes frente a las perturbaciones, en semejanza al PID también pueden ser considerados controladores universales, dado que para su operación no es necesaria la inclusión del modelo matemático sino simplemente proveer la información del error, en particular, sólo el signo, no la magnitud.

El diseño de controladores por modos deslizantes [240, 131, 241, 214, 82, 68] se basa en la función signo y ello mismo es su desventaja dado que el comportamiento de efecto discontinuo de esta función, así como detalles concernientes a no derivabilidad, producen fenómenos inherentes, según sea el sistema en que se aplique, ya sea de castaño (*chattering*), pérdida por calor y/o vibraciones. [173]).

- Controladores por moldeo de energía:

En 1981 Takegaki y Arimoto introducen el concepto de control por moldeo de energía [234].

En este tipo de controladores la robustez no es tan alta dado que son variantes del PID (de hecho consideran al PID como un caso particular). Estos controladores requieren información específica del sistema para el cual son diseñados, sin embargo, permiten un acople eficiente de la energía suministrada, respecto a la requerida para la realización de una tarea, así como un desempeño relativamente suave, en muchas ocasiones son particularizantes y solo funcionan para un sistema o una familia de sistemas para los cuales sean diseñados. Son altamente complejos, tanto de calcular como de implementarse.

En [166], se demuestra que la familia de controladores por moldeo de energía es un caso particular de la familia IDA-PBC (Interconnection and damping assignment, passivity based control, siglas en ingles de Controlador basado en pasividad mediante la asignación de interconexión y amortiguamiento) [88, 204, 67, 27, 200, 72, 164, 86, 166, 168, 53, 199, 103, 166, 90, 42, 41, 66, 33].

Cabe mencionar que un producto adicional de esta tesis respecto al tema de IDA-PBC puede hallarse en [12]

Otras lecturas de interés y aplicaciones al respecto de mencionada publicación son [78, 45, 239, 3, 190, 211, 118, 170, 20, 24, 39, 79, 81, 23, 80]

Estos controladores se basan en el principio de transferencia de energía [162, 26, 204, 192, 74, 101, 138].

- Controladores por modos acotados:

La razón de destacar esta clase de controladores se debe, a que en mayor medida serán del tipo a desarrollar y diseñar a lo largo de esta tesis. En los noventas, como un intento de suavizar el efecto de los modos deslizantes y mantener sus bondades, se desarrolló la investigación de sustitución de la función signo por funciones sigmoiales, las cuales tienen un comportamiento semejante a la función signo pero son derivables y suaves. Ello de algún modo ayudo a reducir los efectos Zeno y chattering y se inició el área de investigación en modos acotados. El nombre se debe a que toda función sigmoial tiene límite inferior y superior a manera de una letra s, este tipo de controladores terminó siendo una generalización de los modos deslizantes, paradójicamente solo los modos deslizantes permiten la estabilización en tiempo finito [68, 161, 225, 232, 250, 231, 229, 214].

Existen 2 tipos de modos acotados, los polinomiales y los anidados, esto se abordara en capítulos subsecuentes [198, 50, 7, 238, 236, 237, 208, 201, 186, 73].

Las definiciones previas permitirán realizar un diagrama de generalidad para el estudio de los controladores robustos Fig(2.1) (Nótese que s representa a una función sigmoial)

Puede verse que un controlador robusto puede o no ser adaptable, pero todo control adaptable ya es robusto al menos ante perturbaciones internas y cierto tipo de perturbaciones exógenas acotadas. Puede también notarse que actualmente existen dos tendencias: buscar una familia general de controladores robustos y buscar controladores robustos con el desempeño más suave y eficiente, estos objetivos aparentemente se oponen.

Un controlador puede en la generalidad de los casos asociarse con el diseño de osciladores armónicos amortiguados, por ejemplo, sí tomamos el controlador más conocido (PD) podemos observar que es asociable a un sistema resorte amortiguador [46, 219].

PD	Sistema Resorte Amortiguador
$K_p e + K_d \frac{de}{dt}$	$kx + b \frac{dx}{dt}$

El desempeño de una ecuación diferencial puede juzgarse gráficamente con el diagrama de fase, el cual es básicamente una ilustración de los estados del sistema. Un sistema resorte amortiguador asociado a los controladores mencionados en el párrafo previo adopta el conocido diagrama de fase correspondiente a una espiral decreciente. Fig(2.2)

Ahora bien, los modos acotados consisten en aplastar la trayectoria en espiral. Fig(2.3). Esto se logra introduciendo el signo de las magnitudes, con ello se obtiene la llamada superficie de deslizamiento. Fig(2.4)

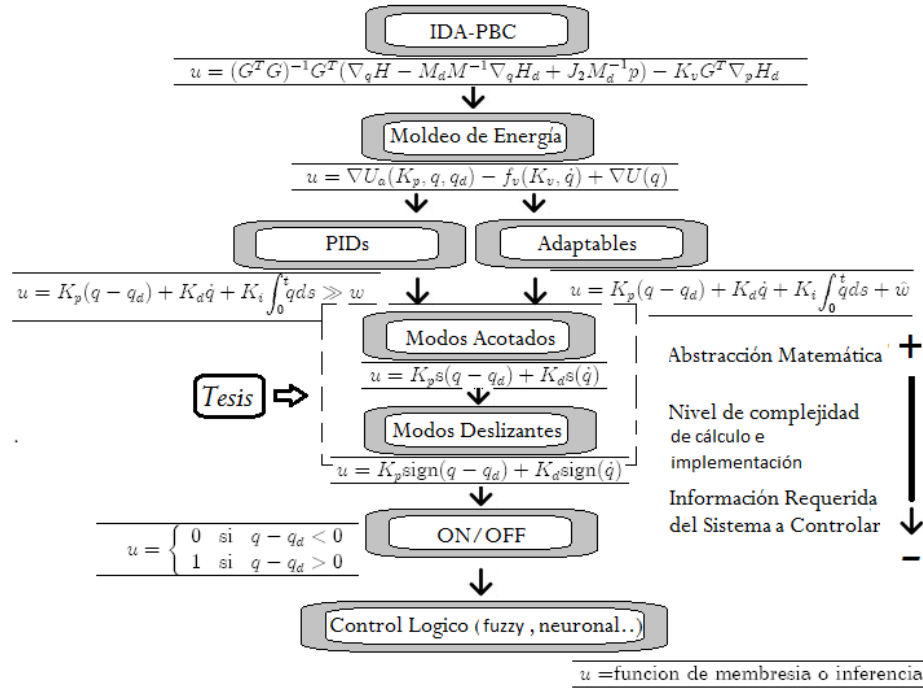


Figura 2.1: Boceto jerárquico de controladores comunes

2.1. Comparación de los métodos desarrollados con el estado del arte

Aunque la cantidad de métodos para el control de los sistemas subactuados es mucho más extenso que los aquí descritos, se opta por describir aquellos que representan la mayoría y por tanto cobran amplia difusión, relevancia y respaldo científico, es decir, están presentes en al menos nueve de cada diez publicaciones, estos son los siguientes:

Método IDA-PBC: Como fue descrito en la sección previa, es una técnica basada en la pasividad y utiliza como herramienta de diseño la teoría de Lyapunov, se sustenta en la interconexión de un sistema real con uno virtual a través del moldeo de energía utilizando como medio el canal de control.

-Ventaja: En general las leyes de control modeladas mediante este método suelen ser suaves (no presentan efectos de chattering).

-Desventajas y comparativa frente a nuestro diseño: Este método no es necesariamente robusto, dado que en la mayoría de los casos es una generalización del PD más cierto tipo de compensación de modelo, por otra parte, demanda un conocimiento preciso del sistema a controlar, por lo cual es sensible a variaciones de modelo, así como a la incidencia de perturbaciones y fenómenos disipativos como la fricción lineal y no lineal, para demostrar esto cabe recordar que el método IDA-PBC es descrito por sus creadores como una técnica de transformación entre puertos y es en ese carácter de transformador ideal que no contempla la

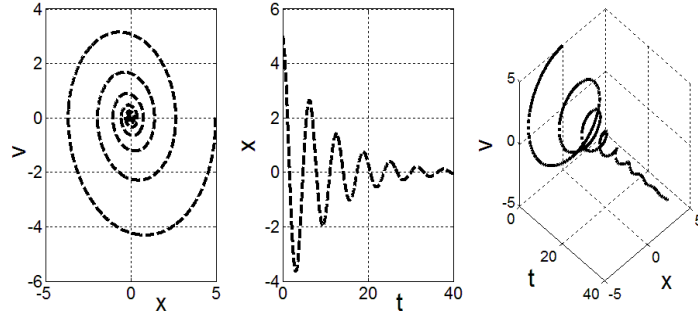


Figura 2.2: Oscilador armónico amortiguado diagramas de fase, tiempo y 3D

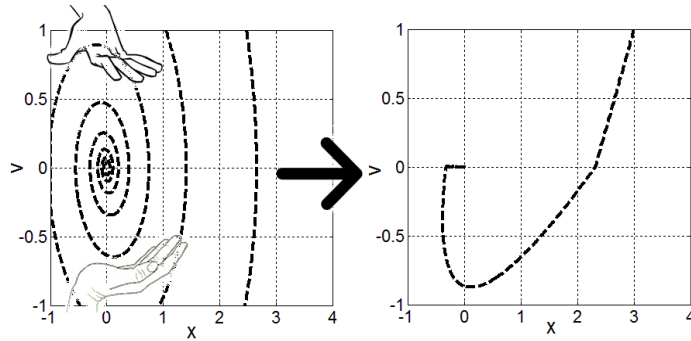


Figura 2.3: Intuición de modos acotados

incidencia de disipación energética [89, 204, 169] (véase apéndice A.4). Cabe mencionar que nuestro diseño sí contempla estos efectos, sin embargo el IDA-PBC se ha modificado para incluir elementos adaptables y con ello ser un poco más robusto [248, 200, 33], otra gran desventaja es la complejidad matemática de diseño e implementación.

Backstepping: Es un método de control basado en la anidación de funciones de Lyapunov siempre y cuando el sistema a controlar sea linealizable por retroalimentación de bloques estrictamente controlables [113, 187, 253, 139].

-**Ventaja:** Es una metodología intuitiva, dado que el controlador se diseña como una secuencia de estabilización en cascada.

-**Desventajas y comparativa frente a nuestro diseño:** Este método solo puede utilizarse si el sistema adopta la estructura matemática requerida (linealizable por retroalimentación de bloques estrictamente controlables) y esto no es posible en muchos sistemas físicos, de hecho la inclusión de cierto tipo de perturbaciones, le quita dicha propiedad a un sistema, sin embargo, nuestros métodos explotan, en algunos diseños, la capacidad de vencer cierto tipo de perturbaciones debido a su naturaleza acotada o evanescente, para ello se aplica una técnica robusta como lo son las saturaciones o los modos deslizantes y el sistema restante es controlado via *backstepping*.

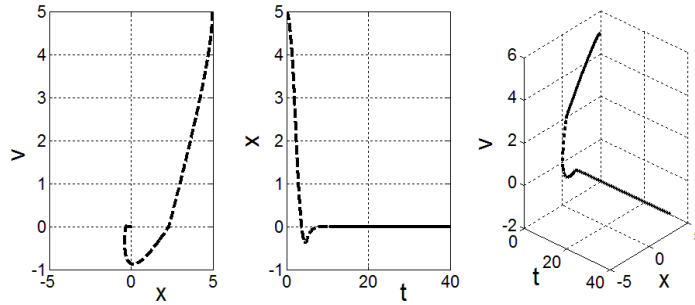


Figura 2.4: Modos deslizantes, diagramas de fase, tiempo y 3D

Modos deslizantes y acotados: Son un tipo de control robusto basados en control de estructura variable y limitada.

-Ventajas: Son técnicas que requieren un conocimiento del modelo de nivel medio a nulo, altamente insensibles a perturbaciones (sobre todo acopladas), adicionalmente son compatibles para su implementación con sistemas reales, dado que contemplan cotas de potencia y como sabemos todos los actuadores físicos tienen límites de fuerza y velocidad

-Desventajas y comparativa frente a nuestro diseño: El mayor problema de estas técnicas es el efecto *chattering* debido a las frecuencias de conmutación, sin embargo existen diferentes métodos para atenuarlas y con ello hacerlas implementables, en esta tesis se suelen emplear combinadas con métodos de linealización y *backstepping* con el objetivo de robustificar las leyes de control ante los efectos de las dinámicas no lineales.

Platitud diferencial y otras formas de linealización (Taylor, H-infinito, Control geométrico, etc.): Son técnicas basadas en la premisa de que bajo cierto tipo de transformaciones espaciales, lineales y no lineales, un sistema puede linealizarse puntual, parcial o totalmente.

-Ventaja: al volver lineal un sistema que no lo es, este puede comandarse mediante técnicas de control clásico lineal.

-Desventajas y comparativa frente a nuestro diseño: El mayor problema de estas técnicas es que no todos los sistemas son totalmente linealizables y el resto de los sistemas aunque puedan linealizarse alrededor de ciertos puntos de operación, si se salen de ese rango de funcionamiento, no se tiene garantía de un adecuado desempeño. Otra desventaja es que estos métodos son altamente sensibles a perturbaciones y variaciones en el modelo [91, 47, 126, 195, 4, 189]. Finalmente, aún si se conoce el modelo, si las funciones que lo describen no son compatibles con las técnicas de linealización que utilizan derivadas convencionales o transformaciones lineales, el sistema no podrá linealizarse. Aquí debe mencionarse que nuestros métodos son diseñados para un rango de operación parcial, el cual, aunque no contempla todas las posibles configuraciones de un sistema, al menos es más versátil que los métodos puntuales.

Métodos inteligentes: Son técnicas basadas en competencias y aprendizaje lógico, podemos mencionar la lógica difusa, redes neuronales y algoritmos evolutivos

-**Ventajas:** son técnicas relativamente intuitivas, basadas en métodos lógicos tal y como actúa un ser vivo, por lo cual el conocimiento del modelo matemático del sistema a controlar varía desde poco hasta nulo. Son robustas en un rango de operación amplio y ante perturbaciones difíciles de modelar. Finalmente, puede mencionarse que en la generalidad, requieren menos recursos de procesamiento y energía que sus contrapartes clásicas.

-**Desventajas y comparativa frente a nuestro diseño:** la principal desventaja es que al ser en su mayoría de tipo intuitivo, no tienen un fundamento matemático sólido para demostrar que son estables, sin embargo, como ya se ha probado en diversas publicaciones [130, 92, 182, 111], se ha desarrollado teoría para permitir que sean compatibles y a la vez complementarias con las técnicas clásicas [129, 128], por ejemplo: el control clásico puede actuar en la realización de las tareas más rutinarias y demandantes y el inteligente en las de precisión, sintonización automática de ganancias y en la identificación continua de dinámicas no modeladas o estados no medibles.

Capítulo 3

Marco teórico

Este capítulo contiene la teoría necesaria para introducir al lector en el rubro de los sistemas electromecánicos, concretamente aquellos del tipo subactuado. Así mismo se presentan las nociones de importancia referentes a estabilidad y teoría de control.

3.1. Sistemas electromecánicos

Físicamente, un sistema es un objeto complejo cuyos componentes se interrelacionan con al menos algún otro componente. Matemáticamente un sistema puede ser representado por un conjunto de ecuaciones interdependientes del tipo algebraico, diferencial, integral, mixto, lineal, no lineal, de primer o enésimo orden, etc.

Un sistema electromecánico es aquel sistema que posee las propiedades emergentes de inercia y flujo de electrones. El ejemplo base de este tipo de sistemas es el motor eléctrico, el cual ya es en sí mismo un sistema mecánico, pero la fuerza que desplaza su eje de giro y para lo cual fue diseñado es de origen eléctrico Fig(3.1).

3.1.1. Modelado de un sistema mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange

Para establecer el modelado de un sistema físico es necesario recurrir a alguna metodología matemática. Durante siglos se han diseñado técnicas equivalentes, como lo son la ecuación de la segunda ley de Newton, las ecuaciones de Hamilton, las de Carnot, las de Maxwell-Kirchoff y las de Euler-Lagrange por citar las más distintivas [141], ello se resume en la siguiente tabla:

Nombre	Ecuacion Asociada
Newton	$F = ma$
Carnot	$W = Q + U$
Kirchoff	$V = RI$
Euler-Lagrange	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$
Hamilton	$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$ $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

Se recuerda que la igualdad de las ecuaciones mostradas en la tabla previa, manifiestan la interacción entre efecto y causa, donde el sistema de control es la causa (por ejemplo

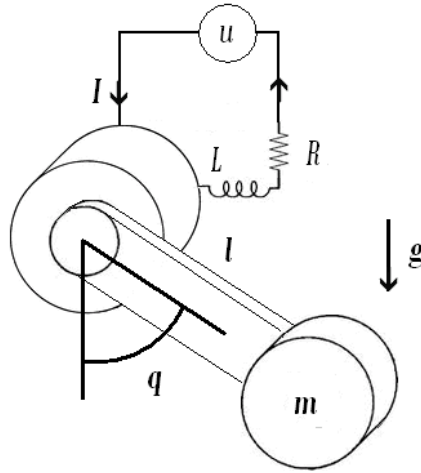


Figura 3.1: Motor DC, diagrama electromecánico

fuerza o potencial eléctrico), generando algún efecto en el sistema a controlar (por ejemplo movimiento), cabe manifestar que todas las representaciones recogidas en esta tabla son de carácter conservativo, es decir, en ellas se asume que no hay pérdidas; esto es: Newton, Kirchoff, Hamilton y Euler-Lagrange indican una transferencia directa entre movimiento y fuerza o potencial y corriente sin contemplar disipación por calor, fricción o alguna otra forma.

Esta tesis adoptará por método de modelado matemático a la ecuación de Euler-Lagrange o las ecuaciones de Hamilton, en algunos casos, de hecho puede deducirse que las ecuaciones de Hamilton son una representación en variables de estado de la ecuación de Euler Lagrange mediante la transformación de Legendre [28].

3.1.2. Sistemas mecánicos subactuados

A partir de este momento se pone en manifiesto otra consideración de importancia destacable: a pesar de que esta tesis aborda el control de sistemas electromecánicos, debido a que el sistema de control se inyecta a través del componente eléctrico y este es generalmente mucho más rápido en respuesta que el sistema mecánico (esto se debe a las velocidades de respuesta de diseño de los componentes mecánicos y eléctricos), todos los sistemas referidos a partir de este punto se analizarán para sus fines prácticos como sistemas de tipo mecánico, a menos que se indique lo contrario. Esto se verifica a continuación (ver apéndice D):

$$\begin{bmatrix} J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau \\ L\dot{i} + Ri = V - e \\ \tau = K_{\tau}i \\ e = K_e\dot{\theta} \end{bmatrix} \longrightarrow J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau \quad (3.1)$$

En (3.1) se muestran a la izquierda las ecuaciones electromecánicas de un motor de corriente directa, obtenibles mediante, Kirchoff o Euler-Lagrange [153, 152], a la derecha se muestra la ecuación mecánica equivalente de todo ese sistema cuando la respuesta de los componentes eléctricos es mucho más rápida que la mecánica, Fig(3.1).

Acotando un poco más, los sistemas mecánicos modelables mediante las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange son una enormidad de casos. Dentro de estos, la presente tesis se limitará a casos particulares de los que admiten la representación (3.2), conocida como ecuación general de robots manipuladores seriados. En ella $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ así como sus derivadas, corresponden a los estados del sistema, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, corresponde a la matriz de masas e inercias asociadas al sistema mecánico $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se refiere a los efectos centrípetos y de coriolis, $G(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares gravitacionales y $\tau \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector de entrada al sistema

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.2)$$

Si fijamos nuestra atención en la entrada al sistema, pueden existir tres casos: completamente actuado si $m = n$, hiperactuado si $m > n$ y subactuado si $m < n$, esta tesis se enfocará en el diseño de controladores para sistemas mecánicos subactuados. [157, 57, 101, 249, 194, 56].

En la literatura existen dos clasificaciones para este tipo de sistemas: la de Olfati-Saber y la de Choukchou [57]. Esta tesis, así como el diseño de los controladores esta basada en la clasificación de Olfati-Saber [157], la cual se sustenta en la estructura que el sistema en su modelo matemático adopte una vez transformado a variables de estado.

3.1.3. Transformaciones lineales de sistemas subactuados

La idea de las transformaciones consiste en facilitar el diseño de controladores, de esta forma, si en un espacio cierto sistema conlleva dificultades matemáticas y fuerte presencia de no linealidades, es posible la existencia de transformaciones (cambio de variables) que permitan describir el mismo sistema en otro espacio, de tal manera que las no linealidades se cancelen en forma total o parcial.

Algunas de las técnicas más utilizadas son [146, 191, 216]:

- Linealización por Jacobiano.
- Linealización Entrada-Estado.
- Linealización Entrada-Salida.
- Linealización Carleman.
- Linealización por series de Lie: Esta técnica es particularmente útil en los métodos de platitud diferencial.
- Técnicas iterativas.
- Linealización por retroalimentación: En esta técnica están basadas las transformaciones de Olfati-Saber, útiles en gran parte de los controladores de esta tesis.

- Linealización por cambio de variables.
- Linealización tangencial.

VARIABLES DE ESTADO

Matemáticamente, todo sistema escrito mediante ecuaciones diferenciales admite una representación alternativa en variables de estado, de hecho esta representación es la clave para transformar entre la metodología de Euler-Lagrange y la de Hamilton. Véase [162, 224].

La representación en variables de estado es una representación matemática en la que las variables del sistema se encuentran relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden [220, 91, 111, 54]. La representación en variables de estado de un sistema no es única; por lo general, en un sistema mecánico se eligen la posición y sus derivadas, el número mínimo de variables de estado a utilizar equivale a la suma de los órdenes diferenciales máximos de cada una de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema.

Tomemos como ejemplo, la conocida ecuación de la segunda ley de Newton (3.3). Esta puede ser vista como una ecuación algebraica si la variable de referencia es la aceleración a , o bien, como una ecuación diferencial de primer orden si es la velocidad v . Finalmente, es de orden 2 si se analiza la posición q , por tanto, respecto a este último referente y de acuerdo a la metodología presentada en [153, 152, 219] son requeridas 2 variables de estado.

$$F = ma = m\dot{v} = m\ddot{q} \quad (3.3)$$

Así, el sistema (3.3), analizado respecto a la posición, admite la siguiente representación en variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

donde las variables de estado son: $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q} = v$

SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

El modelo general asociado a un sistema mediante la representación en variables de estado es (3.4) [230]:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.4)$$

Se dice que un sistema es lineal si el modelo matemático asociado a (3.4) satisface el principio de superposición, es decir, que su modelo matemático admite una representación del tipo (3.5) [196, 219, 111]

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.5)$$

Donde A, B son respectivamente matrices cuyos elementos son independientes de los estados x . A y B son conocidos como matriz de estados y de control, el termino lineal hace referencia a que la ecuación (3.5), en su forma escalar, es asociada con la ecuación de una línea recta

$$\dot{x} = Ax + Bu \longrightarrow y = ax + b$$

Los siguientes son ejemplos de sistemas lineales con respecto a x:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + a_x \frac{t^2}{2} \\ v_x &= v_{0x} + a_x t \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_{0x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix} a_x = Ax + Bu$$

este sistema de ecuaciones describe la cinemática lineal de una partícula en una dimensión así como su representación en variables de estado

El siguiente sistema, ficticio y mostrado con fines didácticos, introduce el concepto de invariancia temporal. Un sistema invariante en el tiempo se denomina estático y en caso de cambiar con dicha variable se denomina dinámico. Puede notarse que, a pesar de ser un sistema variante en el tiempo, sigue siendo lineal.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(t) & t^2 \\ \cos(t) & \ln(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{bmatrix} u$$

El siguiente sistema es un ejemplo no lineal de la forma (3.4), pues su matriz A o B contienen uno o más elementos dependientes de los estados :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ \cos(t) & \ln(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ q_2 \tan(t) \end{bmatrix} u$$

Existen sistemas del tipo (3.5) que aún cumpliendo las características de linealidad descritas son no lineales, pues conmutan entre modelos. Un ejemplo son los convertidores eléctricos Fig(3.2). Véase [220]

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-U)\frac{1}{L} \\ \frac{1-U}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (3.6)$$

donde U es el conjunto discreto asociado a un interruptor que conmuta entre los dos valores 0 y 1.

Los sistemas de la ecuación (3.6) se mencionan porque algunos tipos de controladores obligan al sistema a adoptar este comportamiento [82, 214, 68].

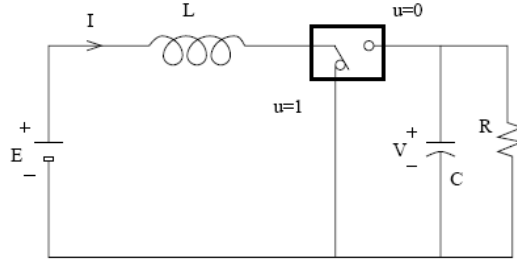


Figura 3.2: Convertidor boost Sira-Ramirez

En control, los sistemas del tipo $\dot{x} = f(x) + g(u)$, también conocidos como sistemas afines, son casos deseables del sistema (3.4), pues bajo ciertas transformaciones admiten linealizaciones parciales [227, 91, 157, 181]. Muchos sistemas subactuados admiten este tipo de linealizaciones y con ello facilitan relativamente el diseño de controladores [155, 154, 208, 156, 15, 49, 50, 236, 237].

Formas de Brunovsky

Una representación lineal particularmente útil en control, pues representa el sistema en función de una serie de integradores sucesivos, empleada a lo largo de esta tesis, debido a que una amplia familia de sistemas mecánicos puede ser llevada a ella, es la forma de Brunovsky (3.7) [181, 184, 153, 140, 150, 196].

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.7)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

el siguiente sistema es un ejemplo escrito en la forma lineal canónica de Brunovsky, tal disposición también es conocida como de retroalimentación estricta

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Clasificación de los sistemas subactuados

Previa clasificación, es necesario definir el concepto de holonomía y no holonomía, debido a que ello permite realizar una tabulación con base a las características matemáticas que adoptan los sistemas subactuados. Físicamente se entiende que un sistema holonómico (del

griego: ley-nomia, total-holo o totalmente controlable) es capaz de modificar su dirección instantáneamente (sin considerar la inercia, puramente bajo efectos cinemáticos). Un automóvil se considera no holonómico lateralmente dado que para desplazarse en ese sentido requiere la realización de múltiples maniobras:

Considérese un sistema de la forma

$$\ddot{q} = f(\dot{q}, q, u) \quad (3.8)$$

El sistema se considera holonómico si existen restricciones de movimiento y estas restricciones pueden expresarse en la forma:

$$h(q, t) = 0 \quad (3.9)$$

En caso opuesto, el sistema es no holonómico.

El que un sistema no sea holonómico implica que las restricciones no pueden expresarse como la derivada de alguna función de sus coordenadas generalizadas, no pudiendo, en consecuencia, ser resuelto por integración. Como ejemplo tomemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= -ux_1 \end{aligned}$$

Puede comprobarse que el sistema obedece la siguiente restricción

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$$

Al integrar esta última ecuación, se obtiene la restricción holonómica

$$x_1^2 + x_2^2 = 2C$$

Donde C es una constante de integración

Como contraejemplo notese que el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1u_2 - x_2u_1 \end{aligned}$$

La restricción de velocidad asociada es por tanto:

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 - \dot{x}_3 = 0$$

Debido a que esta restricción no puede integrarse, verificamos que es un sistema no holonómico, los sistemas subactuados presentan no holonomía de aceleración, es decir, la combinación de sus velocidades y posiciones no puede ser expresada como una ecuación algebraica $h(q, \dot{q}, t) = 0$ [176] o, en modo equivalente, sus grados de libertad controlables son menores a los no controlables.

Algunos casos particulares de la ecuación (3.2), basados en las transformaciones de linealización parcial de Spong [227] y ciertas propiedades de simetría, presentes en sistemas subactuados, se ilustran a continuación Fig(3.3) [157]. En dicha figura, la primer columna hace referencia al nombre de la familia; la segunda columna a la estructura matemática que adoptan las ecuaciones una vez normalizadas; la tercera corresponde al tipo o tipos de control más adecuados o utilizados en relación a la forma normalizada que presenten las ecuaciones del sistema; la cuarta ofrece algunos ejemplos mecánicos asociados a dicha familia; de la quinta a la octava las letras a,b, c y d, significan, respectivamente, variables de actuación (es decir, en donde actúa el controlador), falta de acoplamiento de entrada (es decir, las condiciones de cancelación de dicho controlador), momentos normalizados integrables (es decir, una generalización en las condiciones de holonomía que de poseerse facilitan la realización del control) y definición de condiciones adicionales (estas dependen de cada sistema y pueden ser regiones de operación y/o adición de términos suplementarios) .

Familia	Forma Normalizada	Diseño de control mas frecuente	Ejemplos mecanicos	a	b	c	d
I	Retroalimentacion estricta	Backstepping	Acrobot, TORA, Rueda inercial	Si	Si	Si	No
IIa	No triangular Q	Tecnicas de punto fijo	Pendubot, Furuta, Ball&beam	No	Si	Si	No
IIb	No triangular L	Tecnicas de punto fijo	Robots Flexibles	No	Si	Si	Si
III	Feedforward	Saturaciones anidadas	Carro pendulo bidimensional	No	Si	Si	Si
IVa	No triangular Q	Tecnicas de punto fijo	VTOL	Si	No	Si	No
IVb	No triangular Q	Tecnicas de punto fijo	VTOL	Si	No	Si	Si
V	Retroalimentacion estricta	Backstepping	Helicoptero 6 GDL	Si	No	Si	Si
VIa	No triangular L	Tecnicas de punto fijo	Manipuladores de 3 links	Si	Si	No	No
VIb	Retroalimentacion + Δ	Backstepping	Manipuladores de 3 links	Si	Si	No	Si
VIIa	No triangular LQ	Tecnicas de punto fijo	Manipuladores de 3 links	No	Si	No	No
VIIb	No triangular + Δ	Tecnicas de punto fijo	Manipuladores de 3 links	No	Si	No	Si
VIII	Feedforward	Saturaciones anidadas	Carro pendulo tridimensional	No	Si	No	Si

Figura 3.3: Clasificación de sistemas subactuados segun Olfati-Saber

De la anterior clasificación, esta tesis se enfoca principalmente en el diseño de controladores para los subsistemas tipo I, IIa y puede extenderse a la familia V [157]. A continuación se describen con un poco más de detalle estos casos Fig(3.4):

Supongamos que existe algún tipo de transformación que permite reescribir las ecuaciones diferenciales de un sistema subactuado en la siguiente representación de variables de estado:

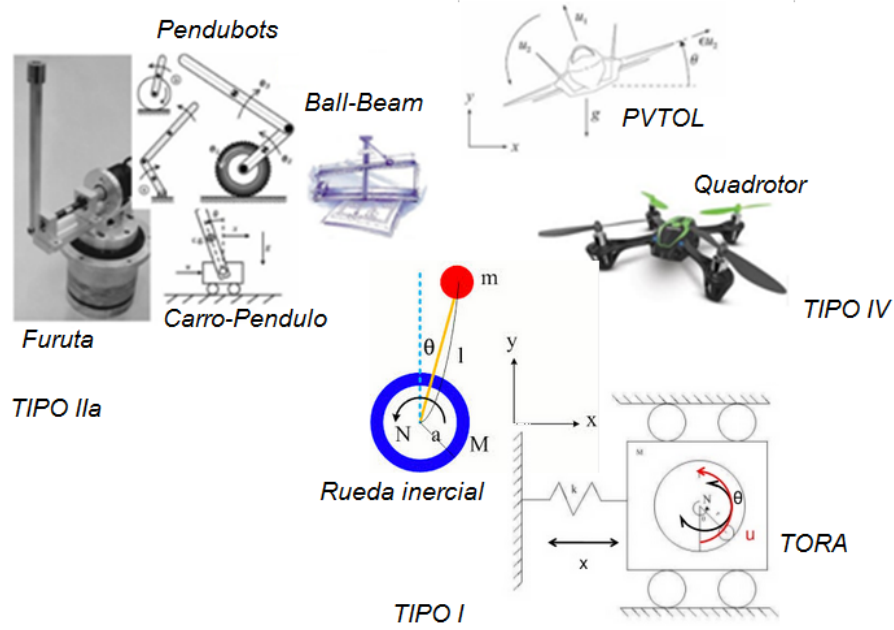


Figura 3.4: Sistemas I, IIa y IV

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_r &= m_r^{-1}(q_s)p_r \\
 \dot{p}_r &= g_r(q_r, q_s) \\
 \dot{q}_s &= p_s \\
 \dot{p}_s &= u
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Donde q_* hace referencia a una variable de transformación asociada con las posiciones y p_* con los momentos generalizados.

Los sistemas subactuados del tipo I son aquellos en los que la ecuación (3.10) puede ser reescrita como sigue:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= N(\xi_1)z_2 \\
 \dot{z}_2 &= f_0(z_1, \xi_1) \\
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 \dot{\xi}_2 &= u
 \end{aligned}$$

y debido a que N presenta propiedades simétricas y además es definida positiva, el conjunto de ecuaciones queda en retroalimentación estricta, por lo que puede controlarse directamente con las metodologías basadas en backstepping [139], físicamente se asocia esta clasificación a los sistemas subactuados de dos estados cuya entrada de control se encuentra en el segundo grado de libertad. Algunos de ellos, como es el caso del péndulo de rueda inercial son altamente linealizables (de hecho el péndulo de rueda inercial es completamente linealizable usando la metodología de planitud diferencial [219, 96]).

Supongamos ahora que un sistema subactuado puede mediante algún tipo de transformación ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_r &= m_r^{-1}(q_s)p_r \\
\dot{p}_r &= g_r(q_r, q_s) + \Sigma(q_s, p_r, p_s) \\
\dot{q}_s &= p_s \\
\dot{p}_s &= u
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Los sistemas subactuados del tipo IIa son aquellos en los que la ecuación (3.11) puede ser expresada del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= f_0(z_1, \xi_1) + m_r^{-1}(q_s)g_{11}(\xi_1)z_2 + m_r^{-1}(q_s)g_{12}(\xi_1)\xi_2 + \xi_2^T g_{22}(\xi_1)\xi_2 \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= u
\end{aligned}$$

Aunque estos sistemas no tienen una retroalimentación estricta, pueden controlarse con técnicas de punto fijo y haciendo suposiciones de acotamiento o evanescencia en las funciones que los constituyen, concretamente en: $m_r^{-1}(q_s)g_{11}(\xi_1)z_2 + m_r^{-1}(q_s)g_{12}(\xi_1)\xi_2 + \xi_2^T g_{22}(\xi_1)\xi_2$. Físicamente, esta familia se asocia a los sistemas subactuados de dos grados de libertad, cuya coordenada actuada se encuentra en el primer grado de libertad, por ejemplo el carro péndulo, poseen la característica de ser linealizables sólo en ciertos puntos.

Por otra parte, los sistemas de tipo V son aquellos que pueden ser reescritos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= f_0(z_1, \xi_1) + m_r^{-1}(q_s)p_r g_{11}(\xi_1)z_2 + m_r^{-1}p_r(q_s)g_{12}(\xi_1)\xi_2 + \xi_2^T g_{22}(\xi_1)\xi_2 \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= u
\end{aligned}$$

Es notable que bajo ciertas consideraciones de estabilidad, estos sistemas presentan el mismo comportamiento que los del tipo IIa, de este modo hacer la analogía de un VTOL con un péndulo doble es correcto bajo ciertos modos de operación [244]. Incluso bajo determinadas condiciones, parte del modelo puede ser considerado como de retroalimentación estricta y controlado por métodos basados en *backstepping*[18].

3.2. Modelado matemático de algunos sistemas subactuados

A continuación se ilustran algunos modelos matemáticos asociados y se describen los mecanismos que representan.

3.2.1. Motor de corriente directa

Recapitulando lo mencionado en secciones previas, el motor de corriente directa, además de ser un ejemplo base dentro de los sistemas electromecánicos, es también de uso muy extendido para la creación de sistemas mucho más complejos, como los que se verán en las secciones siguientes.

Por otra parte, dado su modelo matemático (3.1)

$$\begin{bmatrix} J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau \\ Li + Ri = V - e \\ \tau = K_{\tau}i \\ e = K_e\dot{\theta} \end{bmatrix} \longrightarrow J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau$$

Puede advertirse que en sí mismo ya es un sistema subactuado, la afirmación es evidente si observamos que las dos ecuaciones interdependientes que lo modelan, básicamente describen el comportamiento de dos variables y sus derivadas, a saber la corriente eléctrica y el ángulo mecánico. En este modelo, la única entrada de control para ambos subsistemas es el voltaje aplicado, como ya se dijo, el sistema eléctrico es mucho más rápido que el mecánico y está diseñado para ser estable, por lo tanto se considera prescindible en el análisis y se termina por estudiar al sistema como uno puramente mecánico, un motivo que no permitiría esta exclusión se da en el caso de que se trabajara con motores industriales ya que en ellos los picos de corriente ejercen efectos considerables en el comportamiento de los mecanismos.

Para aplicaciones de esta tesis, se utilizarán modelos matemáticos asociados a motores DC de uso cotidiano, es decir, de transmisión de movimiento a través de sistemas de engranajes. Lo ideal sería referirnos a motores de transmisión directa, pero sus costos y dificultad de adquisición los vuelven prohibitivos. Estos motores de transmisión por engranaje presenta muy alta fricción estática debido al transmisor dentado [1], su modelo matemático es el siguiente:

$$J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) + F_c(\dot{\theta}) = \frac{N(\tau_m - J_m\ddot{\theta}_m - F_m(\dot{\theta}_m))}{1 + \mu \text{sign}(\gamma\dot{\theta})}$$

Puede notarse que la primer ecuación de (3.1), es un caso particular de esta ultima ecuación; prosiguiendo, N es la relación de reducción del engranaje θ_m y sus derivadas son las variables de movimiento directamente en el eje del motor; θ y sus derivadas son las variables de movimiento en la salida del reductor e idealmente ambos movimientos se relacionan mediante $\theta = \frac{\theta_m}{N}$; τ_m es el par de salida del motor; J y J_m son las inercias tanto a la salida del motor como del reductor del mismo modo que las fricciones dinámicas $F_m(\dot{\theta}_m)$ y $F_c(\dot{\theta})$; $H(\dot{\theta}, \theta)$ es un término que contiene elementos gravitatorios, de resorte y/o de coriolis; el divisor $1 + \mu \text{sign}(\gamma\dot{\theta})$ hace referencia a un termino de fricción seca, que solo ocurre en el arranque del sistema de salida del reductor y es dependiente de la velocidad y del propio sistema; a saber $\gamma = J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) + F_c(\dot{\theta})$, por lo tanto es un tipo de fricción estática y μ es su coeficiente. Para

efectos prácticos y dado que solo ocurre durante el arranque del sistema el cual en nuestros ejemplos es dimensionalmente pequeño (en longitudes, masas e inercias), adicional al hecho de que μ es generalmente pequeño, el sistema se vuelve:

$$J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) + F_c(\dot{\theta}) = N(\tau_m - J_m\ddot{\theta}_m - F_m(\dot{\theta}_m))$$

como $\theta = \frac{\theta_m}{N}$, la inercia del motor y la de la carga se fusionan en un mismo término, por otra parte llamando $\tau = N\tau_m$. La ecuación anterior termina por volverse:

$$J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) + F_c(\dot{\theta}) = \tau - N(F_m(N\dot{\theta}))$$

dado que $F_m \gg F_c$

$$J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) = \tau - N(F_m(N\dot{\theta}))$$

generalmente F_c solo es considerada si la salida del reductor tiene contacto directo con el medio, el cual generalmente solo es el aire. Un ejemplo donde sí debe ser considerada es en un motor que mueve un eje en un carro, ahí la fricción que debe vencer la salida del motor por parte del suelo es alta, por otra parte F_m es considerada dado que se da por la interacción de contacto directo entre los engranes, más aún, se amplifica por un factor N el cual suele ser alto.

Un modelo aceptable para esta fricción está dado en [1], el cual esta basado en [159, 64, 179], otro artículo interesante al respecto es [105]:

$$F_m(*) = F_s(*) + F_d(*)$$

Donde $F_s(*)$ son términos de fricción estática bidireccional y antisimétrica (el coeficiente puede ser distinto a giro de reloj que en contrarreloj), igualmente se desprecian en el análisis, dado que solo están presentes en el arranque del sistema, básicamente esta fricción es la combinación de una fricción de Coulomb (fricción semiestática presente en el cambio de sentido) más uno constante (dado por un coeficiente de fricción puramente estático).

$$F_s(*) = C_r(\text{sign}(*)) + 1 + C_{cr}(\text{sign}(*)) - 1$$

en esta ecuación C_r es el coeficiente a reloj y C_{cr} a contrarreloj respectivamente

Por otra parte F_d corresponde a la fricción dinámica la cual siempre debería ser considerada dado que está presente durante la operación del sistema, usualmente se considera lineal.

$$F_d(*) = f*$$

Haciendo estas consideraciones, se llega a que el modelo matemático de un motor de corriente directa de transmisión mecánica por engranajes viene dado por:

$$J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) = \tau - N(F_d(N\dot{\theta})) = \tau - N^2 f\dot{\theta}$$

El modelo resultante ha sido producto de múltiples simplificaciones y consideraciones

$$J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) + N^2 f\dot{\theta} = \tau$$

Nótese que el sistema anterior es una versión simplificada de (3.12), donde se considera el modelo extendido y la parte eléctrica del motor, la versión en extenso, aunque resulta mucho más precisa, es también más compleja, lo cual dificulta la tarea de diseño del controlador y es inadecuado suponiendo que se trata de un motor y no de mecanismos más complejos.

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + H(\dot{\theta}, \theta) + F_c(\dot{\theta}) &= \frac{N(\tau_m - J_m\ddot{\theta}_m - F_m(\dot{\theta}_m))}{1 + \mu \text{sign}(\gamma\dot{\theta})} \\ Li + Ri &= V - e \\ \tau_m &= K_\tau i \\ e &= K_e \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.2. Carro péndulo

El carro péndulo, Fig(3.5), es el mecanismo subactuado más difundido [58, 226, 137, 245], posee dos grados de libertad, uno de ellos consiste en un movimiento traslacional actuado y uno rotacional no actuado y controlable mediante efectos de coriolis. Su historia se remonta a 1950 y puede decirse que fue uno de los primeros retos de la teoría de control, ya que el sistema no es linealizable en su totalidad por el método de retroalimentación [91], adicional al hecho de que pierde controlabilidad cuando el péndulo se encuentra sobre el plano horizontal [101, 212], algunas de sus aplicaciones reales son:

1. Emulación de la posición humana vertical [108, 107] .
2. Estabilización vertical en el lanzamiento de cohetes [43].
3. Absorción sísmica, esto se logra mediante la versión opuesta del carro péndulo, donde el carro es subactuado y el péndulo genera la acción de control, este sistema se conoce como TORA [84].
4. Sistemas de estabilidad móvil y absorción de vibraciones en vehículos, como autobuses o trenes.

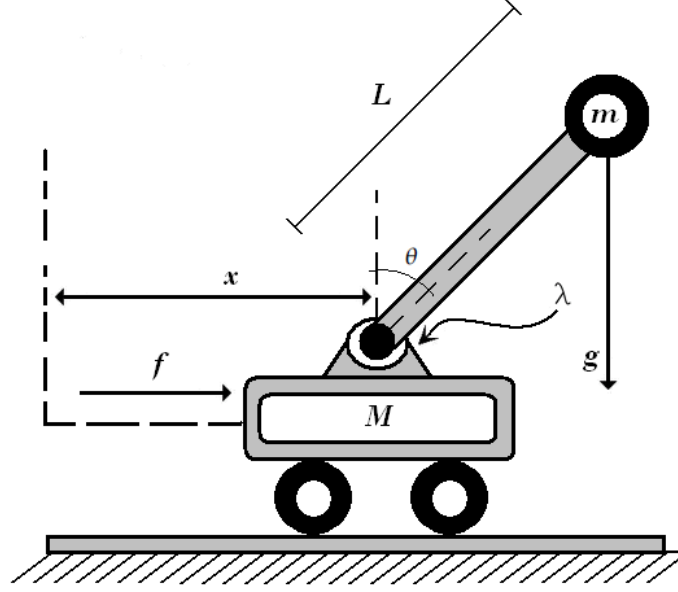


Figura 3.5: Carro Péndulo

Definiendo a $q = (x, \theta)^T$ su modelo matemático [101] es:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.13)$$

Donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix}; \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix}; \quad \tau = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

Su transformación lineal parcial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 + \frac{x_3 x_4^2}{(1+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ x_4 \\ u \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

[157], por tanto pertenece a la clasificación IIa de mencionada referencia y tiene las propiedades descritas en la figura Fig. (3.3):

3.3. Nociones de estabilidad

Dos aspectos fundamentales e interrelacionados con la automatización de un sistema son el estudio de la estabilidad y el diseño del control [65]. El estudio de la estabilidad nos permite saber el comportamiento respecto al tiempo de los puntos de equilibrio del sistema ya sea bajo la acción de algún tipo de controlador o en su total ausencia. Por otra parte, el diseño de control nos permite imponer comportamientos artificiales, es decir que no están presentes en el comportamiento natural o libre del sistema, a través de sus entradas.

El control puede considerarse como una aplicación física de la teoría matemática de la estabilidad, de hecho, como se hizo notar en la introducción de esta tesis, hubo un tiempo en que ambas materias estaban totalmente deslindadas.

El objetivo básico de la teoría del control es estabilizar un sistema alrededor de sus puntos de equilibrio, los cuales pueden ser tanto estables como inestables. Físicamente, se dice que un sistema es estable si se mueve a alguna posición de equilibrio y ahí permanece; por otra parte, es inestable cuando abandona dicha posición debido a la mínima interacción con algún tipo de perturbación Fig(3.7).

Definiendo el equilibrio $x = 0$

Matemáticamente se dice que el punto de equilibrio de un sistema es estable si [111, 162] para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para toda solución $x(t)$ del punto de equilibrio se tenga

$$\|x(0)\| < \eta \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Inestable si no es estable.

Atractivo si existe $r > 0$ tal que para toda solución $x(t)$ se tiene.

$$\|x(0)\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

La región de atracción hacia el origen está definida por el conjunto B tal que

$$x(0) \in B \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Globalmente atractivo si para toda solución $x(t)$ del punto de equilibrio se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{ en el caso } B = \mathbb{R}^n$$

Asintóticamente estable si es estable y atractivo.

Global asintóticamente estable (GAS) si es estable y globalmente atractivo.

Exponencialmente estable si existe $r > 0$, $M > 0$, y $\alpha > 0$ tales que para toda solución $x(t)$ del punto de equilibrio se tiene:

$$\|x(0)\| < r \implies \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

y Global exponencialmente estable (GES) si existe $M > 0$ y $\alpha > 0$ tales que para toda solución $x(t)$ del punto de equilibrio se tiene:

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

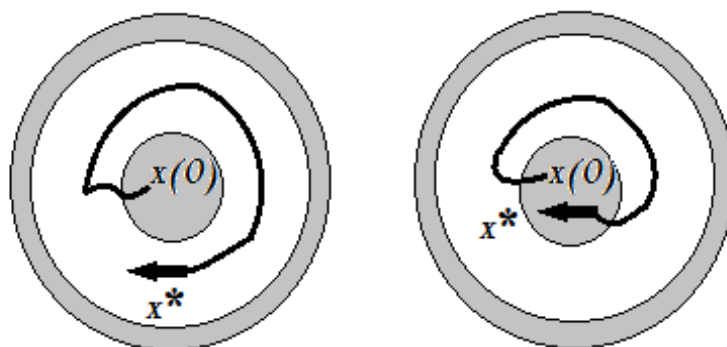


Figura 3.6: Estabilidad (izq.) y estabilidad asintótica (der.)

Para un sistema lineal todas las definiciones previas son equivalentes (salvo estable y asintóticamente estable), para uno no lineal todas son casos distintos.

Con base a las definiciones previas y considerando la incidencia en los sistemas a analizar de bifurcaciones, puntos inestables de equilibrio Fig(3.7) o puntos de silla Fig(3.8), es necesario realizar un estudio analítico más riguroso de la propiedad de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, para ello es conveniente introducir la noción de función de Lyapunov y sus correspondientes teoremas de estabilidad [133]:



Figura 3.7: Estable (izq.) contra inestable (der.)

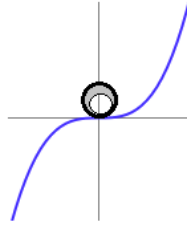


Figura 3.8: Punto de silla

Se dice que una función $V(x, t)$ es candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ si $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ cumple con lo siguiente:

1. $V(x, t)$ es una función definida positiva.
2. $\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$ es una función continua con respecto a x ; la derivada $\frac{dV(x, t)}{dt}$ existe y es una función continua con respecto a x ; la derivada respecto al tiempo de una función candidata de Lyapunov esta definida como $\frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt}$; esta derivada debe ser definida negativa: $\frac{dV(x, t)}{dt} < 0 \forall t \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$.

3.3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

El método de Lyapunov nos permite saber si el equilibrio de un sistema es o no estable, sin resolver sus ecuaciones diferenciales.

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x, t) \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \forall t \geq 0$, se dice que el origen es un punto de equilibrio estable al menos localmente si existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ con derivadas continuas respecto a x tal que su derivada temporal satisfaga

$$\dot{V}(x, t) \leq 0 \forall t \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Si esto se cumple significa que la función de Lyapunov es decreciente y por lo tanto las soluciones $x(t)$ del modelo dinámico referido se encuentran acotadas para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$

Una función decreciente es una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si para cada $r \in \mathbb{R}_+$ existe un número real $k < \infty$ tal que

$$V(x, t) \leq k \quad \forall \|x\| \leq r$$

Se dice que un sistema tiene estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov si:

$$\begin{aligned}\dot{V}(0) &= 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \dot{V}(x, t) &< 0 \quad \forall t \geq 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \\ V(x, t) &\rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty\end{aligned}$$

si esto se cumple, ello implica que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Se dice que un sistema posee estabilidad exponencial global en el sentido de Lyapunov si existe una función candidata de Lyapunov $V(x, t)$ y constantes positivas α, γ, β tales que:

$$\begin{aligned}\alpha \|x\|^2 &\leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^2 \\ \dot{V}(x, t) &\leq -\gamma \|x\|^2 \quad \forall t \geq 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

La estabilidad asintótica o exponencial global implica que el punto de equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es único y la convergencia no depende de la condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$

En la mayoría de los sistemas analizados a lo largo de esta tesis, se busca lograr estabilidad global en los puntos de operación impuestos.

Para sistemas cuyos puntos de equilibrio solo cumplen ser localmente estables es necesario saber cual es su vecindad de estabilización, para ello es frecuente utilizar los teoremas de Lasalle o Barbalat según sea el caso (esto se explicará a detalle más adelante).

Una representación grafica en R3 de la estabilidad de lyapunov se ilustra en la siguiente grafica Fig(3.9)

Puede observarse que la bola representa las condiciones iniciales del sistema y el valle de la cuenca es el punto estable al cual se dirigirá la bola, la cuenca representa la función de Lyapunov. Sin pérdida de generalidad, este punto puede ser trasladado a un lugar distinto del origen (ver más adelante regulación) e incluso puede ser dinámico (ver más adelante seguimiento), la primer condición de Lyapunov nos indica que para la existencia de una cuenca la función que la defina debe ser positiva y la segunda condición nos indica que la bola pierde energía, de esta forma no le queda más que avanzar hacia el valle y jamás podrá salir de él, en caso opuesto (por ejemplo, si la bola inicia con una velocidad muy grande), irá acumulando suficiente energía como para escapar del valle.

Nótese que, a manera didáctica, el caso particular de las ilustraciones de la primer definición de estabilidad 3.6, equivale a las curvas de nivel de la superficie usada en la figura 3.9

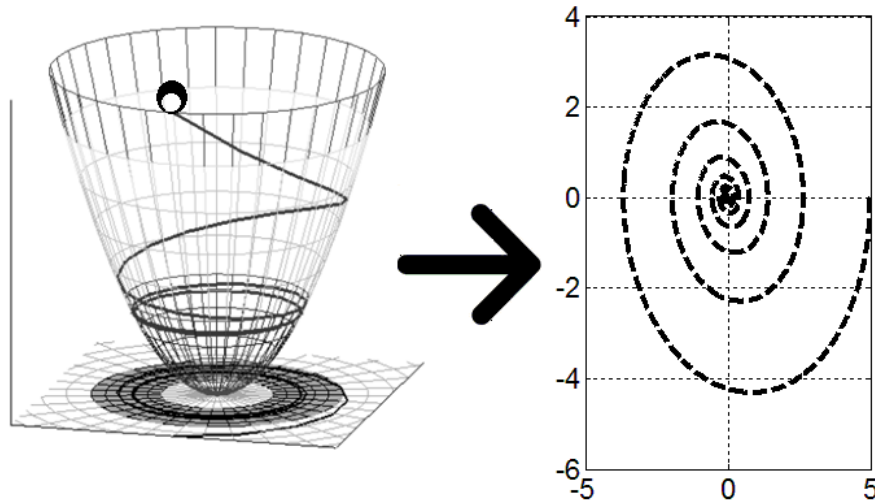


Figura 3.9: Función de Lyapunov y curva de nivel (plano fase)

3.3.2. Teoremas de estabilidad según Lasalle y Barbalat

Para garantizar convergencia hacia el origen en sistemas que sólo demuestran estabilidad local por el método de Lyapunov, es decir, $\dot{V}(x) \leq 0$, es factible proseguir el análisis con el lema de Barbalat o el teorema L-B-K (Lasalle-Barbalat-Krasovskii) siendo L-B-K un caso particular de Barbalat, esto es, Barbalat es un método para demostrar estabilidad asintótica global no necesariamente basado en la función de Lyapunov elegida, en tanto L-B-K es un caso especial de Barbalat donde la estabilidad es demostrada con base a la función de Lyapunov seleccionada buscando encontrar un conjunto convergente, además L-B-K solo aplica para sistemas autónomos.

A continuación se definen estos lemas, su uso se ejemplifica en la siguiente sección:

El teorema de Lasalle-Barbashin-Krasovskii establece que dado un sistema $\dot{x} = f(x, t)$, para el cual $f(0, 0) = 0$, si este sistema es local-asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov y además $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\dot{V}(0) = V(0) = 0$, sea I la unión de las trayectorias completas contenidas en el conjunto $\{x : \dot{V}(x) = 0\}$, entonces el conjunto de puntos acumulados de cualquier trayectoria está contenido en I , en particular, si I no contiene alguna trayectoria que no sea la trivial $x(t) = 0 \forall t \geq 0$, entonces el origen es global-asintóticamente estable. La desventaja de este teorema es que solamente es válido para sistemas autónomos o no autónomos-periódicos.

Lo siguiente es definir el lema de Barbalat, este se deduce para una función no autónoma $V(x, t)$ la cual es en modo general pero no necesario la función de Lyapunov $V(x)$, en materia de esta tesis se supondrá a $V(x)$ como la función de diseño.

Si $V(x)$ satisface las condiciones dadas para estabilidad asintótica local (ecuaciones) y $\dot{V}(x)$ es uniformemente continua, es decir $\ddot{V}(x)$ es finita y existe, entonces $\dot{V}(x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Lo anterior implica que el sistema puede ser sujeto a la verificación de L-B-K $\{x : \dot{V}(x) = 0\}$ y entonces tratar de demostrar la existencia del conjunto de puntos en I que demuestren estabilidad global y asintótica.

Como ejemplo ilustrativo del teorema L-B-K, considerar el siguiente sistema [235] Fig(3.10)

$$\dot{x} = -x + x^3$$

Utilizando el método de Lyapunov, se propone la siguiente función candidata, la cual es definida positiva

$$V = \frac{x^2}{2}$$

derivándola respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V} = x\dot{x} = -x^2 + x^4$$

la cual es definida negativa solo bajo ciertas condiciones, ahora bien aplicando el teorema L-B-K, se encuentra que

$$\dot{V} = -x^2 + x^4 = 0$$

lo cual es válido para tres posibles casos $x = -1$; $x = 1$; $x = 0$ de esta forma \dot{V} es definida negativa dentro del conjunto invariante $x \in (-1, 1)$ excepto en $x = 0$, sin embargo en ese mismo punto $\dot{x} = 0$ y por tanto el sistema es estable en dicha región

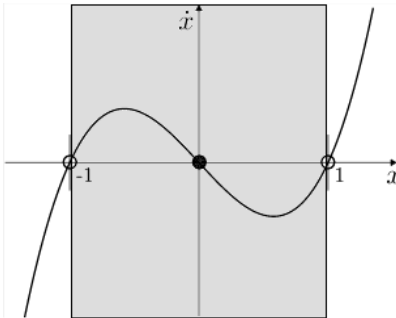


Figura 3.10: Ilustración del teorema L-B-K

3.3.3. Estabilidad en tiempo finito

De acuerdo a [161, 38] la estabilidad en tiempo finito es aquella donde el sistema converge a los resultados esperados, bajo cierta ley de control en un tiempo acotado, generalmente es dependiente del propio control y por tanto es diseñable, por ejemplo, considerando el siguiente sistema [229]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= au - b + w_1\end{aligned}$$

siendo a, b parámetros del sistema y w_1 alguna perturbación acotada, proponiendo $u = \frac{-my_1 + b - k \operatorname{sign}(s_1)}{a}$

donde la superficie de deslizamiento s_1 se define como: $s_1 = mx_1 + y_1$, dicho sistema en lazo cerrado con referida ley de control se vuelve:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -my_1 - k \operatorname{sign}(s_1)\end{aligned}$$

para conocer su estabilidad se emplea la función de Lyapunov $V = \frac{s_1^2}{2}$, cuya derivada es $\dot{V} = s_1 \dot{s}_1 = -s_1 k \operatorname{sign}(s_1) = -k |s_1| < 0$

ahora bien, para conocer el tiempo de estabilización, se utiliza el hecho de que $s_1 \dot{s}_1 = s_1 \frac{ds_1}{dt} = -k |s_1|$, integrando por separación de variables desde un tiempo inicial $t_0 = 0$

hasta uno final t_f en el cual $s_1 = 0$ se obtiene que $\operatorname{sign}(s_1) \int_0^{t_f} ds_1 = -k \int_0^{t_f} dt$, resolviendo

y simplificando se llega a lo siguiente: $|s_1(t_f)| - |s_1(0)| = -t_f k$, por lo tanto el tiempo de establecimiento del sistema o tiempo finito esta dado por $t_f = \frac{|s_1(0)|}{k}$, el cual como puede verse es dependiente de las condiciones iniciales del sistema y de la ganancia del controlador.

3.3.4. Escape en tiempo finito

Existen casos tales que un sistema aparentemente estabilizable, se vuelve inestable en un tiempo finito, un ejemplo de ello es debido al efecto peaking [208, 233, 113], considérese el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + \varepsilon x^2 \\ \dot{\varepsilon} &= u\end{aligned}$$

bajo efectos de la siguiente ley de control $u = -\varepsilon$, el sistema evoluciona de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + \varepsilon_0 e^{-t} x^2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 e^{-t}\end{aligned}$$

La solución para x es la siguiente $x = \begin{cases} \frac{2x_0}{(2-x_0\varepsilon_0)e^t + x_0\varepsilon_0 e^{-t}}, & x_0\varepsilon_0 \leq 2 \\ \infty & \text{en tiempo finito, } x_0\varepsilon_0 > 2 \end{cases}$

como puede notarse el término x^2 genera un efecto inestabilizante en el sistema, en este caso dependiente de las condiciones iniciales denominado escape en tiempo finito, dicha inestabilidad se alcanza en un tiempo finito y es obtenible de despejar las soluciones del sistema en el valor límite del sistema cuando este tiende a infinito.

3.3.5. Estabilidad de sistemas lineales

Dos de los métodos más usuales para verificar la estabilidad de sistemas lineales son los teoremas de Lyapunov y la ubicación de los polos. En el primer caso y sin pérdida de generalidad se tiene que a cualquier sistema que pueda ser escrito en la forma lineal (3.5)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con un controlador que tenga una excursión lineal del tipo $u = -Kx$

Puede asociársele la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}x^T Px$$

Siendo P una matriz simétrica definida positiva

Para demostrarlo basta considerar el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x = \bar{A}x$$

cuya derivada es

$$\dot{V} = \frac{1}{2}x^T(\bar{A}^T P + P\bar{A})x$$

De este modo, proponiendo una matriz $-Q$ generalmente igual a la matriz identidad de rango n , sí se encuentra y por tanto existe a través del despeje una matriz P que satisfaga ese sistema de ecuaciones, entonces

$$\dot{V} = -x^T Qx$$

y como esta función es semidefinida negativa y la función de original de Lyapunov es definida positiva, solo resta encontrar la región de estabilidad con algún método de los ya presentados.

La otra forma de demostrar estabilidad en sistemas lineales es simplemente garantizando que las raíces del polinomio característico de la matriz \bar{A} tengan un valor negativo, ello garantiza convergencia exponencial tal y como lo indica el sentido común y el método del lugar geométrico de las raíces, a tal polinomio se le define como polinomio Hurwitz [153, 196, 116].

Todo lo anterior también es aplicable para sistemas lineales con cierto tipo de perturbaciones no lineales en tanto sean del tipo acotado o evanescente (véase apéndice C) [111, 223]

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_x(x, u, t)$$

3.3.6. Función Lipschitziana

El uso de funciones Lipschitzianas, representa un criterio de continuidad útil en la teoría de control, de modo tal que si una ecuación asociada con un sistema no es Lipschitziana alrededor de un punto de operación, entonces dicha función y por tanto el sistema referido pueden presentar un crecimiento abrupto o inestable alrededor de ese punto. En caso opuesto existe al menos algún tipo de convergencia local.

El criterio de Lipschitzidad se define como sigue:

Suponer el sistema $\dot{x} = f(t, x)$ se dice que $f(t, x)$ es localmente Lipschitz en el punto x_0 si existe un vecindario $N(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$ donde $f(t, x)$ satisface la siguiente condición

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, L > 0 \quad (3.15)$$

dicho de otra forma, si el cociente $\frac{|f(t,x)-f(t,y)|}{|x-y|}$ el cual representa una pendiente lineal, puede ser asociado con una constante L , entonces existe un crecimiento acotado, si el anterior criterio además de ser válido para x_0 es válido para toda x se dice que es globalmente Lipschitz.

3.4. Nociones de control

A continuación se abordarán conceptos fundamentales de control:

El estudio del control persigue tres finalidades: regulación, seguimiento y generación de oscilaciones [78]:

El seguimiento es un concepto que se refiere a que la salida de control del sistema lleva a cabo la emulación de una señal de comando [104].

La regulación persigue una tarea estática, es decir llegar a un punto de operación y permanecer en el.

De un modo más global, un sistema adopta la siguiente representación: $\dot{x} = f(t, u, x, w)$ donde x es el vector de estados, t es el tiempo, u es la entrada de control y w son perturbaciones propias o externas, las cuales pueden o no ser conocidas.

Generalmente, el modelo matemático de una ley de control es una entidad de la forma $u = U(t, x, \xi)$ donde ξ representa la inyección de un término dinámico del propio controlador, el cual para fines didácticos pudiera ser un término integral definido como $\xi = \int \Psi(t, x, \xi)$ [124]

Un ejemplo ilustrativo es el conocido control PID, definiendo $e = x - x_d$, donde x_d es ya sea seguimiento, regulación o ciclo límite, podemos obtener las siguientes relaciones $u = U(t, x, \xi) = K_p e + K_d \frac{de}{dt} + \xi$ siendo $\xi = \int \Psi(t, x, \xi) = K_i \int_0^t e ds$

El esquema de control robusto utilizado en esta tesis, a diferencia del controlador mostrado en el párrafo anterior, adopta la siguiente estructura $u = U(t, x, \xi, \hat{w})$ donde el termino \hat{w} es un estimado de las perturbaciones.

El control robusto como ya se indicó puede ser dominante o compensativo [29], esto es: $u = U(t, x, \xi) \gg w$ para el caso dominante, o $u = U(t, x, \xi, \hat{w})$ para el compensativo.

La posibilidad de diseñar un control capaz de realizar cualquier tarea en un sistema lineal depende de su controlabilidad, esto es:

Dado un sistema del tipo $\dot{x} = Ax + Bu$ donde $A_{n \times n}$, $B_{n \times 1}$, se dice que es controlable si la matriz $R = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ es de rango pleno [54], la cual se simplifica a $\det(R) \neq 0$ para el caso donde R sea cuadrada, de otra forma no se le puede suministrar alguna ley de control.

Una extensión de esta definición para cierta clase de sistemas no lineales es definida en [219, 95] como sigue:

Dado un sistema del tipo $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$, se dice que es controlable si la siguiente matriz es de rango pleno: $R = [g_1 \ \dots \ g_m \ [\text{adj}_{g_i}^k g_j] \ \dots \ [\text{adj}_f^k g_i]]$ donde $[\text{adj}_f^k g]$ es la operación del corchete de Lie anidada dada por $[\text{adj}_f^k g] = [f \ \dots \ j \ \dots \ [f, g]]$ [219]

El control y la estabilidad se relacionan a través de las definiciones de estabilidad en lazo cerrado y lazo abierto (no confundir con el concepto de control en lazo abierto):

Se dice que un sistema es estable en lazo abierto si cumple las condiciones de estabilidad descritas en secciones previas sin la intervención de ningún controlador.

Se dice que es estable en lazo cerrado si se cumplen las condiciones de estabilidad descritas con la intervención de algún controlador. Aquí puede notarse que a pesar de que un sistema sea inestable, si en lazo cerrado con el controlador adecuado se vuelve estable, entonces tendremos un comportamiento deseado.

Cerrando esta sección y vinculando el control con la teoría de estabilidad, tenemos que de un modo relativamente general, para un sistema del tipo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \Delta(x, t) \quad (3.16)$$

donde $\Delta(x, t)$ es un término asociado a cualquier tipo de perturbaciones acotadas, es decir $|\Delta(x, t)| \leq \rho$ se suele proponer una función de Lyapunov V cuya derivada \dot{V} sea al menos semidefinida negativa, es decir

$$\dot{V} = \nabla V(x)\dot{x} = \nabla V(x)[f(x) + g(x)u + \Delta(x, t)] \leq 0 \quad (3.17)$$

Una técnica para el diseño del controlador u aplicada en esta tesis es la de particionar u en dos componentes, uno de ellos destinado a compensar los efectos del propio sistema,

lo que en la literatura es conocido como control nominal u_{nom} y otro término destinado a contrarrestar los efectos de las perturbaciones u_{rob}

$$u = u_{nom} + u_{rob} \quad (3.18)$$

$$\dot{V} = \nabla V(x)\dot{x} = \nabla V(x) [f(x) + g(x)u_{nom}] + \nabla V(x) [g(x)u_{rob} + \Delta(x, t)] \quad (3.19)$$

El reto, con el objetivo de garantizar estabilidad en sentido de Lyapunov o estabilidad asintótica, es lograr que:

$$\nabla V(x) [f(x) + g(x)u_{nom}] + \nabla V(x) [g(x)u_{rob} + \Delta(x, t)] \leq 0 \quad (3.20)$$

Para ello es necesario que las perturbaciones sean acotadas o al menos evanescentes, ello no solo implica el diseño del controlador sino también a una cuidadosa selección de la función de Lyapunov dado que cuando $\nabla V(x)g(x) = 0$ nos encontramos con un sistema autónomo respecto al controlador el cual puede o no ser estable, de este modo, también debe garantizarse que [127]:

$$\nabla V(x) [f(x)] + \nabla V(x) [\Delta(x, t)] \leq 0 \quad (3.21)$$

3.4.1. Control por modos acotados

El control por modos acotados utiliza funciones sigmoideas, una función sigmoidea $\alpha(x)$, es aquella función suave que tiene las siguientes propiedades: $\alpha(0) = 0$, $x\alpha(x) \geq 0$ y $|\alpha(x)| \leq \bar{\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

El control por modos acotados u , se define como aquel que dado un error de magnitud e , satisface las siguientes condiciones :

$$\text{Dado } e_1 < e_2 < 0 < e_3 < e_4 ; u = \begin{cases} -M & \text{sí } e_1 < e < e_2 \\ 0 & \text{sí } e = 0 \\ M & \text{sí } e_3 < e < e_4 \end{cases} ; eu \geq 0$$

siendo M un límite diseñable, gráficamente. Algunas funciones sigmoideas se ilustran en la figura Fig(3.11), de entre ellas, la más empleada y conocida es la función signo, la cual además de ser la de comportamiento discontinuo, es también la que define la familia de controladores por modos deslizantes, el primer control acotado propuesto para solventar los problemas de los modos deslizantes fue el siguiente:

$$u = \frac{e}{|e| + \delta} \simeq \text{sign}(e)$$

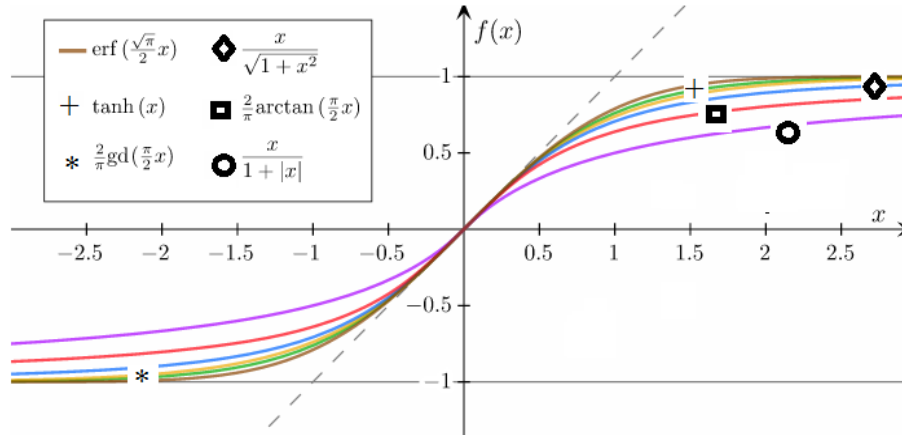


Figura 3.11: Funciones sigmoidales (tomado de wikipedia)

El cual como puede notarse no es otra cosa que una función signo suavizada por un valor muy pequeño, esto es, reduce el golpeteo físico y permite derivación matemática cuando $e \rightarrow 0$.

Otra suposición importante de esta tesis es que en los sistemas analizados existe la retroalimentación de todos los estados, de otro modo, es necesario el uso de observadores.

Como ya se mencionó en capítulos previos, existen dos vertientes del control por modos acotados [198]:

La paralela (3.22) cuya estructura es (puede llamársele paralela dado que la ley de control afecta al mismo tiempo a cada estado en lazo cerrado):

$$u = -s_{M_n}(y_n) - s_{M_{n-1}}(y_{n-1}) - \dots - s_{M_1}(y_1) \quad (3.22)$$

La anidada o serial (3.23) cuya estructura es (puede llamársele serial dado que la estabilización general depende de los subsistemas interiores en lazo cerrado):

$$u = -s_{M_n}(y_n + s_{M_{n-1}}(y_{n-1} + \dots + s_{M_1}(y_1))) \quad (3.23)$$

Donde s es una función sigmoidal, por ejemplo una saturación, un signo o una tangente hiperbólica y M_* hace referencia al valor cota de la saturación, por otra parte $y_i = \sum_{k=i}^n x_k$

Una de las principales ventajas de utilizar los modos acotados respecto a los controladores mencionados en capítulos previos (por ejemplo el método IDA-PBC o el método de [122, 121, 120]) es que presentan robustez con respecto a ciertos fenómenos como la fricción en la coordenada no actuada de un sistema subactuado [51]. De forma paradójica, este diseño no

es del todo compatible con los modos deslizantes, los cuales a pesar de ser una familia de los modos acotados, presentan una situación de no derivabilidad [75] lo cual implica físicamente un comportamiento brusco. Un modo alternativo para solventar la imposibilidad de cierto tipo de controladores como el IDA-PBC ante los efectos de fricción es mediante la inyección de una señal estimada empleando observadores [200]. Por otra parte, los modos acotados, a pesar de suavizar el efecto de control agresivo inducido por los modos deslizantes, no garantizan del todo una convergencia exacta hacia la tarea deseada, [127], no obstante, en secciones sucesivas se deducirá su estabilidad aplicada a algunos sistemas, concretamente, el carro péndulo y el motor DC.

Capítulo 4

Contribuciones de la tesis

Este capítulo muestra las principales contribuciones de esta tesis, es decir, el desarrollo de tres leyes de control para algunos sistemas electromecánicos, dos de ellas del tipo robusto y una más del tipo adaptable, este capítulo dio como resultado tres publicaciones indexadas y referidas a lo largo del texto.

4.1. Controlador no lineal robusto tipo PI

Los resultados desarrollados en esta sección, fueron publicados en [14]

Como ya se mencionó en capítulos precedentes, muchos sistemas no lineales poseen incertidumbres o son parcialmente conocidos. Para poder controlarlos, existen dos vertientes, la adaptable (compensación) y la robusta (dominación); los controladores adaptables esencialmente son capaces de encontrar valores numéricos aproximados de las incertidumbres para después con ellos cancelarlas [117, 136]; por parte de los controladores robustos, ya en sí mismos representan una estructura dominante e inmune a cierto tipo y rango de incertidumbres [32, 221, 37], cada técnica tiene sus propias ventajas e incluso existen técnicas mixtas teniendo controladores robustos-adaptables y adaptables-robustos [167, 2]. La mayor ventaja de un controlador robusto frente a un adaptativo es que la sintonización de ganancias es mínima, la desventaja es que no todos los sistemas admiten un control robusto, más aún se vuelven inestables o se destruyen con ellos, teniéndose como ejemplu un sistema mecanico controlado por modos deslizantes de primer orden y la discontinuidad por efecto efecto chattering [241, 214].

De este modo, la investigación reciente se ha enfocado en aplicar métodos que atenuen dicho fenómeno. A saber existen tres enfoques: el primero consiste en aproximar la función signo mediante funciones suaves denominadas sigmoides [188, 201, 252], en segundo lugar está la filtración, ya sea mediante observadores, o redundantemente dicho a través de filtros [63, 251] y la tercer posición es encabezada por el diseño de modos deslizantes de orden superior [214, 125, 175], el mayor problema con la segunda y tercer metodologías está en que la robustez se reduce drásticamente a casos especiales, la sintonización se vuelve el centro de la tarea y aunque en los modos deslizantes de orden superior se elimina el chattering en la variable de interés, éste es trasladado a sus derivadas superiores, aunado al esfuerzo computacional que implica su aplicación [60, 124, 177, 203].

Es de esta manera que el diseño del siguiente controlador adopta la primer estrategia: es decir basarse en el diseño mediante funciones sigmoiales, adicionalmente, se toman las ideas de: [163]

En primer lugar es de utilidad la siguiente definición:

Sea de utilidad la siguiente función sigmoial denominada saturación (4.1)

$$S_k[x] = x \text{ sí } |x| < \varsigma; \text{ de otro modo } ksign(x) \quad (4.1)$$

sea también la siguiente notación para una función sigmoial genérica definida en secciones precedentes $\alpha(x)$

Teniendo estas definiciones, se procede a un diseño escalonado a partir de un sistema muy simple o sistema de primer orden perturbado (4.2), ello dará pauta a poder adaptarlo a modelos más complejos

$$\dot{y} = u + \rho(y, t) \quad (4.2)$$

con $\rho(y, t)$ representando perturbaciones desconocidas, pero acotadas, en efecto sea $|\rho(y, t)| \leq \bar{r}$, es sabido que sí se aplica la siguiente ley de control $u = -ksign(y)$ con $k > \bar{r}$, entonces, el sistema referido converge globalmente al origen en tiempo finito [197, 202, 161].

Sin embargo, la definición discontinua del propio controlador, conduce a efectos indeseables denominados "de chatering". Para mejorar tal desempeño, se propone el siguiente controlador acotado tipo PI

$$\begin{aligned} u &= -k_p S_{M_1}[\gamma(Ly)] + S_{M_2}[z] + \rho(y, t) \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1}[\gamma(Ly)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde L, k_p, k_d, M_1 y M_2 son constantes positivas a ser diseñadas y $\gamma(*) = \alpha(*) (\beta_0 + \beta_1 *^2)^\kappa$

Diseño y demostración por Lyapunov

Con el controlador propuesto y el sistema referido, resulta el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -k_p S_{M_1}[\gamma(Ly)] + S_{M_2}[z] + \rho(y, t) \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1}[\gamma(Ly)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

para determinar su estabilidad y región de atracción, así como sintonizar las constantes, se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V_y = \frac{y^2}{2} \quad (4.5)$$

Derivando respecto a las ecuaciones de lazo cerrado

$$\dot{V}_y = y(-k_p S_{M_1}[\gamma(Ly)] + S_{M_2}[z] + \rho(y, t)) \quad (4.6)$$

por lo cual

$$\dot{V}_y \leq -|y|(-k_p S_{M_1}[\gamma(L|y|)] - M_2 - \bar{r})$$

para garantizar estabilidad asintótica del estado y es requerido $k_p M_1 > M_2 + \bar{r} + \delta$ esto asegura que en un tiempo finito $|y| \leq y_M = \frac{1}{L} \alpha^{-1}(\frac{M_1}{\beta_0^k})$

ahora bien para el estado z se propone el siguiente cambio de variable

$$w = y - \frac{k_p z}{k_d} \quad (4.7)$$

con ello en mente y los resultados obtenidos hasta este punto, se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V_w = \frac{w^2}{2} \quad (4.8)$$

diferenciando nuevamente respecto a las trayectorias en lazo cerrado

$$\dot{V}_w = w S_{M_2}[k(y - w)] - \bar{r}|w| \quad (4.9)$$

con $k = \frac{k_d}{k_p} > 0$ de este modo para garantizar estabilidad asintótica de w es necesario que $M_2 > \bar{r} + 2ky_M + \delta$, nuevamente, en un tiempo finito $|w| \leq \frac{\bar{r}}{k} + y_M + \delta$

Con este resultado y mediante la desigualdad $|z/k| - |y| \leq |w|$ se obtiene $|z| \leq \bar{r} + ky_M + \delta$, por lo cual se asegura que z y y esta acotados y convergen a esa cota.

Una forma de mejorar la estimación de la región de atracción de y es utilizando la siguiente función de Lyapunov (notar que la integral de una función sigmoide es definida positiva)

$$V = \int_0^y S_{M_1}[\gamma(Ls)] ds + \frac{1}{k_d} \int_0^z S_{M_1}[s] ds \quad (4.10)$$

derivando, nuevamente con respecto al sistema en lazo cerrado

$$\dot{V} = -k_p S_{M_1}^2[\gamma(Ly)] + S_{M_1}[\gamma(Ly)]\rho(y, t) \leq -S_{M_1}[\gamma(L|y|)](k_p S_{M_1}[\gamma(Ly)] - \bar{r}) \quad (4.11)$$

Como ya fue demostrado, en un tiempo finito, y tiende a converger, por tanto las funciones de saturación tienen comportamiento lineal alrededor del valor de estabilización de y (cercano a cero), de esta forma, la derivada de la función de Lyapunov se vuelve: $\dot{V} \leq -\gamma(L|y|)(k_p\gamma(Ly) - \bar{r})$, la cual es definida negativa en la siguiente región de confinamiento

$$g(y) = k_p\gamma(Ly) - \bar{r} > 0 \quad (4.12)$$

Generalización a algunas incertidumbres no acotadas

Suponer que la incertidumbre ρ es no acotada pero estrictamente positiva $|\rho(y, t)| \leq \bar{r}\rho_u(y)$. Un ejemplo de $\rho_u(y)$ sería $1 + |y|^{\frac{1}{2}} + |y|^2$

Utilizando el siguiente controlador

$$\begin{aligned} u &= -k_p\rho_u(y)S_{M_1}[\gamma(Ly)] + \rho_u(y)S_{M_2}[z] \\ \dot{z} &= -k_d\rho_u(y)S_{M_1}[\gamma(Ly)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se llega al sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -k_p\rho_u(y)S_{M_1}[\gamma(Ly)] + \rho_u(y)S_{M_2}[z] + \rho(y, t) \\ \dot{z} &= -k_d\rho_u(y)S_{M_1}[\gamma(Ly)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Utilizando nuevamente la función de Lyapunov (4.10) y derivando alrededor de las nuevas trayectorias se llega a lo siguiente

$$\dot{V} \leq -\rho_u(y)S_{M_1}[\gamma(L|y|)](k_pS_{M_1}[\gamma(Ly)] - \bar{r}) \quad (4.15)$$

La perturbación es definida positiva y por lo tanto no afecta el análisis, simplemente se requiere que $k_pM_1 > M_2 + \bar{r} + \delta$, ello implica que $|y| \leq \bar{y}$ en un tiempo finito para la región de atracción encontrada previamente: $g(y) = k_p\gamma(Ly) - \bar{r} > 0$

Expansión a sistemas no lineales de segundo orden

Llegar a este punto es fundamental, dado que la mayoría de los sistemas mecánicos, incluyendo robots manipuladores, mecanismos subactuados y robots móviles son sistemas no lineales de segundo orden [157, 110, 192], por tanto el desarrollo de la presente sección, permitirá extender la aplicación de la sección previa a sistemas físicos.

Supongamos la siguiente estructura matemática en variables de estado, de uso común en artículos y libros de robótica, control y modelado físico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \rho(x, t) + bu \end{aligned} \quad (4.16)$$

con $x = [x_1, x_2]$, suponer en este caso que la incertidumbre es acotada y dicha cota está definida por:

$$|\rho(x, t)| \leq k_b + k_a |x| \quad (4.17)$$

con $k_a, k_b \geq 0$, el objetivo es llevar los estados x_1 y x_2 al origen, para ello también se utilizará la siguiente variable auxiliar $\sigma(x) = x_2 + \lambda x_1$ con $\lambda > 0$, una forma de lograr el objetivo principal es hacer que $\sigma(x)$ y su derivada converjan a cero en tiempo finito.

Se propone entonces el siguiente controlador

$$\begin{aligned} u &= -k_p \rho_1(x) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] + \rho_1(x) S_{M_2}[z] \\ \dot{z} &= -k_d \rho_1(x) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Donde $\rho_1(x) \leq k_b + k_a |x| + \lambda |x_2|$; $\lambda > 0$

Luego de algunos cálculos, se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= b \rho_1(x) (-k_p S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] + S_{M_2}[z] + p(x, t)) \\ \dot{z} &= -k_d \rho_1(x) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Donde el termino $p(x, t)$ agrupa todas las incertidumbres y es definido como

$$p(x, t) = \frac{\lambda x_2 + \rho(x, t)}{b \rho_1(x)} \quad (4.20)$$

Además máx $|p(x, t)| \leq \bar{r} = \frac{1}{b}$ puede verse que de igual modo a la sección anterior, la misma selección de M_1 y M_2 conllevan a que σ y z convergen asintóticamente, de hecho

$|\sigma| \leq \sigma_M = \frac{1}{L} \alpha^{-1} (\frac{M_1}{\beta_0^k})$, a efectos de estimar la región de confinamiento de σ , se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V = \int_0^{\sigma} \gamma(L\sigma(s)) ds + \frac{b}{k_d} \int_0^z S_{M_2}[s] ds \quad (4.21)$$

y derivando alrededor de las trayectorias obtenidas, se llega a lo siguiente

$$\dot{V} \leq -b(k_p \rho_1(x) \gamma^2(L\sigma) + \gamma(L\sigma) p(x, t)) = -b \rho_1(x) \gamma(L|\sigma|) (k_p \gamma(L|\sigma|) - \bar{r})$$

Por lo tanto, la única manera de mantener negativa esta derivada de Lyapunov es dentro en la siguiente región de atracción $g(y) = k_p \gamma(L|\sigma|) - \bar{r} > 0$ verificando así, la estabilidad asintótica de σ a una región acotada alrededor del origen y en consecuencia de x_1 y x_2

Extensión a una familia de sistemas no lineales (e.g carro péndulo)

Muchos sistemas admiten la siguiente representación en cascada de integradores, entre ellos los mecanismos de carro péndulo, de furuta y de *ball and beam* entre otros [157, 123], a este tipo de sistemas se llega mediante las transformaciones conocidas como *feedback linearization* o de linealización por retroalimentación [102, 111, 243, 207].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + f(x) + d \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u + d_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Donde $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ son los estados del sistema, u es la entrada de control, $f(x)$ son funciones no lineales que satisfacen $|f(x)| \leq \kappa|x|$, d_1 y d_2 son perturbaciones acotadas, es decir

$$|d_i| \leq \bar{d}$$

El objetivo consiste en llevar a los estados x a una pequeña vecindad alrededor del origen. De forma similar a la sección precedente, se propone la siguiente variable auxiliar, la cual puede verse como una pseudo-superficie de deslizamiento [214]

$$\sigma(x) = x_4 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \quad (4.23)$$

con $\lambda_i > 0$, la derivada de esta variable auxiliar es:

$$\dot{\sigma}(x) = u + Kx + \lambda_2 f_1(x) + f_2(x) + d_0 \quad (4.24)$$

donde $d_0 = d_1 + \lambda_2 d_1$ y $Kx = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4$

Simplificando y haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= k(\bar{d}_1 + \lambda_2 \bar{d}_2 + (\lambda_2 \kappa_1 + \kappa_2)|x|) \\ p(x, t) &= \frac{f_2(x) + d_0}{\rho_1(x)} \end{aligned}$$

La derivada se transforma en:

$$\dot{\sigma}(x) = \rho_1(x) \left[\frac{u + Kx}{\rho_1(x)} + p(x, t) \right] \quad (4.25)$$

con $k > 1$ y $|p(x, t)| \leq \bar{r} = \frac{1}{k}$

Con esto en mente, se propone para lograr el objetivo descrito, el siguiente controlador

$$\begin{aligned} u &= -k_p \rho_1(x) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] + \rho_1(x) S_{M_2}[z] \\ \dot{z} &= -k_d \rho_1(x) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

De forma semejante al capítulo previo, se demuestra que σ es asintóticamente convergente hacia un valor cercano a cero, de hecho $|\sigma| \leq \sigma_M = \frac{1}{L} \alpha^{-1} \left(\frac{M_1}{\beta_0^k} \right)$, implicando que

$$x_4 = -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 + \delta$$

Por otra parte, sí se observan las primeras tres ecuaciones del sistema en cascada, se tiene que son globalmente Lipschitz por lo que los estados x_1, x_2, x_3 no pueden tener un tiempo finito de escape [111], de forma que después de un tiempo, las últimas tres ecuaciones pueden ser reescritas como:

$$\dot{q} = A_\lambda q + B(q, t) \quad (4.27)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix}; q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$B(q, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{d}_1 + \bar{\sigma} + \kappa(1 + \bar{\lambda}) |x| \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

con $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_i\}$, para asegurar la estabilidad de este sistema la matriz A_λ debe ser Hurwitz (ver sección precedente sobre estabilidad lineal), sí $\bar{d}_1 \approx 0$ y $\bar{\sigma} \approx 0$ esto puede garantizarse con el teorema de perturbaciones evanescentes de Khalil [111] para esto, para cumplir con todo lo requerido A_λ debe satisfacer las siguientes condiciones

$$PA_\lambda + A_\lambda^T P = -Q$$

$$\kappa \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)(1+\bar{\lambda})}$$

Donde Q puede ser la matriz identidad de dimensión tres, después con ese dato se encuentra una P que satisfaga la primer ecuación (criterio de Lyapunov para sistemas lineales) y finalmente se verifica que satisfaga la segunda ecuación para un valor dado de κ . Todo esto garantiza la estabilidad asintótica de todos los estados, no obstante como se tiene que $\bar{d}_1 \neq 0$, solo puede asegurarse la estabilización hacia una región de confinamiento lo suficientemente pequeña, siempre y cuando las perturbaciones estén acotadas, esto indica que en un tiempo de estabilización dado, $|x| \leq \bar{x}(\bar{\lambda}, L)$ pudiendo escoger $\bar{\lambda}, L$ tal que \bar{x} sea tan pequeño como se necesite.

Ejemplo aplicado al motor DC

Una representación en variables de estado del motor DC con masa colgante rígida a modo de péndulo invertido es la siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{u}{J} - \frac{mgl}{2J} \sin(x_1) + \rho(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Asumiendo que los parámetros son parcialmente conocidos y la perturbación es constante y están dados por:

$$\frac{1}{J} = 0,8 \pm 0,2; \quad \frac{mgl}{2J} = 1 \pm 0,25; \quad \rho(t) = 1 + 0,1 \sin(t/5)$$

y teniendo como objetivo llevar a cero los siguientes errores de seguimiento de trayectorias: $e_1 = x_1 - x_r$, $e_2 = x_2 - \dot{x}_r$, definiendo la siguiente variable auxiliar $\sigma = e_1 + e_2$ y utilizando la ley de control dada por:

$$\begin{aligned} u &= -k_p \rho_1(e_1) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] + S_{M_2}[z] + \ddot{x}_r \\ \dot{z} &= -k_d \rho_1(e_1) S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

con $\rho_1(e_1) = 1 + |e_1|$, se asegura con base a las demostraciones previas que ambos errores convergen a una cota tan pequeña como se requiera, para el caso de la presente simulación:

$$\gamma(\sigma) = \sqrt{L + \frac{\sigma^2}{L^2} \tan^{-1}(\sigma)}; \quad k_p = 5; \quad k_d = 1; \quad M_2 = 2,78; \quad M_1 = 3; \quad k = 0,2; \quad \bar{r} = 2,7; \quad \sigma_M = 68 \times 10^{-4}$$

En la siguiente figura, se ilustran los resultados de simulación Fig(4.1), a la izquierda, esta la convergencia de la posición, al centro la de velocidad y a la derecha el torque aplicado

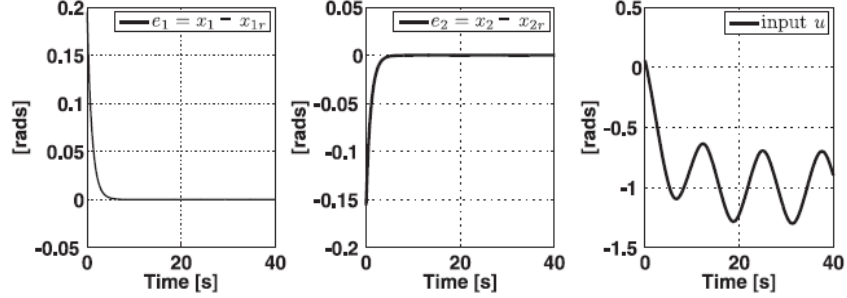


Figura 4.1: Simulación motor DC con péndulo invertido

4.2. Controlador no lineal robusto tipo PD con observador por modos deslizantes

A continuación se presenta el diseño de un controlador robusto de tipo adaptable para el péndulo invertido, presentado en el congreso AMCA 2013 [5], el péndulo invertido puede o no considerarse como un sistema subactuado, esto es, si se considera como una entidad puramente mecánica es un sistema de un solo grado de libertad y una sola variable de control mecánica, por lo tanto está completamente actuado, sin embargo, visto como un sistema electromecánico, es un sistema subactuado debido a que es la interacción de un sistema eléctrico y uno mecánico así mismo la estabilización de ambos se realiza a través de una sola entrada de control eléctrica, para fines de esta tesis, solamente se supondrá que el sistema eléctrico es mucho más rápido que el mecánico y presenta por default un comportamiento estable (la única forma de inestabilizar un circuito R-L-C en serie es cancelar la resistencia o induciendo oscilaciones entre el efecto capacitivo y el inductivo, sin embargo, el fabricante garantiza que esto no sucede).

El controlador a continuación mostrado es de tipo adaptable y está basado en las técnicas de modos deslizantes para obtener una medida aproximada de las perturbaciones y en la técnica PD con compensación para realizar la tarea de control. Asimismo incluye un observador para determinar el estado desconocido de velocidad, pues en las prácticas realizadas en el laboratorio de control del CINVESTAV Zacatenco, solo se contó con mediciones de posición

Cabe mencionarse que durante la investigación del estado del arte para la elaboración de otros controladores para sistemas subactuados presentes en esta tesis, se encontró un controlador similar al desarrollado en este capítulo en [210, 209, 76] y la mayor variante es que los autores presentan un observador básico tipo Luebenger o algebraico. Algunas otras técnicas para estimar las derivadas de una función dada, en este caso útil para determinar un aproximado de las perturbaciones incidentes están en [216, 77, 218, 112, 149], en estas referencias se incluyen técnicas lineales, técnicas por modos deslizantes, técnicas por alta ganancia y asimismo técnicas de estimación inteligente como redes neuronales.

Modelado y consideraciones de diseño

El controlador presentado en esta sección es básicamente un PD con compensación estimada, es decir, contiene un cálculo adaptable de perturbaciones desconocidas, utilizando la siguiente variante de la ecuación (3.1), es decir un modelo puramente mecánico o robot manipulador de 1GDL:

$$\ddot{x} = \frac{1}{J}(-f_d\dot{x} - f_c \text{sign}[\dot{x}] + \eta - mgL \sin x + k_u\tau) \quad (4.30)$$

la cual contempla efectos de fricción de coulomb e interacción de perturbaciones exógenas. Podemos notar los siguientes tres términos:

$w = \frac{-f_c \text{sign}[\dot{x}] + \eta - mgL \sin x}{J}$ donde f_c, m, g, L , corresponden a magnitudes de fricción y propiedades internas del sistema (masa, longitud) pero desconocidas que pueden ser consideradas como perturbaciones endógenas y η , son los efectos externos de adyacencia indeseable al sistema.

Cabe mencionar que w se presupone acotada es decir $\bar{w} \leq \frac{1}{J}(+\bar{f}_c + \bar{\eta} + \bar{m}\bar{g}\bar{L})$

Como ya se mencionó, la ley de control además de ser robusta ante estas perturbaciones debe contener un término de estimación de la velocidad \dot{x} , dado que en la simulación y practica se considera solo la presencia del estado x

Bajo las definiciones anteriores, el modelo en espacio de estados del sistema a controlar es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f_0 x_2 + w + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.31}$$

con: $f_0 = \frac{f_d}{J}, u = \frac{k_u \tau}{J}$

Diseño del observador

Para disponer de una estimación del estado x_2 necesaria para el diseño del controlador, se propone la siguiente variante de observador Luebenger [219]

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f_0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} (y - z_y)\tag{4.32}$$

con $z_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} z$

introduciendo el efecto de las perturbaciones

$$\hat{x} = z + K^{-1} v_2 (y - z_y)\tag{4.33}$$

Donde $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -L_1 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector truncado $v_2(y - z_y)$ corresponde a los primeros dos elementos del vector $v(y - z_y) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$

Estimador de los efectos dinámicos de las perturbaciones y de las perturbaciones

Para esta sección se utilizará el diferenciador exacto de alto orden de Levant [125]

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -\lambda_1 M^{\frac{1}{3}} |v_1 - (y - z_y)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}[v_1 - (y - z_y)] + v_2 \\ \dot{v}_2 &= -\lambda_2 M^{\frac{1}{2}} |v_2 - \dot{v}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}[v_2 - \dot{v}_1] + v_3 \\ \dot{v}_3 &= -\lambda_3 M \text{sign}[v_3 - \dot{v}_2]\end{aligned}\tag{4.34}$$

Integrando este vector se obtienen los efectos dinámicos de las perturbaciones, útiles en la definición del observador de velocidad de las ecuaciones previas; por otra parte, la estimación de las perturbaciones está dada por:

$$\hat{w} = v_3 + L_2 v_1 + f_0 v_2 \quad (4.35)$$

Diseño del controlador

Finalmente, se propone el siguiente controlador

$$u = \frac{1}{k_u} (-\hat{w} + f_0 \hat{x}_2 + \ddot{x}_r - k_p(x_1 - x_r) - k_d(\hat{x}_2 - \dot{x}_r)) \quad (4.36)$$

Estabilidad en lazo cerrado

Sustituyendo dicho controlador en el sistema original de ecuaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1_r} &= x_{2_r} \\ \dot{x}_{2_r} &= -k_p x_{1_r} - k_d x_{2_r} \end{aligned} \quad (4.37)$$

siendo $x_{1_r} = x_1 - x_r$ y $x_{2_r} = \hat{x}_2 - \dot{x}_r$ con esto en mente, podemos notar que se trata de probar la estabilidad de un sistema lineal teniendo dos posibles opciones para tal demostración: la primera sería usar el teorema lineal de Lyapunov y la segunda el lugar geométrico de las raíces. En esta última instancia, simplemente deben diseñarse k_p y k_d tal que el polinomio característico $s^2 + k_d s + k_p$ tenga sus raíces en el semiplano complejo izquierdo.

Resultados

En las siguientes figuras se ilustra una comparativa de resultados de simulación contra resultados experimentales en el equipo del Cinvestav Zacatenco [6]. Para ello se realizaron dos tareas:

1er tarea: seguimiento de una trayectoria sinusoidal definida como $0,25 \sin(t/6)$ perturbada con dos señales indeseables inyectadas mediante torque, una de tipo constante $0,01$ y la otra sinusoidal $0,01 \sin(t)$. La Figura(4.2) corresponde al resultado de simulación, por otra parte, la Figura(4.3) al experimental. Las condiciones iniciales corresponden en todos los casos al origen. De acuerdo al análisis de ambas figuras se concluye robustez, adecuada estimación y realización de la tarea programada, en ambas graficas se muestran (de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha): la perturbación calculada, el voltaje de control, la velocidad de seguimiento, la señal de seguimiento, el error de velocidad y el error de posición.

2da tarea: seguimiento de una trayectoria sinusoidal mixta $0,25 \sin(t/6) + 0,1 \sin(t/2)$, utilizando las mismas perturbaciones de la primer tarea. La Figura(4.4) corresponde al resultado de simulación; por otra parte, la Figura(4.5) al experimental. Las condiciones iniciales corresponden en todos los casos al origen. De acuerdo al análisis de ambas figuras se concluye robustez, adecuada estimación y realización de la tarea programada, en ambas gráficas

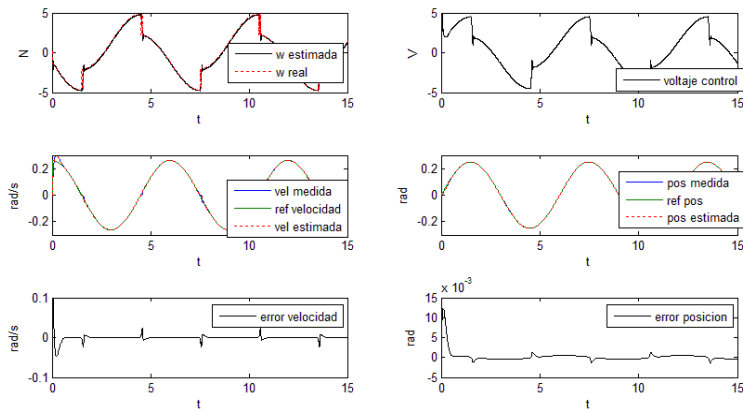


Figura 4.2: Tarea sinusoidal simulada

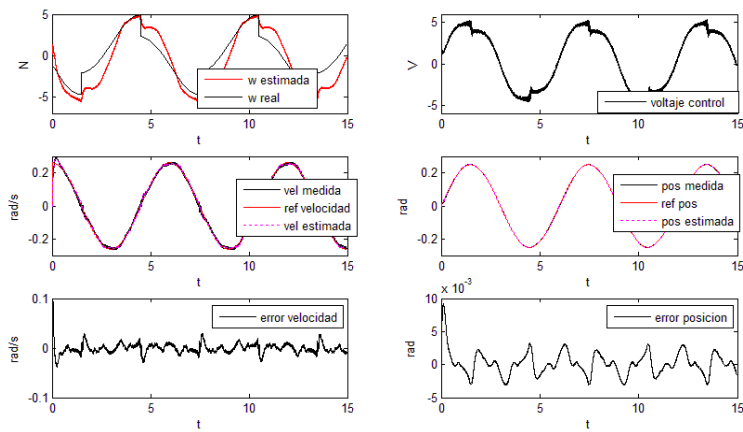


Figura 4.3: Tarea sinusoidal real

se muestran (de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha): la perturbación calculada, el voltaje de control, la velocidad de seguimiento, la señal de seguimiento, el error de velocidad y el error de posición.

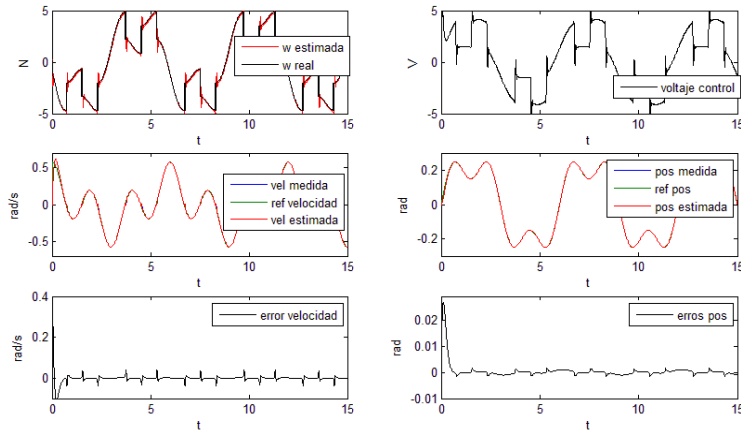


Figura 4.4: Tarea suma sinoidal simulada

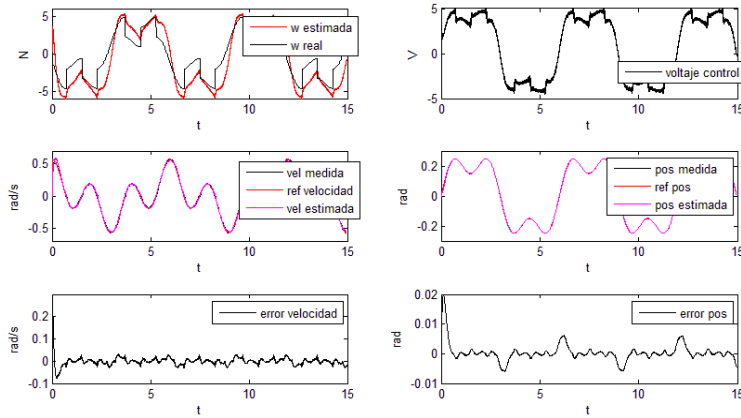


Figura 4.5: Tarea suma sinoidal real

4.3. Estabilización del carro péndulo mediante cascada de integradores

Esta sección presenta la metodología de control del sistema carro péndulo cuyos resultados se mostraron en el congreso ICMEAE 2013 con la referencia [13], en el congreso CLCA 2014 [145] y en el artículo [10]

Existen dos etapas en el control de sistemas subactuados, la primera es conocida como *swing-up* (es decir llevar al sistema alrededor del punto de operación) y la segunda es la estabilización alrededor de dicho punto, la razón de que se proceda en esta forma es que [231] no hay forma de estabilizar sistemas subactuados sino es mediante un controlador de acción discontinua.

En este capítulo, se propone una estrategia de control para estabilizar el carro péndulo con

fricción desacoplada (es decir en la coordenada subactuada), aplicable a condiciones iniciales dentro del plano horizontal positivo y conociendo el coeficiente de dicha fricción, una de las novedades de esta estrategia es la inclusión de la fricción desacoplada, la cual es actualmente un reto poco explotado, dado que muchos autores la obvian, sin embargo es de muy alta prioridad dado que la mencionada fuerza de fricción puede fácilmente destruir la estabilidad del sistema carro péndulo [89, 160, 246]

La estrategia del controlador diseñado se basa en la transformación del sistema a una cadena de integradores perturbados (3.14), posteriormente se procede a estabilizar dicha cadena de integradores mediante una combinación de controlador PD lineal combinado con una estrategia tipo *twisting* [147, 178, 197, 202]. Tal combinación es propuesta para que el PD estabilice el sistema pendular y el algoritmo tipo *twisting* lo lleve una vez estabilizado, al origen. A continuación se describe la estrategia de diseño.

Retomando el modelo matemático del carro péndulo (3.14) podemos observar que en la segunda ecuación aparece el término $\frac{x_3 x_4^2}{(1+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$, donde la parte referente a $\frac{x_3}{(1+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$ puede acotarse con un valor máximo $\kappa_0 = 0,3849$, sin embargo, el término x_4^2 induce efectos de inestabilidad parcial o total denominados "peaking", de acuerdo a lo referido en [113, 208].

Por otra parte, el término de fricción no acoplada retransforma la cadena de integradores en (3.14), a la siguiente variante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 + \frac{x_3 x_4^2}{(1+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dx_4}{(1+x_3^2)^{\frac{1}{2}}} \\ x_4 \\ u \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Definiendo las siguientes variables $|\alpha(*)| = \frac{*}{(1+*^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \kappa_0 = 0,3849$; $|\beta(*)| = \frac{1}{(1+*^2)^{\frac{1}{2}}} \leq 1$ y haciendo el siguiente escalamiento temporal $\tau = \epsilon t$ además de:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^2 z_1 \\ \epsilon z_2 \\ z_3 \\ \frac{z_4}{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

con ϵ sintonizable y mayor que cero, el sistema a analizar es transformado en:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 + \epsilon q_4 \rho(q) \\ q_4 \\ v_\epsilon \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

donde $v_\epsilon = \frac{u}{\epsilon^2}$ y la perturbación evanescente (ver apéndice A.3) $\rho(q) = \epsilon \alpha(q_3) q_4 - d\beta(q_3)$

Diseño del controlador

los últimos dos estados del sistema de ecuaciones, pueden ser estabilizables mediante la ley de control $u = -\frac{v_s}{k_3} - \frac{k_1 q_3 + k_2 q_4}{k_3}$ de hecho, bajo tal esquema referidos estados tienden en tiempo finito a los siguientes valores : $|q_3| \leq \frac{\bar{v}_s + \delta}{k_1}$; $|q_4| \leq \frac{\bar{v}_s + \delta}{k_2}$ donde $|v_s| \leq \bar{v}_s$ (ver apéndice A.5), quedando con ello el problema de la estabilización de los estados q_1 y q_2 . Para esto se propone la siguiente transformación lineal difeomórfica.

$$\begin{aligned} s_1 &= k_1 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 + (k_3 + k_2) q_3 + k_3 q_4 \\ s_2 &= k_1 q_2 + k_2 q_3 + k_3 q_4 \end{aligned} \quad (4.41)$$

El sistema original es de este modo transformado al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 - v_s + \epsilon q_4 \rho(q) (k_1 + k_2) \\ \dot{s}_2 &= -v_s + \rho(q) \epsilon k_1 q_4 \\ \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= -\frac{v_s}{k_3} - \frac{k_1 q_3 + k_2 q_4}{k_3} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sí v_s se propone como $v_s = \lambda_1 \text{sign}(s_1) + \lambda_2 \text{sign}(s_2)$, entonces podemos asegurar estabilidad asintótica del sistema.

Demostación por Lyapunov

usando la función de Lyapunov basada en [8]

$$V = \frac{k_1}{2k_3} q_3^2 + \frac{q_4^2}{2} + \frac{\lambda_1}{k_3} |s_1| + \frac{s_2^2}{2k_3} \quad (4.43)$$

derivando respecto a los estados previamente definidos, considerando los valores de estabilización para q_3 y q_4 , así como la ley de control propuesta, se obtiene que:

$$\dot{V} = -\frac{k_2}{k_3} q_4^2 + \frac{q_4 v_s}{k_3} + W \quad (4.44)$$

donde

$$W = \frac{\lambda_1}{k_3} (k_2 + k_1) \text{sign}[s_1] \rho(q) \epsilon + \frac{k_1}{k_3} s_2 \rho(q) \epsilon - \frac{\lambda_1^2}{k_3} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \text{sign}[s_1] \text{sign}[s_2]}{k_3} - \frac{\lambda_2}{k_3} \quad (4.45)$$

usando la desigualdad de Young (apéndice A.1): $|q_4 v_s| \leq \frac{q_4^2 + v_s^2}{2}$

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{k_2}{k_3} q_4^2 - \frac{1}{2k_3}\right) - \frac{v_s^2}{2k_3} + W$$

después de algunos cálculos puede acotarse el siguiente término

$$-\frac{v_s^2}{2k_3} + W \leq -\frac{\lambda_1^2}{2k_3} - \frac{\lambda_2}{k_3} |s_2| + \frac{\lambda_2^2}{2k_3} + \frac{k_1}{k_3} |s_2| \epsilon \bar{q}_4 \bar{\rho} + \frac{\lambda_1}{k_3} (k_2 + k_1) (\kappa_0 \epsilon^2 q_4^2 + \epsilon d \bar{q}_4)$$

donde $\bar{\rho} = |\rho(q)| = \kappa_0 \epsilon \bar{q}_4 + d$ es el valor terminal de la función $\rho(q)$ evaluada en el valor de convergencia de q_4 , de este modo

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{1}{2k_3} - \frac{\lambda_1}{k_3} \epsilon^2 (k_2 + k_1) \kappa_0 \right) q_4^2 - |s_2| \left(\frac{\lambda_2}{k_3} - \frac{k_1}{k_3} \epsilon \bar{q}_4 \bar{\rho} \right) - \frac{\lambda_1^2}{2k_3} + \frac{\lambda_2^2}{2k_3} + \frac{\lambda_1 d}{k_3} \epsilon (k_2 + k_1) \bar{q}_4$$

De este modo sí se diseñan las ganancias tal que, $k_2 > \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{k_3} \epsilon^2 (k_2 + k_1) \kappa_0 + \delta_1$; $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 + 2\lambda_1 d \epsilon (k_2 + k_1) \bar{q}_4 + \delta_2$ y $\lambda_2 > k_1 (d \epsilon \bar{q}_4 + \kappa_0 \epsilon^2 \bar{q}_4^2) + \delta_3$

Se concluye que la derivada de la función de Lyapunov propuesta es semidefinida negativa y dada por:

$$\dot{V} \leq - \frac{\delta_1}{k_3} q_4^2 - |s_2| \frac{\delta_3}{2k_3} - \frac{\delta_2}{k_3}$$

Demostración de estabilidad asintótica por medio del teorema Barbalat

Para probar que los estados del sistema convergen a cero, se integra en ambos lados de la derivada de Lyapunov

$$\frac{\delta_1}{k_3} \int_{t_0}^t q_4^2(s) ds + \frac{\delta_3}{2k_3} \int_{t_0}^t |s_2(s)| ds < V(0)$$

esto implica que las señales s_2 y q_4 son respectivamente L_1 y L_2 y por tanto de acuerdo al lema de Barbalat $s_2 \rightarrow 0$ y $q_4 \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, para demostrar la convergencia de s_1 basta con retomar la ecuación $\dot{s}_1 = s_2 - v_s + \epsilon q_4 \rho(q) (k_1 + k_2)$ y evaluarla en $s_2 \rightarrow 0$ y $q_4 \rightarrow 0$ es simple verificar que $\dot{s}_1 = -\lambda_1 \text{sign}[s_1] + \Delta(q)$ ello es simplemente la dinámica del modo deslizante de primer orden por lo tanto $s_1 \rightarrow 0$ (28)

Finalmente, para probar estabilidad asintótica del estado q_3 , se utiliza la siguiente variable auxiliar $z = k_3 q_4 + k_2 q_3 - s_2$ derivando esta expresión se obtiene

$\dot{z} = -\frac{k_1}{k_2} (z - k_3 q_4 + s_2) - k_1 \epsilon q_4 \rho(q)$ debido a la convergencia de s_2 y q_4 , la ecuación diferencial se vuelve $\dot{z} = -\frac{k_1}{k_2} z$ ello implica que $z \rightarrow 0$ y en consecuencia $q_3 \rightarrow 0$

Simulación

Con base a los resultados obtenidos, se procede a mostrar una simulación del sistema en lazo cerrado con el controlador descrito, para ello se utilizaron los siguientes valores:

d	0.9
k_1	0.9
k_2	3.5
k_3	4
λ_1	6
λ_2	0.8
ϵ	0.4

y las siguientes condiciones iniciales: $(0,9, 0, 0, 0)$

Adicionalmente los siguientes resultados de simulación Fig(4.6), se compararon con el trabajo de [197], en la figura referida aparecen de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda las siguientes variables: posición angular, posición del carro, velocidad angular y velocidad del carro, se concluye con la simulación estabilidad y realización de la tarea descrita en un modo más suave que el trabajo de compación.

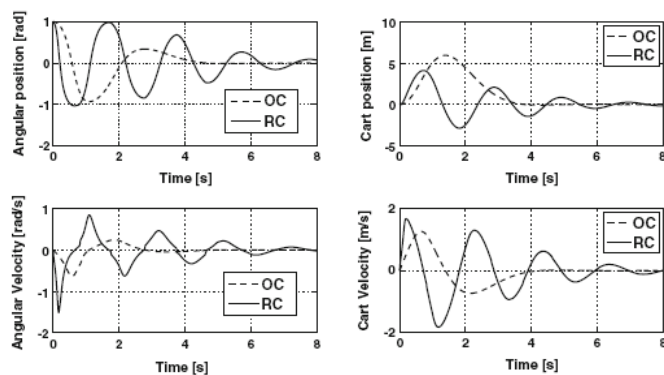


Figura 4.6: Estabilización del carro péndulo comparativa con Orlov

Capítulo 5

Resultados, conclusiones, recomendaciones y trabajo a futuro

A continuación se ofrece un resumen de los resultados obtenidos y las consideraciones a efectuarse en futuros trabajos.

5.1. Resultados

5.1.1. Publicaciones

En el artículo de nombre A Nonlinear Robust PI Controller for an Uncertain System [14] de corte JCR, se induce una metodología de control robusto que utiliza la técnica proporcional integral (PI) con saturaciones, en este artículo se muestra de forma escalonada su aplicación a sistemas de primer orden con perturbaciones acotadas, de primer orden con perturbaciones sin cota pero positivas, sistemas de segundo orden y finalmente sistemas de tipo cadena de integradores, tiene aplicaciones desde un simple motor DC hasta una amplia gama de sistemas incluidos mecanismos subactuados como el carro péndulo, el péndulo de Furuta, el *ball and beam* y aquellos que puedan ser llevados a linealización por retroalimentación de estados (*feedback linearization*), hasta el momento los resultados de la publicación, se sustentan en simulaciones, la característica más destacable de este artículo es la inclusión de robustez frente a perturbaciones no acotadas siempre y cuando sean positivas.

En el artículo Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control [10], también de tipo JCR, se muestra otra técnica de control robusto basada en la técnica de los modos deslizantes, a diferencia de publicaciones afines, este artículo presenta un diseño bastante sólido con respecto a un tipo importante de perturbaciones no acopladas, concretamente la fricción lineal en la coordenada subactuada, los resultados de referida publicación se respaldan con simulaciones y son congruentes respecto a resultados similares ya publicados [193].

5.1.2. Congresos

En el congreso ICMEAE 2013, se presentó la ponencia Stabilizing the Damped Inverted Pendulum Cart System by Means of a Cascade Chain of Integrators [13], se mostró una ley de control no lineal suave para lograr tanto el levantamiento (*swing-up*) como la estabilización en

el punto de equilibrio inestable del carro péndulo, por medio de un encadenamiento sucesivo de saturaciones, dicha ley de control, además es robusta ante perturbaciones acotadas e incluye una forma de rechazo ante la fricción en la coordenada no actuada del sistema, estos resultados se sustentan en simulaciones.

En el congreso AMCA 2013 se presentó la ponencia Controller of a DC Servomechanism System with Uncertainties Compensation by Using a Super-Twisting Sliding Mode Observer [5], donde se ofreció una técnica de control adaptable y robusta de tipo PD con un estimador de perturbaciones endógenas y exógenas mediante la técnica del observador por modos deslizantes del tipo super *twisting*, los resultado de tal publicación, se sustentaron con aplicaciones reales de laboratorio, con un sistema de péndulo acoplado a un motor DC

En el congreso CLCA 2014 se presentó la ponencia PD + Twisting stabilization of the cart pole system in finite time [145]. En esta conferencia se presentó el diseño de un esquema de control robusto de comportamiento semejante al controlador Twisting para estabilizar el sistema de carro péndulo alrededor de su punto inestable de equilibrio, puede verse como una variante del artículo Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control.

En los congresos ICMEAE 2015, CCE 2015 y CIRC 2015, se presentaron las ponencias Control of the PVTOL system by using a backstepping method and saturation functions; Output Feedback Stabilization for a PVTOL Aircraft Based on a Sliding Mode Combined with an Energy Control Strategy y PVTOL Control: a backstepping approach, las tres con distintas metodologías para el control del mecanismo volador (PVTOL) basados en los métodos de control desarrollados en el artículo Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control.

5.1.3. Adicionales

De forma complementaria al contenido de esta tesis se logró un congreso internacional y una publicación JCR ambos tratan sobre una aplicación del controlador IDA-PBC para generar oscilaciones estos son:

CLCA 2014: Port Hamiltonian approach for inducing limit cycles [11]

A limit set stabilization by means of the Port Hamiltonian system approach [12]

CCE 2015: Master-slave synchronization for a chaotic system by means of IeI observer [9]

5.2. Conclusiones

- Se desarrolló una ley de control robusta basada en el método *super-twisting*, para el control del carro péndulo frente a perturbaciones lineales no acopladas, por ejemplo la fricción en la coordenada subactuada. Dicho enfoque se comparó frente a otros Fig(4.6) [197] y demostró tener un desempeño más suave, con menos efecto chattering y un rango más amplio de operación. Dio como resultado la publicación:[10], esta metodología de control probó ser extensible a otro tipo de sistemas que comparten la estructura matemática base del carro péndulo, como lo es el PVTOL [18, 16, 244] Fig(5.1) y el quadrotor en un trabajo a publicación futura. Respecto al artículo del PVTOL, se muestran algunas graficas comparativas del dispositivo siguiendo una trayectoria variante en

el tiempo, las leyes de control contra las cuales se realizó la comparación se describen en: [158, 85]. El resultado es equivalente, es decir, se presenta un desempeño más suave, menos chattering, un rango más amplio de operación y robustez frente a variaciones dinámicas, en este caso variación de masa. Debido a sus alcances y extensión probada a otro tipo de sistemas mecánicos, esta puede considerarse la principal contribución de la tesis.

- Se desarrolló también una ley de control robusta de tipo PI para sistemas no lineales de primer y segundo orden, incluyendo el carro péndulo y el motor DC, la cual tiene como principal característica ser robusta ante perturbaciones no acotadas siempre y cuando estas sean positivas.
- Por último, se desarrolló una ley de control adaptable la cual continua en proceso de publicación y que utiliza un observador basado en modos deslizantes de orden superior [60] para la estimación de dinámicas y parámetros no modelados, las pruebas se realizaron en el laboratorio de control del CINVESTAV Zacatenco.

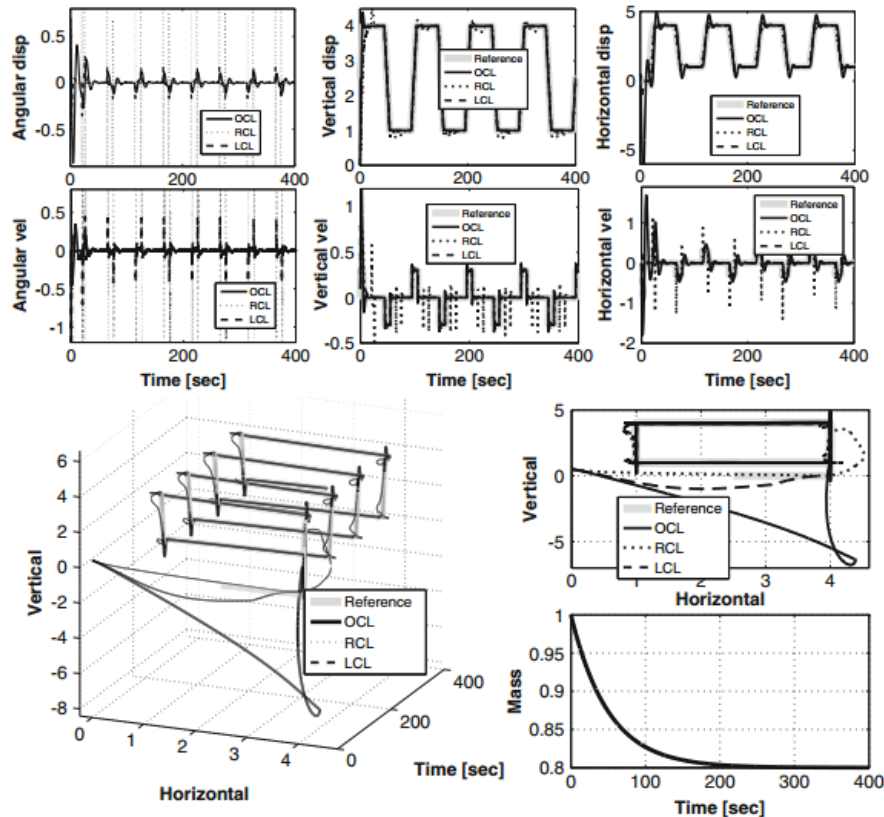


Figura 5.1: PVTOL seguimiento de trayectoria

Esta tesis mostró el diseño de tres diferentes controladores para el motor de corriente directa con masa colgante y el carro péndulo subactuado, siendo de fácil extensión para otros sistemas subactuados cuya estructura matemática resulte parecida al modelo citado, que de acuerdo a la tesis [157] corresponden a lo que el autor nombra clase II

Dos de estos controladores fueron de tipo robusto, es decir de efecto dominante respecto a cierto tipo de perturbaciones acotadas en magnitud; el tercero fue de tipo adaptable pues las dinámicas no modeladas en vez de ser dominadas fueron estimadas numéricamente y con esta estimación se realizó una compensación directa.

Todos los controladores aquí descritos además tienen la factibilidad de ser aplicados a cierto tipo de móviles aéreos: el sistema PVTOL y el sistema Quadrotor bajo ciertas condiciones de operación, tales que permitan obtener en su modelado, las formas matriciales especiales mencionadas en [157, 155, 154]

El controlador de tipo adaptable fue satisfactoriamente probado en equipo físico del CINVESTAV unidad Zacatenco, los resultados obtenidos se muestran en la sección 4.2.

Con base a todo lo anterior se lograron 3 publicaciones de tipo JCR [14, 10, 12] y la participación en siete congresos internacionales [13, 11, 145, 17, 16, 9, 19] y uno nacional [5].

5.3. Trabajo a futuro

Se propone el siguiente trabajo a futuro:

- Extensión de los controladores propuestos al espacio cartesiano de trabajo, ya que como se habrá notado, la presente tesis se enfoca en la realización de tareas en el espacio articular de los sistemas descritos [228, 213, 192], este trabajo permitiría el diseño de controladores de caminado para robots humanoides [176].
- Introducción de posibles algoritmos de optimización de consumo de potencia o de optimización de trayectorias tipo LQR.
- Posible publicación de un artículo con respecto al trabajo mostrado en el congreso [5].
- Posible extensión para estabilizar el péndulo de Furuta utilizando las suposiciones de [172, 171, 69, 71, 123, 70]
- Usar las ideas de las secciones previas para controlar sistemas aéreos subactuados como lo son ciertas configuraciones de vuelo de los sistemas PVTOL y quadrotor [101, 198, 158, 15, 85, 52, 143, 94, 242]
- Realizar y publicar estudios comparativos de los controladores aquí propuestos contra el desempeño de novedosas técnicas de control como la de invarianza e inmersión [30, 29, 115, 114]
- Construir uno o más de los sistemas aquí descritos y probar en ellos las leyes de control diseñadas

- Demostrar robustez de las técnicas descritas para fricciones de tipo no lineal por ejemplo la fricción de coulomb [159]
- Determinar las frecuencias de validez para las perturbaciones, es decir, esta tesis muestra que las perturbaciones deben tener ciertas cotas de amplitud pero jamás se realiza un análisis de sus límites frecuenciales , para ello convendría utilizar las herramientas relativas al teorema de Kharitonov [22, 184]

5.4. Recomendaciones

- En caso de diseñarse leyes de control para sistemas aéreos, disponer de algún modo para medir la pose absoluta del móvil, es decir posición y orientación tridimensionales, ya que los equipos disponibles en el mercado carecen de una forma eficiente de sensar el movimiento planar o simplemente no la tienen.
- Asimismo se debe contar con dispositivos con control independiente de los actuadores, dado que los disponibles en el mercado en su mayoría tienen embebida una interfaz que los limita a considerarse y comandarlos como partículas cartesianas.
- En caso de proseguir con leyes de control para péndulos invertidos, conviene probar robustez frente a diversos tipos de perturbaciones y no solo aquellas de tipo constante y lineal. Es recomendable utilizar diversos teoremas de perturbaciones evanescentes así como la teoría de Karitonov y Lozano.
- Es altamente recomendable diseñar una interfaz en tiempo real que vincule el equipo construido con Simulink(marca registrada) o algún software afín como Scilab (que permita controlar de 2 a 4 motores y leer de 2 a 4 sensores)
- Demostrar formalmente la estabilidad de observadores por modos deslizantes de orden superior
- Realizar una comparativa entre el desempeño de los controladores robustos contra aquellos del tipo adaptable o en el caso que así lo permita, fusionarlos.

Apéndice A

Teoremas, herramientas y consideraciones utilizadas

A.1. Desigualdad cuadrática de Young

dadas dos funciones o vectores a, b se cumple que:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{A.1}$$

demostración: considérese la siguiente desigualdad:

$$0 \leq (a - b)^2$$

desarróllese el lado derecho

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

sumar $2ab$ en cada lado de la desigualdad

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

con esto queda demostrada la desigualdad.

A.2. Polinomios Hurwitz

Considérese la ecuación diferencial escalar

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

cuya solución es:

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

la cual presenta un comportamiento estable hacia el origen solo sí el coeficiente $a < 0$

Considérese ahora el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\dot{x} = Ax$$

donde x y sus derivadas $\in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

cuya solución es:

$$x(t) = x_0 e^{At}$$

dado que A es una matriz, un comportamiento estable semejante al caso escalar es obtenido solo si los eigenvalores de A son negativos, ello es equivalente a decir que las raíces del polinomio característico de la matriz son negativas o simplemente que la matriz A es hurwitz .

A.3. Perturbación evanescente

Supóngase el sistema de ecuaciones diferenciales con perturbación $\Delta(t, x)$

$$\dot{x} = f(t, x) + \Delta(t, x) \quad (\text{A.2})$$

Supóngase que el punto $x = 0$ es un equilibrio estable del sistema sin perturbaciones $\dot{x} = f(t, x)$ y sea V una función de Lyapunov que satisface:

$$\begin{aligned} c_1 |x|^2 &\leq V(t, x) \leq c_2 |x|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -c_3 |x|^2 \\ \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| &\leq c_4 |x| \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Adicionalmente, la perturbación satisface la condición de crecimiento lineal $\Delta(t, x) \leq \gamma |x|$ siendo γ una constante negativa.

derívese V respecto al sistema perturbado

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta(t, x) \quad (\text{A.4})$$

usando las suposiciones previas

$$\dot{V} \leq -c_3 |x|^2 + c_4 \gamma |x|^2 \quad (\text{A.5})$$

es claro que esta última ecuación será al menos semidefinida negativa y por tanto el sistema será estable si $\gamma < \frac{c_3}{c_4}$

A.4. IDA-PBC vs efectos disipativos

Uno de los motivantes para la realización de esta tesis es que muchas de técnicas de control ya existentes para la estabilización de sistemas subactuados como lo es el método IDA-PBC (al menos en su forma estándar) presentan severos inconvenientes frente a efectos de disipación como lo es la fricción lineal, ello se describe a continuación.

Supongamos que un sistema dado puede ser escrito de acuerdo a la siguiente representación en variables de estado (por ejemplo la familia del carro péndulo ver [51])

$$\ddot{x} = -F(\theta) - G(\theta)u \quad (\text{A.6})$$

supongamos que se desea que el sistema tenga el siguiente comportamiento:

$$\ddot{x} = M_d^{-1}(-k_d\dot{x} - \frac{\partial V_d(x)}{\partial x}) \quad (\text{A.7})$$

donde M_d , k_d y V_d son funciones de diseño o interconexión, cuyas características se especificarán de acuerdo a la siguiente función de Lyapunov

$$E = \dot{x}^T M_d \dot{x} + V_d(x) \quad (\text{A.8})$$

de acuerdo a tal función de Lyapunov $V_d(x)$ debe ser una función definida positiva, derivando se obtiene:

$$\dot{E} = \dot{x}^T M_d \ddot{x} + \frac{\dot{x}^T \partial V_d(x)}{\partial x} \quad (\text{A.9})$$

sustituyendo con las ecuaciones del sistema objetivo:

$$\dot{E} = \dot{x}^T (-k_d \dot{x} - \frac{\partial V_d(x)}{\partial x}) + \frac{\dot{x}^T \partial V_d(x)}{\partial x} = -\dot{x}^T k_d \dot{x} \leq 0 \quad (\text{A.10})$$

la cual es al menos semidefinida negativa si k_d es simétrica definida positiva, por extensión M_d también es simétrica definida positiva, pues $-\dot{x}^T k_d \dot{x} = -\dot{x}^T M_d k_d M_d^{-1} \dot{x}$, finalmente el control a utilizar se calcula como sigue:

$$u = -\frac{G^T}{G^T G} \left[\left(M_d^{-1} \frac{\partial V_d(x)}{\partial x} - F(\theta) \right) + (M_d^{-1} k_d \dot{x}) \right] \quad (\text{A.11})$$

por lo cual la complejidad del método IDA-PBC consiste en resolver las ecuaciones diferenciales parciales que permiten encontrar M_d , k_d y V_d

Ahora bien, introduciendo efectos de fricción dinámica:

$$\ddot{x} = -F(\theta) - G(\theta)u - B\dot{x} \quad (\text{A.12})$$

y utilizando la función de Lyapunov originalmente propuesta, se llega a lo siguiente

$$\dot{E} = \dot{x}^T (-k_d \dot{x} - \frac{\partial V_d(x)}{\partial x} + B\dot{x}) + \frac{\dot{x}^T \partial V_d(x)}{\partial x} = -\dot{x}^T (k_d + B) \dot{x} \quad (\text{A.13})$$

Es claro que B no necesariamente cumple con las propiedades de simetría tal que puede garantizarse que $\dot{E} \leq 0$ y de ese modo tampoco puede garantizarse estabilidad directa.

Cabe mencionar que estos efectos pueden contrarrestarse mediante el uso de observadores como lo muestran [200, 5, 209, 210]

A.5. Estabilidad parcial del sistema en q_3 y q_4

sea el subsistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \\ v_\epsilon \end{bmatrix}$$

y la ley de control:

$$v_\epsilon = \frac{u}{\epsilon^2} = -\frac{v_s}{k_3} - \frac{k_1 q_3 + k_2 q_4}{k_3}$$

en lazo cerrado forman el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \\ -\frac{v_s}{k_3} - \frac{k_1 q_3 + k_2 q_4}{k_3} \end{bmatrix}$$

derivando la ultima ecuación y asumiendo que v_s puede acotarse a $|v_s| \leq \bar{v}_s$:

$$\ddot{q}_4 = -\frac{k_1 \dot{q}_3 + k_2 \dot{q}_4}{k_3} + \frac{|\dot{v}_s|}{k_3} = -\frac{k_1 q_4 + k_2 \dot{q}_4}{k_3} + \frac{|\dot{v}_s|}{k_3} \quad (\text{A.14})$$

sustituyendo los valores pertinentes y considerando que v_s actúa con efecto evanescente, se obtiene que $|q_3| \leq \frac{\bar{v}_s + \delta}{k_1}$; $|q_4| \leq \frac{\bar{v}_s + \delta}{k_2}$

Apéndice B

Aplicaciones del control a la teoría de sistemas computacionales

La mayor parte de las aplicaciones de la teoría de control a los sistemas computacionales, está enfocada en la regulación de la velocidad de transmisión de datos, la bisimulación, la automatización de la distribución de ancho de banda y la distribución del número límite de usuarios conectados a distintos servidores, mayor información al respecto puede ser encontrada en [87, 97, 135, 100, 55, 142, 174, 134].

Los controladores desarrollados en esta tesis pueden ser extensibles y aplicables a los fenómenos descritos en el párrafo anterior, siempre y cuando sean compatibles con la estructura matemática de los sistemas físicos analizados en capítulos previos, ya sea en forma total, parcial o puntual.

Apéndice C

Tipos de perturbaciones vistas a lo largo de la tesis

Tomando como referencia a [111], la presente tesis contempla las siguientes perturbaciones:

- Disipativas: que eliminan energía, puede provenir de elementos resistivos o por fricción.
- Lineales: si una perturbación cumple el principio de la superposición es lineal, si no, no lo es, también existe el concepto de bilinealidad el cual sucede cuando un sistema cambia entre dos sistemas lineales, lo cual es muy común en modos deslizantes y sistemas eléctricos.
- Evanescentes(Vanishing): que desaparecen como consecuencia de la estabilización de ciertos estados.
- Acotadas: que poseen límites superiores e/o inferiores.
- No Acopladas(Matched): que no están presentes en el canal de control.

Apéndice D

Abstracción concentrada

Muchos sistemas dinámicos y no dinámicos tienen un gran número de representaciones, un mismo sistema de hecho puede ser sujeto de un análisis muy difícil o de uno bastante simplificado, por ejemplo el motor de corriente directa. ¿En qué caso debemos utilizar las ecuaciones simples y en cual las complicadas?, la respuesta a ello depende de las condiciones de operación, es decir el modelo asociado a un sistema solo es útil mientras se respeten sus límites de trabajo, así pues, un motor de corriente directa puede obedecer las ecuaciones (3.1) en tanto la dinámica eléctrica sea mucho más rápida y estable que la mecánica y en tanto los sensores sean lo suficientemente rápidos para considerar al sistema como uno de tipo continuo.

Un ejemplo interesante de la abstracción concentrada aplicada a la teoría electromagnética, Figura(D.1), puede encontrarse en [3]:

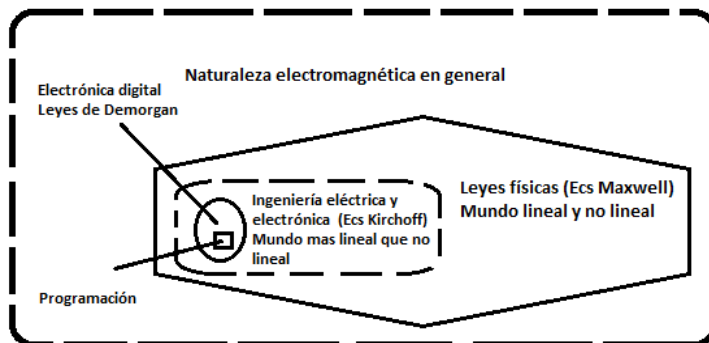


Figura D.1: Abstracción concentrada aplicada a electromagnetismo

Bibliografía

- [1] Gabriel Abba and Philippe Sardain. Modeling of frictions in the transmission elements of a robot axis for its identification. In *World Congress*, volume 16, pages 1271–1271, 2005.
- [2] Chaouki T Abdallah, D Dawson, Peter Dorato, and M Jamshidi. Survey of robust control for rigid robots. *Control Systems Magazine*, 1991.
- [3] Anant Agarwal and Jeffrey Lang. *Foundations of analog and digital electronic circuits*. Morgan Kaufmann, 2005.
- [4] Luis T Aguilar, Yury Orlov, and Leonardo Acho. Nonlinear h-inf control of nonsmooth time varying systems with application to friction mechanical manipulators. *Automatica*, 39(9):1531–1542, 2003.
- [5] Carlos Aguilar-Ibanez, Jorge Davila, and Julio A Mendoza-Mendoza. Controller of a dc servomechanism system with uncertainties compensation by using a super-twisting sliding mode observer. In *Asociacion Mexicana de Control Automatica (AMCA), 2013*. AMCA, 2013.
- [6] Carlos Aguilar-Ibañez, Ruben Garrido-Moctezuma, and Jorge Davila. Output feedback trajectory stabilization of the uncertainty dc servomechanism system. *ISA transactions*, 51(6):801–807, 2012.
- [7] Carlos Aguilar-Ibanez, JC Martinez-Garcia, and Alberto Soria-López. Bounded control based on saturation functions of nonlinear under-actuated mechanical systems: the cart-pendulum system case. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 1759–1764, Orlando, Florida, December 12-15 2011. IEEE.
- [8] Carlos Aguilar-Ibañez, Juan C Martínez-García, Alberto Soria-López, and José de Jesús Rubio. On the stabilization of the inverted-cart pendulum using the saturation function approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011, 2011.
- [9] Carlos Aguilar-Ibanez, Rafael Martinez-Guerra, Claudia Perez-Pinacho, Miguel Suarez-Castanon, Marco Moreno-Armendariz, and Julio Mendoza-Mendoza. Master-slave synchronization for a chaotic system by means of i and i observer. In *CCE.2015*. CCE, 2015.
- [10] Carlos Aguilar-Ibañez, Julio Mendoza-Mendoza, and Jorge Dávila. Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–9, 2014.

- [11] Carlos Aguilar-Ibanez, Julio Mendoza-Mendoza, and Juan Carlos Martinez. Port hamiltonian approach for inducing limit cycles. In *Congreso Latinoamericano Control Automatico (CLCA), 2014*. AMCA, 2014.
- [12] Carlos Aguilar-Ibañez, Julio A Mendoza-Mendoza, Juan C Martinez, Jose Jesus Rubio, and Miguel S Suarez-Castanon. A limit set stabilization by means of the port hamiltonian system approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014.
- [13] Carlos Aguilar-Ibanez, Julio A Mendoza-Mendoza, Juan Carlos Martinez, and Miguel S Suarez-Castanon. Stabilizing the damped inverted pendulum cart system by means of a cascade chain of integrators. In *Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE), 2013 International Conference on*, pages 146–151. IEEE, 2013.
- [14] Carlos Aguilar-Ibañez, Julio A Mendoza-Mendoza, Miguel S Suarez-Castanon, and Jorge Davila. A nonlinear robust pi controller for an uncertain system. *International Journal of Control*, (just-accepted):1–14, 2013.
- [15] Carlos Aguilar-Ibañez, Hebertt Sira-Ramírez, Miguel S Suárez-Castañón, Edgar Martínez-Navarro, and Marco A Moreno-Armendariz. The trajectory tracking problem for an unmanned four-rotor system: flatness-based approach. *International Journal of Control*, 85(1):69–77, 2012.
- [16] Carlos Aguilar-Ibanez, Humberto Sossa-Azuela, Julio Mendoza-Mendoza, and Miguel Suarez-Castanon. Pvtol control: a backstepping approach. In *ICMEAE.2015*. IEEE, 2015.
- [17] Carlos Aguilar-Ibanez, Humberto Sossa-Azuela, Miguel Suarez-Castanon, and Julio Mendoza-Mendoza. Control of the pvtol system by using a backstepping method and saturation functions. In *CIRC.2015*. ITLP, 2015.
- [18] Carlos Aguilar-Ibañez, J Humberto Sossa-Azuela, and Miguel S Suarez-Castanon. A backstepping-based procedure with saturation functions to control the pvtol system. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–11, 2015.
- [19] Carlos Aguilar-Ibanez, Miguel Suarez-Castanon, Nareli Cruz-Cortes, and Julio Mendoza-Mendoza. Output feedback stabilization for a pvtol aircraft based on a sliding mode combined with an energy control strategy. In *CCE.2015*. CCE, 2015.
- [20] Carolina Albea, Carlos Canudas-de Wit, and Francisco Gordillo. Adaptive control of the boost dc-ac converter. *Submitted to the*, 2007.
- [21] MDS Aliyu. *Nonlinear H-Infinity Control, Hamiltonian Systems and Hamilton-Jacobi Equations*. CRC Press, 2011.
- [22] B Anderson, EI Jury, and M Mansour. On robust hurwitz polynomials. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 32(10):909–913, 1987.
- [23] Boris Rostislavovich Andrievsky, P Yu Guzenko, and Aleksandr Lvovich Fradkov. Control of nonlinear oscillation in mechanic systems by the steepest gradient method. *Avtomatika i Telemekhanika*, (4):4–17, 1996.

- [24] Javier Aracil, Francisco Gordillo, and Enrique Ponce. Stabilization of oscillations through backstepping in high-dimensional systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(5):705–710, 2005.
- [25] Mituhiko Araki. Pid control. *Control systems, robotics and automation*, 2, 2002.
- [26] Suguru Arimoto. *Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems*. Oxford University Press, Inc., 1996.
- [27] Vladimir Igorevich Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer, 1989.
- [28] Vladimir Igorevich Arnold. *Ordinary differential equations*, volume 60. Springer, 1992.
- [29] Alessandro Astolfi, Dimitrios Karagiannis, and Romeo Ortega. *Nonlinear and adaptive control with applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [30] Alessandro Astolfi and Romeo Ortega. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(4):590–606, 2003.
- [31] Karl J Åström and Björn Wittenmark. *Adaptive control*. Courier Dover Publications, 2013.
- [32] G Bartolini, A Ferrara, and E Usai. Applications of a sub-optimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems. *International journal of robust and nonlinear control*, 7(4):299–319, 1997.
- [33] C Batlle, A Doria-Cerezo, and E Fossas. Robust hamiltonian passive control for higher relative degree outputs. *E-Prints UPC, Universitat Politècnica de Catalunya, Technical Report IOC-DT-P-2006-25*, 2006.
- [34] Stuart Bennett. Development of the pid controller. *Control Systems, IEEE*, 13(6):58–62, 1993.
- [35] Stuart Bennett. *A history of control engineering, 1930-1955*. Number 47. IET, 1993.
- [36] Stuart Bennett. A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, 16(3):17–25, 1996.
- [37] Pierre Bernhard. Survey of linear quadratic robust control. *Macroeconomic Dynamics*, 6(01):19–39, 2002.
- [38] Sanjay P Bhat and Dennis S Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000.
- [39] Domingo Biel, Enric Fossas, Francesc Guinjoan, Eduard Alarcon, and Alberto Poveda. Application of sliding-mode control to the design of a buck-based sinusoidal generator. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 48(3):563–571, 2001.
- [40] Robert H Bishop. *The Mechatronics Handbook, -2 Volume Set*. CRC Press, 2006.

- [41] Anthony M Bloch, Dong Eui Chang, Naomi Ehrich Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. i. potential shaping. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(10):1556–1571, 2001.
- [42] Anthony M Bloch, Naomi E Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. the first matching theorem. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(12):2253–2270, 2000.
- [43] Daniel J Block, Karl J Åström, and Mark W Spong. The reaction wheel pendulum. *Synthesis Lectures on Control and mechatronics*, 1(1):1–105, 2007.
- [44] William Bolton. *Mechatronics: electronic control systems in mechanical and electrical engineering*. Pearson Education, 2003.
- [45] Robert L Boylestad, Louis Nashelsky, and Franz Monssen. *Electronic devices and circuit theory*. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [46] Bernard Brogliato, Rogelio Lozano, Bernhard Maschke, and Olav Egeland. *Dissipative systems analysis and control: theory and applications*. Springer, 2006.
- [47] Francesco Bullo. *Geometric control of mechanical systems*, volume 49. Springer Science & Business Media, 2005.
- [48] Robert T Bupp, Dennis S Bernstein, Vijaya S Chellaboina, and Wassim M Haddad. Resetting virtual absorbers for vibration control. *Journal of Vibration and Control*, 6(1):61–83, 2000.
- [49] C. F. Aguilar-Ibañez, H. Sira-Ramirez, and M. S. Suarez-Castanon. A flatness-based controller for the stabilization of the inverted pendulum. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011(doi:10.1155/2011/659685):11, 2011.
- [50] C. F. Aguilar-Ibañez and O. O. Gutiérrez-Frias. Controlling the inverted pendulum by means of a nested saturation function. *Nonlinear Dynamics*, 53(4):273–280, 2008.
- [51] C. F. Aguilar-Ibañez and O. O. Gutiérrez-Frias. A simple model matching for the stabilization of an inverted pendulum cart system. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(6):688–699, 2008.
- [52] Luis Rodolfo García Carrillo, Alejandro Enrique Dzul López, Rogelio Lozano, and Claude Pégard. *Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [53] Dong Eui Chang. Generalization of the ida-pbc method for stabilization of mechanical systems. In *Control and Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on*, pages 226–230. IEEE, 2010.
- [54] Chi-Tsong Chen. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1995.
- [55] Dah-Ming Chiu and Raj Jain. Analysis of the increase and decrease algorithms for congestion avoidance in computer networks. *Computer Networks and ISDN systems*, 17(1):1–14, 1989.

- [56] Amal Choukchou-Braham. *Contribution a la stabilisation des systemes mecaniques sous actionnes*. PhD thesis, Universite Aboubekr Belkaid Tlemcen, 2011.
- [57] Amal Choukchou-Braham, Brahim Cherki, Mohamed Djemaï, and Krishna Busawon. Underactuated mechanical systems from the lagrangian formalism. In *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*, pages 15–33. Springer, 2014.
- [58] Chung Choo Chung and John Hauser. Nonlinear control of a swinging pendulum. *Automatica*, 31(6):851–862, 1995.
- [59] John J Craig. *Introduction to robotics*, volume 7. Addison-Wesley Reading, MA, 1989.
- [60] J Davila, L Fridman, and A Poznyak. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262, 2006.
- [61] Jorge Davila-Montoya. Observacion e identificacion de sistemas via modos deslizantes de segundo orden. Master’s thesis, UNAM, 2005.
- [62] Jorge Davila-Montoya. *Observación de sistemas vía modos deslizantes de alto orden*. PhD thesis, UNAM, 2008.
- [63] Jose de Jesus Rubio and Luis Arturo Soriano. An asymptotic stable proportional derivative control with sliding mode gravity compensation and with a high gain observer for robotic arms. *Int. J. Innov. Comp. Inform. Control*, 6(10):4513–4526, 2010.
- [64] C Canudas De Wit, Hans Olsson, Karl Johan Astrom, and Pablo Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(3):419–425, 1995.
- [65] Carlos Canudas De Wit, Georges Bastin, and Bruno Siciliano. *Theory of robot control*. Springer-Verlag New York, Inc., 1996.
- [66] Arnau Doria-Cerezo. *Modeling, simulation and control of a doubly-fed induction machine controlled by a back to back converter*. PhD thesis, Universitat politecnica de Catalunya, 2006.
- [67] Vincent Duintam, Alessandro Macchelli, Stefano Stramigioli, and Herman Bruyninckx. *Modeling and control of complex physical systems*. Springer, 2009.
- [68] Christopher Edwards and Sarah Spurgeon. *Sliding mode control: theory and applications*. CRC Press, 1998.
- [69] Antonio Estrada, Antonio Loria, and Antoine Chaillet. Cascades stability analysis applied to a control design for unmatched perturbation rejection based on hosm. In *Variable Structure Systems (VSS), 2010 11th International Workshop on*, pages 45–49. IEEE, 2010.
- [70] Antonio Estrada, Antonio Loria, Raul Santiesteban, and Leonid Fridman. Lyapunov stability analysis of a twisting based control algorithm for systems with unmatched perturbations. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 4586–4591. IEEE, 2011.

- [71] Jose Estrada-Torres. *Control robusto de sistemas con incertidumbres no acopladas mediante modos deslizantes de orden superior*. PhD thesis, Unam, 2008.
- [72] F. Gomez-Estern and A. J. Van der Schaft. Physical damping in ida-pbc controlled underactuated mechanical systems. *European Journal of Control*, 10(Special Issue on Hamiltonian and Lagrangian Methods for Nonlinear Control):451–468, 2004.
- [73] Isabelle Fantoni and Rogelio Lozano. Global stabilization of the cart-pendulum system using saturation functions. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 5, pages 4393–4398. IEEE, 2003.
- [74] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, and Mark W Spong. Passivity based control of the pendubot. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 1, pages 268–272. IEEE, 1999.
- [75] Aleksei Fedorovich Filippov and Felix Medland Arscott. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, volume 18. Springer, 1988.
- [76] Michel Fliess and Cédric Join. Commande sans modèle et commande à modèle restreint. *e-STA*, 5(4):1–23, 2008.
- [77] Michel Fliess and Hebertt Sira-Ramirez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM controle optimisation et calcul des variations*, 9:151, 2004.
- [78] AL Fradkov. Nonlinear adaptive control: regulation, tracking, oscillations. In *Proc. 1st IFAC Workshop New trends in design of control systems. Smolenice*, pages 426–431, 1994.
- [79] AL Fradkov, P Yu Guzenko, DJ Hill, and A Yu Pogromsky. Speed gradient control and passivity of nonlinear oscillators. In *Proceedings of IFAC symposium on control of nonlinear systems*, pages 655–659, 1995.
- [80] AL Fradkov, IA Makarov, AS Shiriaev, and OP Tomchina. Control of oscillations in hamiltonian systems. *system*, 16:8, 1997.
- [81] Alexander L Fradkov. Swinging control of nonlinear oscillations. *International Journal of Control*, 64(6):1189–1202, 1996.
- [82] Leonid Fridman, Jaime Moreno, and Rafael Iriarte. *Sliding modes after the first decade of the 21st century: State of the art*, volume 412. Springer, 2011.
- [83] Leonid Fridman, Alexander Poznyak, and Francisco Javier Bejarano. *Robust Output LQ Optimal Control Via Integral Sliding Modes*. Springer, 2014.
- [84] Bingtuan Gao, Xiaohua Zhang, Hongjun Chen, and Jianguo Zhao. Energy-based control design of an underactuated 2-dimensional tora system. In *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1296–1301. IEEE, 2009.
- [85] Pedro Castillo Garcia, Rogelio Lozano, and Alejandro Enrique Dzul. *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer Science & Business Media, 2006.

- [86] Eloisa Garcia-Canseco, Alessandro Astolfi, and Romeo Ortega. Interconnection and damping assignment passivity-based control: Towards a constructive procedure-part ii. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 4, pages 3418–3423, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14–17 2004. IEEE.
- [87] Antoine Girard and George J Pappas. Approximate bisimulation: A bridge between computer science and control theory. *European Journal of Control*, 17(5):568–578, 2011.
- [88] Fabio Gomez-Estern. *Control de sistemas no lineales basado en la estructura hamiltoniana*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2002.
- [89] Fabio Gómez-Estern and AJ Van der Schaft. Physical damping in ida-pbc controlled underactuated mechanical systems. *European Journal of Control*, 10(5):451–468, 2004.
- [90] Octavio Gutierrez-Frias. *Diseño de controladores para sistemas subactuados tipo péndulo invertido*. PhD thesis, CIC IPN, 2009.
- [91] H. Sira-Ramirez and S. K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York, 2004.
- [92] Martin T Hagan, Howard B Demuth, Mark H Beale, et al. *Neural network design*. Pws Pub. Boston, 1996.
- [93] Jun Han and Claudio Moraga. The influence of the sigmoid function parameters on the speed of backpropagation learning. In *From Natural to Artificial Neural Computation*, pages 195–201. Springer, 1995.
- [94] Markus Hehn and Raffaello D’Andrea. A flying inverted pendulum. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 763–770. IEEE, 2011.
- [95] Robert Hermann and Arthur J Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on automatic control*, 22(5):728–740, 1977.
- [96] Victor M Hernández and Hebertt Sira-Ramirez. Generalized pi control for swinging up and balancing the inertia wheel pendulum. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 4, pages 2809–2814. IEEE, 2003.
- [97] CV Hollot, Vishal Misra, Don Towsley, and Wei-Bo Gong. A control theoretic analysis of red. In *INFOCOM 2001. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Proceedings. IEEE*, volume 3, pages 1510–1519. IEEE, 2001.
- [98] Yiguang Hong. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems & control letters*, 46(4):231–236, 2002.
- [99] An-Chyau Huang and Ming-Chih Chien. *Adaptive control of robot manipulators: a unified regressor-free approach*. World Scientific, 2010.

- [100] Ralf Huuck, Yassine Lakhnech, Luis Urbina, Sebastian Engel, Stefan Kowalewski, and Jörg Preußig. Combining a computer science and control theory approach to the verification of hybrid systems. In *Parallel and Distributed Real-Time Systems, 1997. Proceedings of the Joint Workshop on*, pages 222–227. IEEE, 1997.
- [101] I. Fantoni and R. Lozano. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Communications and Control Engineering. Springer Verlag, London, 2002.
- [102] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 3rd edition, 1995.
- [103] J. A. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, and A. D. Mahindrakar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12):1936–1955, 2005.
- [104] J. Aracil and F. Gordillo. El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática e Industrial*, 2:8–19, 2005.
- [105] JB Jonker, RR Waiboer, and RGKM Aarts. Modelling of joint friction in robotic manipulators with gear transmissions. In *Multibody Dynamics*, pages 221–243. Springer, 2007.
- [106] Jer-Nan Juang and Minh Phan. Robust controller designs for second-order dynamic systems—a virtual passive approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15(5):1192–1198, 1992.
- [107] S Kajita and H Hirukawa. *Introduction a la commande des robots humanoïdes*. Springer, 2009.
- [108] S Kajita and H Hirukawa. *Introduction to Humanoid Robotics*, volume 101. Springer, 2014.
- [109] Shuuji Kajita, Fumio Kanehiro, Kenji Kaneko, Kazuhito Yokoi, and Hirohisa Hirukawa. The 3d linear inverted pendulum mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation. In *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 239–246. IEEE, 2001.
- [110] Rafael Kelly, Victor Santibáñez Davila, and Julio Antonio Loría Perez. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer, 2006.
- [111] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, second edition, 1996.
- [112] Hassan K Khalil. High-gain observers in nonlinear feedback control. In *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on*, pages xlvii–lvii. IEEE, 2008.
- [113] Petar V Kokotovic. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3):7–17, 1992.

- [114] Paul Kotyczka and Ioannis Sarras. Equivalence of immersion and invariance and ida-pbc for the acrobot. In *Proceedings of 4th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control, Bertinoro, Italy*, pages 36–41, 2012.
- [115] Paul Kotyczka and Ioannis Sarras. On the equivalence of two nonlinear control approaches: Immersion and invariance and ida-pbc. *European Journal of Control*, 19(6):445–453, 2013.
- [116] Benjamin C Kuo and M Farid Golnaraghi. *Automatic control systems*, volume 4. John Wiley & Sons New York, 2003.
- [117] Ioan Doré Landau, Rogelio Lozano, and Mohammed M’Saad. *Adaptive control*, volume 51. Springer Berlin, 1998.
- [118] Joseph Laszlo, Michiel van de Panne, and Eugene Fiume. Limit cycle control and its application to the animation of balancing and walking. In *Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 155–162. ACM, 1996.
- [119] Bhagwandas Pannalal Lathi. *Linear systems and signals*. Oxford University Press, 2009.
- [120] Joonho Lee. *Output feedback control in the presence of uncertainties using extended high gain observers with dynamic inversion*. PhD thesis, Michigan State University, 2014.
- [121] Joonho Lee, Ranjan Mukherjee, and Hassan K Khalil. Application of dynamic inversion with extended high-gain observers to inverted pendulum on a cart. In *American Control Conference (ACC), 2013*, pages 4234–4238. IEEE, 2013.
- [122] Joonho Lee, Ranjan Mukherjee, and Hassan K Khalil. Output feedback stabilization of inverted pendulum on a cart in the presence of uncertainties. *Automatica*, 54:146–157, 2015.
- [123] Adriaan Arie Johannes Lefeber. *Tracking control of nonlinear mechanical systems*. Universiteit Twente, 2000.
- [124] Arie Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [125] Arie Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of control*, 76(9-10):924–941, 2003.
- [126] Jean Levine. *Analysis and control of nonlinear systems: A flatness-based approach*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [127] William S Levine. *The control handbook*. CRC press, 1996.
- [128] FW Lewis, Suresh Jagannathan, and A Yesildirak. *Neural network control of robot manipulators and non-linear systems*. CRC Press, 1998.

- [129] John H Lilly. *Fuzzy control and identification*. John Wiley & Sons, 2011.
- [130] Jinkun Liu. *Radial Basis Function (RBF) neural network control for mechanical systems: design, analysis and Matlab simulation*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [131] Jinkun Liu and Xinhua Wang. *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems*. Springer, 2012.
- [132] Yang Liu and Hongnian Yu. A survey of underactuated mechanical systems. *Control Theory & Applications, IET*, 7(7), 2013.
- [133] Antonio Loría and Elena Panteley. 6 stability, told by its developers. In *Advanced Topics in Control Systems Theory*, pages 199–258. Springer, 2006.
- [134] Chenyang Lu, TF Abdelzaber, John Stankovic, Sang H Son, et al. A feedback control approach for guaranteeing relative delays in web servers. In *Real-Time Technology and Applications Symposium, 2001. Proceedings. Seventh IEEE*, pages 51–62. IEEE, 2001.
- [135] Jan Lunze. *Control Theory of Digitally Networked Dynamic Systems*. Springer, 2014.
- [136] M. Krstic, P. V. Kokotovic, and I. Kanellakopoulos. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition, 1995.
- [137] M. W. Spong, L. Praly, Coordinated Science, and Centre Automatique. *Control of Underactuated Mechanical Systems Using Switching and Saturation*. Springer-Verlag, 1996.
- [138] Alessandro Macchelli. *Port Hamiltonian Systems*. PhD thesis, University of Bologna, 2002.
- [139] Tarek Madani and Abdelaziz Benallegue. Backstepping control for a quadrotor helicopter. In *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3255–3260. IEEE, 2006.
- [140] Horacio J Marquez. *Nonlinear control systems: analysis and design*. John Wiley, 2003.
- [141] Jerrold E Marsden and Tudor S Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer, 1999.
- [142] Saverio Mascolo. Classical control theory for congestion avoidance in high-speed internet. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2709–2714. IEEE, 1999.
- [143] Daniel Mellinger, Nathan Michael, and Vijay Kumar. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *The International Journal of Robotics Research*, page 0278364911434236, 2012.
- [144] Patricia Mellodge and Pushkin Kachroo. *Model abstraction in dynamical systems: Application to mobile robot control*, volume 379. Springer, 2008.

- [145] Julio Mendoza-Mendoza, Carlos Aguilar-Ibanez, and Jorge Davila-Montoya. Pd + twisting stabilization of the cart pole system in finite time. In *Congreso Latinoamericano de Control Automatico (CLCA), 2014*. AMCA, 2014.
- [146] Gabriel Montoro-Lopez. *Contribucion al estudio y desarrollo de tecnicas de control aplicadas a la linealizacion de sistemas*. PhD thesis, Universitat politecnica de catalunya, 1996.
- [147] Jaime A Moreno. A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2009.
- [148] Ezequiel Moyano. Arduino pid - guia de uso de la libreria. <http://brettbeauregard.com/blog/wp-content/uploads/2012/07/Guia-de-uso-PID-para-Arduino.pdf>, 2011.
- [149] TÑguyen-Thien and T Tran-Cong. Approximation of functions and their derivatives: a neural network implementation with applications. *Applied Mathematical Modelling*, 23(9):687–704, 1999.
- [150] Norman S Nise. *CONTROL SYSTEMS ENGINEERING, (With CD)*. John Wiley & Sons, 2007.
- [151] Brigitte D’Andrea Novel, Michel Fliess, Cédric Join, Hugues Mounier, and Bruno Steux. A mathematical explanation via "intelligent" pid controllers of the strange ubiquity of pids. *arXiv preprint arXiv:1005.0440*, 2010.
- [152] Katsuhiko Ogata. *System dynamics*, volume 13. Pearson/Prentice Hall, 2004.
- [153] Katsuhiko Ogata and Yanjuan Yang. *Modern control engineering*. 1970.
- [154] R. Olfati-Saber. Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole and rotating pendulum. In *Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control*, volume 2, pages 1174 – 1181, Phoenix, Arizona., December 7-10 1999.
- [155] R. Olfati-Saber. Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(2):305–308, February 2002.
- [156] R Olfati-Saber and A Megretski. Controller design for the beam-and-ball system. In *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 4, pages 4555–4560. IEEE, 1998.
- [157] Reza Olfati-Saber. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [158] Reza Olfati-Saber. Global configuration stabilization for the vtol aircraft with strong input coupling. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(11):1949–1952, 2002.

- [159] Henrik Olsson and volume=4 number=3 pages=176–195 year=1998 publisher=Elsevier Astrom, Karl J and Canudas de Wit, Carlos and Gafvert, Magnus and Lischinsky, Pablo, journal=European journal of control. Friction models and friction compensation.
- [160] J Patricio Ordaz-Oliver, Omar J Santos-Sánchez, and Virgilio López-Morales. Toward a generalized sub-optimal control method of underactuated systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 33(3):338–351, 2012.
- [161] Y Orlov. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4):1253–1271, 2004.
- [162] Romeo Ortega. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer, 1998.
- [163] Romeo Ortega, Alessandro Astolfi, and Nikita E Barabanov. Nonlinear pi control of uncertain systems: an alternative to parameter adaptation. *Systems & control letters*, 47(3):259–278, 2002.
- [164] Romeo Ortega and Eloisa Garcia-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: towards a constructive procedure-part i. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 4, pages 3412–3417, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14-17 2004. IEEE.
- [165] Romeo Ortega and Mark W Spong. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888, 1989.
- [166] Romeo Ortega, Mark W Spong, Fabio Gomez-Estern, and Guido Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(8):1218–1233, 2002.
- [167] Romeo Ortega and Yu Tang. Robustness of adaptive controllers a survey. *Automatica*, 25(5):651–677, 1989.
- [168] Romeo Ortega, Arjan van der Schaft, Fernando Castaños, and Alessandro Astolfi. Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(11):2527–2542, 2008.
- [169] Romeo Ortega, Arjan J Van der Schaft, Iven Mareels, and Bernhard Maschke. Putting energy back in control. *Control Systems, IEEE*, 21(2):18–33, 2001.
- [170] Daniel J Pagano, Javier Aracil, and Francisco Gordillo. Autonomous oscillation generation in the boost converter. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.
- [171] Elena Panteley and Antonio Loria. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade. *Systems & Control Letters*, 33(2):131–138, 1998.
- [172] Elena Panteley and Antonio Loria. Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems. *Automatica*, 37(3):453–460, 2001.

- [173] Alba Papa-Grimaldi. Why mathematical solutions of zeno’s paradoxes miss the point: Zeno’s one and many relation and parmenides’ prohibition. *The Review of Metaphysics*, pages 299–314, 1996.
- [174] Sujay Parekh, Neha Gandhi, Joe Hellerstein, Dawn Tilbury, T Jayram, and Joe Bigus. Using control theory to achieve service level objectives in performance management. *Real-Time Systems*, 23(1-2):127–141, 2002.
- [175] Vicente Parra-Vega, Suguru Arimoto, Yun-Hui Liu, Gerd Hirzinger, and Prasad Akella. Dynamic sliding pid control for tracking of robot manipulators: theory and experiments. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 19(6):967–976, 2003.
- [176] Friedrich Pfeiffer. *Mechanical system dynamics*, volume 40. Springer Science & Business Media, 2008.
- [177] Andrei Polyakov and Alex Poznyak. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: twisting controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45(2):444–448, 2009.
- [178] Andrei Polyakov and Alex Poznyak. Reaching time estimation for super-twisting second order sliding mode controller via lyapunov function designing. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(8):1951–1955, 2009.
- [179] KARL Popp, Friedrich Pfeiffer, and A Guran. Dynamics with friction. 1996.
- [180] A Poznyak. *Modelado matematico de los sistemas mecanicos, electricos y electromecanicos*, volume 1. cinvestav, 2005.
- [181] A Poznyak. Advanced mathematical tools for automatic control engineers: Deterministic systems, vol. 1. *Elsevier Science*, 2008.
- [182] Alexander S Poznyak, EdgarÑ Sanchez, and Wen Yu. *Differential neural networks for robust nonlinear control: identification, state estimation and trajectory tracking*. World Scientific, 2001.
- [183] John G Proakis and Dimitris G Manolakis. Digital signal processing, 1996.
- [184] Dominio Publico. Wikipedia. <https://www.wikipedia.org/>, 2001.
- [185] Dominio Publico. Wikipedia. <http://www.mathworks.com/>, 2001.
- [186] R. Lozano and D. Dimogianopoulos. Stabilization of a chain of integrators with nonlinear perturbations: Application to the inverted pendulum. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 5191–5196, Maui Hawaii, December 9-12 2003.
- [187] R. Sepulchre, M. Janković, and P. V. Kokotović. *Constructive nonlinear control*. Communications and control engineering. Springer, 1997.
- [188] MR Rafimanzelat and MJ Yazdanpanah. A novel low chattering sliding mode controller. In *Control Conference, 2004. 5th Asian*, volume 3, pages 1958–1963. IEEE, 2004.

- [189] Suresh Ramasamy, Guofan Wu, and Koushil Sreenath. Dynamically feasible motion planning through partial differential flatness. In *Robotics: Science and Systems*, 2014.
- [190] Singiresu S Rao and Fook Fah Yap. *Mechanical vibrations*, volume 4. Addison-Wesley New York, 1995.
- [191] Konrad Reif. Using tangent linearised control systems for the feedback control of nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 338(4):391–404, 2001.
- [192] Fernando Reyes. *Robotica:Control de Robots Manipuladores*. Alfaomega, 2011.
- [193] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban, and J.P. Richard. Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems i: Local stabilization with application to an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5):529–543, 2007.
- [194] Samer Riachy. *Contribution a l'estimation et a la commande de systemes mecaniques sous-actionnes*. PhD thesis, Ecole central de lille, 2008.
- [195] Gerasimos G Rigatos. *Nonlinear control and filtering using differential flatness approaches: applications to electromechanical systems*, volume 25. Springer, 2015.
- [196] Wilson J Rugh. *Linear system theory*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [197] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban, and J-P. Richard. Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems i: Local stabilization with application to an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5):529–543, 2008.
- [198] Guillaume Sanahuja, P Castillo, Octavio Garcia, R Lozano, et al. Linear and non linear control strategies to stabilize a vtol aircraft: comparative analysis. *New trends in Electronica Technology*, 2007.
- [199] Jesus Sandoval, Romeo Ortega, and Rafael Kelly. Interconnection and damping assignment passivity-based control of the pendubot. In *IFAC World Conference*, volume 2008, 2008.
- [200] Jesus Sandoval-Galarza. *Sobre Control por Interconexión e Inyección de Amortiguamiento (IDA-PBC) Aplicado a Mecanismos*. PhD thesis, UABC, 2010.
- [201] Victor Santibanez, Rafael Kelly, Arturo Zavala-Rio, and Pavel Parada. A new saturated nonlinear pid global regulator for robot manipulators. In *Proc. 17th IFAC Word Congress*, pages 11690–11695, 2008.
- [202] Raul Santiesteban, Thierry Floquet, Yury Orlov, Samer Riachy, and Jean-Pierre Richard. Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems ii: Orbital stabilization of an inverted pendulum with application to swing up/balancing control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5):544–556, 2008.

- [203] Raúl Santiesteban, Leonid Fridman, and Jaime A Moreno. Finite-time convergence analysis for twisting controller via a strict lyapunov function. In *Variable Structure Systems (VSS), 2010 11th International Workshop on*, pages 1–6. IEEE, 2010.
- [204] Arjan van der Schaft and AJ Schaft. *L2-Gain and Passivity in Nonlinear Control*. Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- [205] Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. *Modelling and control of robot manipulators*. Springer, 2000.
- [206] Lorenzo Sciavicco and Luigi Villani. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer, 2009.
- [207] R Sepulchre, M Jankovic, and PV Kokotovic. *Constructive nonlinear control*, 1997.
- [208] Rodolphe Sepulchre. Slow peaking and low-gain designs for global stabilization of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(3):453–461, 2000.
- [209] Jin-Hua She, Mingxing Fang, Yasuhiro Ohyama, Hiroshi Hashimoto, and Min Wu. Improving disturbance rejection performance based on an equivalent input disturbance approach. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 55(1):380–389, 2008.
- [210] Jinhua She, Ancai Zhang, Xuzhi Lai, and Min Wu. Global stabilization of 2dof underactuated mechanical systems an equivalent-input-disturbance approach. *Nonlinear Dynamics*, 69(1-2):495–509, 2012.
- [211] Joseph Edward Shigley and John Joseph Uicker. *Theory of machines and mechanisms*. McGraw-Hill New York, 1995.
- [212] A Shiriaev, A Pogromsky, H Ludvigsen, and Olav Egeland. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10(4):283–300, 2000.
- [213] Alexander Shkolnik and Russ Tedrake. High-dimensional underactuated motion planning via task space control. In *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3762–3768. IEEE, 2008.
- [214] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, and Arie Levant. *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014.
- [215] Bruno Siciliano and Oussama Khatib. *Springer handbook of robotics*. Springer, 2008.
- [216] Lilia Sidhom. *Sur les differentiateurs en temps reel : algorithmes et applications*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2011.
- [217] Roland Siegwart, Illah Reza Nourbakhsh, and Davide Scaramuzza. *Introduction to autonomous mobile robots*. MIT press, 2011.
- [218] H Sira-Ramirez and M Fliess. On the output feedback control of a synchronous generator. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 4, pages 4459–4464. IEEE, 2004.

- [219] Hebertt Sira-Ramirez. *Control de sistemas no lineales*, volume 1. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [220] Hebertt Sira-Ramírez and Ramón Silva-Ortigoza. *Control design techniques in power electronics devices*. Springer, 2006.
- [221] Hebertt Sira-Ramirez and Mark W Spong. Variable structure control of flexible joint manipulators. *Int. Robot. Autom*, 3(2):57–64, 1988.
- [222] Jean-Jacques E Slotine and Weiping Li. On the adaptive control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(3):49–59, 1987.
- [223] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [224] Terenzio Soldovieri. Introduccion a la mecanica de lagrange y hamilton. <http://www.cmc.org.ve/tsweb/documentos/ApuntesMecII.pdf>, 2013.
- [225] Eduardo D Sontag and Hector J Sussmann. Nonlinear output feedback design for linear systems with saturating controls. In *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pages 3414–3416. IEEE, 1990.
- [226] M. W. Spong. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. In *IFAC World Congress*, San Francisco CA., June 30-July 5 1996.
- [227] Mark W Spong. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. In *Intelligent Robots and Systems' 94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS'94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on*, volume 1, pages 314–321. IEEE, 1994.
- [228] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons New York, 2006.
- [229] Konstantin Starkov. Control de movimiento en sistemas mecanicos subactuados. Master's thesis, CITEDI, 2008.
- [230] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos (with applications to physics, biology, chemistry a.* Perseus Publishing, 2006.
- [231] Héctor Sussmann, Eduardo Sontag, and Yudi Yang. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. In *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, pages 1802–1807. IEEE, 1993.
- [232] Hector J Sussmann and Yudi Yang. On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls. In *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pages 70–72. IEEE, 1991.
- [233] HJ Sussmann and PV Kokotovic. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(4):424–440, 1991.

- [234] Morikazu Takegaki and Suguru Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103(2):119–125, 1981.
- [235] Russ Tedrake. Underactuated robotics: Learning, planning, and control for efficient and agile machines course notes for mit 6.832. *Working draft edition*, 2009.
- [236] A. R. Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters*, 18(3):165 – 171, March 1992.
- [237] A. R. Teel. Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems. In *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 379–384, Bordeaux, France, June 24–26 1992. Springer.
- [238] A. R. Teel. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1256–1270, 1996.
- [239] Ronald J Tocci. *Digital Systems: principles and applications*. Pearson Education India, 1980.
- [240] Vadim I Utkin. *Sliding modes in control and optimization*, volume 116. Springer, 1992.
- [241] I UTKIN VADIM. Survey paper variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2), 1977.
- [242] Kimon P Valavanis and George J Vachtsevanos. *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. Springer, 2015.
- [243] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*, volume 42. Siam, 2002.
- [244] Jia-Jun Wang. Stabilization and tracking control of x-z inverted pendulum with sliding-mode control. *ISA transactions*, 51(6):763–770, 2012.
- [245] S Weibel, TJ Kaper, and J Baillieul. Global dynamics of a rapidly forced cart and pendulum. *Nonlinear Dynamics*, 13(2):131–170, 1997.
- [246] CA Woolsey, AM Bloch, NE Leonard, and JE Marsden. Physical dissipation and the method of controlled lagrangians. 2001.
- [247] Craig Woolsey, Chevva Konda Reddy, Anthony M Bloch, Dong Eui Chang, Naomi Ehrich Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangian systems with gyroscopic forcing and dissipation. *European Journal of Control*, 10(5):478–496, 2004.
- [248] Lingfei Xiao and Yue Zhu. Passivity-based integral sliding mode active suspension control. In *World Congress*, volume 19, pages 5205–5210, 2014.
- [249] Xin Xin and Yannian Liu. Control design and analysis for underactuated robotic systems. 2014.
- [250] Yudi Yang, J Sussmann Hector, and Eduardo D Sontag. Stabilization of linear systems with bounded controls. In *IEEE Trans. Autom. Control*. Citeseer, 1992.

- [251] Wen Yu and Xiaou Li. Pd control of robot with velocity estimation and uncertainties compensation. *International Journal of Robotics and Automation*, 21(1):1–9, 2006.
- [252] Arturo Zavala-Rio and Victor Santibanez. Simple extensions of the pd-with-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 14(5):958–965, 2006.
- [253] Jing Zhou and Changyun Wen. *Adaptive backstepping control of uncertain systems: Nonsmooth nonlinearities, interactions or time-variations*. Springer, 2008.
- [254] Kemin Zhou and John Comstock Doyle. *Essentials of robust control*, volume 104. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.



A nonlinear robust PI controller for an uncertain system

Carlos Aguilar-Ibañez, Julio A. Mendoza-Mendoza, Miguel S. Suarez-Castanon & Jorge Davila

To cite this article: Carlos Aguilar-Ibañez, Julio A. Mendoza-Mendoza, Miguel S. Suarez-Castanon & Jorge Davila (2014) A nonlinear robust PI controller for an uncertain system, International Journal of Control, 87:5, 1094-1102, DOI: [10.1080/00207179.2013.868606](https://doi.org/10.1080/00207179.2013.868606)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2013.868606>



© 2014 The Author(s). Published by Taylor & Francis.



Accepted author version posted online: 04 Dec 2013.
Published online: 05 Feb 2014.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 622



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)



Citing articles: 2 View citing articles [↗](#)

A nonlinear robust PI controller for an uncertain system

Carlos Aguilar-Ibañez^{a,*}, Julio A. Mendoza-Mendoza^a, Miguel S. Suarez-Castanon^b and Jorge Davila^c

^aCIC – IPN, Av. Juan de Dios Bátiz s/n, U.P.A.L.M, Col. San Pedro Zacatenco, A.P. 75476, D.F. 07738, México; ^bESCOM – IPN, Av. Miguel Othón de Mendizábal s/n, Col. La Escalera, D.F. 07738, México; ^cESIME – IPN, Av. Ticoman 600, Col. San Jose Ticoman, D.F. 07340, México

(Received 22 August 2012; accepted 19 November 2013)

This paper presents a smooth control strategy for the regulation problem of an uncertain system, which assures uniform ultimate boundedness of the closed-loop system inside of the zero-state neighbourhood. This neighbourhood can be made arbitrarily small. To this end, a class of nonlinear proportional integral controllers or **PI** controllers was designed. The behaviour of this controller emulates very close a sliding mode controller. To accomplish this behaviour saturation functions were combined with traditional **PI** controller. The controller did not need a high-gain controller or a sliding mode controller to accomplish robustness against unmodelled persistent perturbations. The obtained closed-solution has a finite time of convergence in a small vicinity. The corresponding stability convergence analysis was done applying the traditional Lyapunov method. Numerical simulations were carried out to assess the effectiveness of the obtained controller.

Keywords: uncertain system; sliding modes control; robust control; adaptive control; PI controller

1. Introduction

Many of the nonlinear systems used in actual applications are uncertain or partially known (Abdallah, Dawson, Dorato, & Jamshidi, 1991; Bernhard, 2002; Grimble, 2006; Lee & Cheng, 1996; Siqueira, Terra, & Bergerman, 2011; Sira-Ramirez & Spong, 1988). Usually, these systems are subject, both to external unknown or unmodelled sustained perturbations and to the uncertainties produced by the mismatches and discrepancies between the system mathematical model and the actual plants (Fulwani, Bandyopadhyay, & Fridman, 2012). The control approaches known as adaptive and as robust are frequently used to overcome these obstacles. Essentially, the adaptive control approach consists of design a controller able to figure out the actual values of the uncertain terms (Krstic, Kokotovic, & Kanellakopoulos, 1995). On the other hand, a robust controller has a fixed structure, which provides a decent performance for a family of uncertain systems (Qu & Dawson, 1995; Spong & Sira-Ramirez, 1986). These control approaches have their own advantages; for instance, an adaptive controller can be applied to a wider range of uncertainties than a robust controller can (Pérez-Cruz, Ruiz-Velázquez, Rubio, & de Alba-Padilla, 2012; Rubio, 2012; Wen & Moreno-Armendariz, 2005), though its implementation is much more difficult. In addition, a robust controller does not need to be tuned while an adaptive one does. A third strategy combines both approaches to attempt a higher degree of robustness (Abdallah et al., 1991; Bartolini, Ferrara, & Usai, 1997). In Abdallah et al. (1991), an excellent motivation using

the robust control approach can be found. In that study, the robust control approach is divided into five categories: linear multi-variable control, passivity, variable structure, saturation, and robust and adaptive. Among these categories, the variable structure or sliding modes approach may well be one of the most used nowadays. This approach ensures robustness against disturbances and parameter variations, though having the inconvenience of produce high-frequency violent control signals, known as chattering. In fact, the presence of chattering may excite unmodelled high-frequency dynamics, resulting in unforeseen instability and damage to the actuators (Bondarev, Bondarev, Kostyleva, & Utking, 1985; Levant & Fridman, 2002; Rafi-manzelat & Yadanpanah, 2004). In recent years, emphasis has been placed on developing a technique to avoid this undesirable effect. Basically, there are three well-established types of approaches to eliminate the chattering effects. Continuous approximations, as the saturation function, of the sign function appearing in the sliding mode controllers are used in the first approach (Burton & Zinober, 1986; Eker, 2006; Slotine & Li, 1991). Approaches based on observers design are another way of overcoming the chattering; here, the idea consists of by passing the plant dynamics by a chattering loop, reducing the robust control problem to an exact robust estimation problem (Rubio & Soriano, 2010; Wen & Li, 2006). Unfortunately, the robustness with respect to the plant uncertainties and disturbances is reduced (Bondarev et al., 1985; Resendiz, Yu, & Fridman, 2008; Sira-Ramirez, 1993). The third type of approach, based

*Corresponding author. Email: caguilar@cic.ipn.mx

on the high-order sliding-mode method, guaranties convergence to the origin of the sliding variable and its corresponding derivatives. Here, the high-order sliding-mode algorithms translate the discontinuity produced by the sign function to the higher order derivatives, producing continuous control signals; however, these algorithms require an onerous computing effort (Davila, Fridman, & Poznyak, 2006; Levant, 1993, 2001; Polyakov & Poznyak, 2009; Santiesteban, Fridman, & Moreno, 2010). In addition to these three approach types, the neural network-based techniques are efficient to identify and control uncertain models. A full review of these topic is beyond the scope of this introduction, but we refer the interested reader to the following references (Wen & Poznyak, 1999; Wen, Poznyak, & Li, 2001).

The present work presents a smooth control strategy for the regulation problem of an uncertain system where the origin is not an equilibrium point. Hence, asymptotic stability of the closed-loop system cannot be expected in a single point (Benabdallah, 2009). Instead, in the present study, attention is focused on assuring uniform ultimate boundedness within an arbitrarily small neighbourhood of the zero state, which can be made as small as needed (there exist other alternative known as uniform stability, see Rubio & Pérez-Cruz, 2013; Rubio, Plamen, & Pacheco, 2011; Rubio & Wen, 2007). The idea behind this consists of shaping a class of nonlinear **PI**-controllers, which approximately emulate a sliding mode controller. This approach was accomplished using a combination of saturation functions and a traditional **PI** controller. The stability convergence analysis was carried out using the traditional Lyapunov method. The obtained continuous controller is quite robust against the unmodelled and persistent perturbation without needing to dominate it by a high-gain controller or by a sliding mode controller. In addition, the obtained closed-solution has a finite time of convergence in a small vicinity. As pointed out in Fulwani et al. (2012), Santiesteban et al. (2010), this property is very important. Examples of it can be found in many electro-mechanical, robotics, and power converter systems, which require a quick response without any overshoot. In this context, it is important to mention that the obtained results were based on the works of Santibanez, Kelly, Zavala-Rio, and Parada (2008), Parra-Vega (2001) and Ortega, Astolfi, and Barabanov (2002) and were designed to control generalised uncertain systems of first or second orders.

The remainder of this work is organised as follows. In Section 2, the robust **PI** controller motivation is introduced. Some generalisations of this controller are developed in Section 3, while Section 4 is devoted to the conclusions. Convincing numerical simulations to assess the effectiveness of the obtained results can be found throughout the, where appropriated.

Notation: Let, $x \in R$, $k \in (0, \infty)$, and $\text{sign}()$ be the standard sign function. The linear saturation function will

be refereed, as

$$S_k[x] = \{x \text{ if } |x| < k, \text{ otherwise } k \text{ sign}(x)\}.$$

In a similar way, the symbol $\alpha(x) \in R$ indicates a sigmoidal function; that is, $\alpha(x)$ is any smooth function with the property of $\alpha(0) = 0$, $x\alpha(x) \geq 0$ and, $|\alpha(x)| \leq \bar{\alpha}$ for all $x \in R$, and $\alpha(Lx) \rightarrow \bar{\alpha}\text{sign}(x)$, as long as $L \rightarrow \infty$. On the other hand, $\alpha^{-1}(s)$ indicates the inverse function of the corresponding sigmoidal function.

2. Robust PI controller motivation

Consider the following control system:

$$\dot{y} = u + \rho(y, t), \quad (1)$$

where $y \in R$ and $u \in R$ are the system single state and the system single input, respectively; $\rho(*) \in R$ is an unknown continuous function, which satisfies $|\rho(y, t)| \leq \bar{r}$ for all $t \geq 0$. It is well know that if we select u as

$$u = -k\text{sign}[y], \quad k > \bar{r}, \quad (2)$$

then the state y globally converges on the origin in a finite time. However, discontinuities presented in the proposed controller lead to chattering. To overcome this drawback, the following controller is introduced, which can be seen as a generalisation of a **PI** -controller with variable gains or a smooth approximated version of the twisting algorithm.

Let us introduce the following smooth bounded controller:

$$\begin{aligned} u &= -k_p S_{M_1} [\gamma(Ly)] + S_{M_2}[z], \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1} [\gamma(Ly)], \end{aligned} \quad (3)$$

where L , k_p , k_d , M_1 and M_2 are the positive gains to be designed; $\gamma(y)$ is defined as

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \alpha(y)\alpha(y) = \alpha(y)(\beta_0 + \beta_1 y^2)^\kappa, \\ \beta_0 &> 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \kappa \in R_+. \end{aligned} \quad (4)$$

Hence, the closed-loop system, defined in (3) and (1), is given by

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -k_p S_{M_1} [\gamma(Ly)] + S_{M_2}[z] + \rho(y, t), \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1} [\gamma(Ly)]. \end{aligned} \quad (5)$$

In the following subsection, it is demonstrated that the above system is globally ultimately stable.

2.1 Boundedness of the closed-loop system

Proposing $V_y = y^2/2$ and differentiating V_y around the trajectories of (5), we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V}_y &= y (-k_p S_{M_1} [\gamma(Ly)] + S_{M_2} [z] + \rho(y, t)) \\ &\leq -|y| (k_p S_{M_1} [\gamma(L|y|)] - M_2 - \bar{r}), \end{aligned}$$

where k_p , M_1 , and M_2 must satisfy $k_p M_1 > M_2 + \bar{r} + \delta$ with $\delta > 0$. Obviously, if $\alpha(L|y|)\beta(y) > M_1$, then $\dot{V}_y < 0$. Hence, there exists a finite time, $T_0 > 0$, after which,

$$\gamma(L|y|) < M_1; \quad \forall t \geq T_0, \quad (6)$$

implying that

$$|y(t)| \leq y_M \triangleq \frac{1}{L} \alpha^{-1} \left(\frac{M_1}{\beta_0^\kappa} \right), \quad \forall t \geq T_0. \quad (7)$$

Note that in the case when $k_p \gamma(L|y|) > M_2 + \bar{r} + \delta$, $\dot{V}_y < 0$ holds. That is, after some finite $T_0 > 0$, $|y| \leq y_M$ where y_M can be as small as desired. Having shown that y is ultimately bounded, we proceed to show that z is also ultimately bounded. To this end, the following auxiliary variable, $w = y - k_p z/k_d$, with its time derivative is given by

$$\dot{w} = S_{M_2} [(y - w)k] + \rho(y, t), \quad (8)$$

with $k = k_d/k_p > 0$ is used. Therefore, to compute the confined region of w the following function $V_w = w^2/2$ is used where its time derivative, around the trajectories of (8), produces the following relation:

$$\dot{V}_w \leq w S_{M_2} [k(y - w)] - \bar{r} |w|. \quad (9)$$

Remembering that $|y(t)| \leq y_M$ for all $t \geq T_0$ (see the previous discussion), it is enough to select $M_2 > \bar{r} + 2ky_M + \delta$ with $\delta > 0$ for assuring that $\dot{V}_w < 0$, if $|w| > y_M + \bar{r}/k + \delta$. This implies that, after some finite time, $T_1 \geq T_0$, the following inequality holds

$$|w(t)| \leq \bar{r}/k + y_M + \delta, \quad \forall t \geq T_1 \geq T_0.$$

Hence, substituting the inequality, $|z/k| - |y| \leq |w|$, into the above expression, we have

$$|z(t)| \leq \bar{r} + ky_M + \delta, \quad \forall t \geq T_1.$$

Then, it can be concluded that both states, y and z , are ultimately bounded.

It is noted here that the obtained bounds for y and z are quite conservative, as the present paper is concerned with showing that the whole state is bounded. However, the following subsection is focused on finding a better bound for the state variable, y .

2.2 Improving the estimation of the confined region of the variable, y

In order to determine a good-estimation for the bound, $\bar{y} > 0$, such that $|y(t)| \leq \bar{y} < y_M$ for all $t > T_* \geq T_2$, we propose the following Lyapunov function:

$$V(x) = \int_0^y S_{M_1} [\gamma(Ls)] ds + \frac{1}{k_d} \int_0^z S_{M_1} [s] ds. \quad (10)$$

It must be stressed that the proposed function, V , is a strictly positive and radially unbounded function, with a local minimum at the origin (see Ortega, Loria, & Kelly, 1995). Thus, its time derivative, around (5), satisfies the following inequality:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -k_p S_{M_1}^2 [\gamma(Ly)] + S_{M_1} [\gamma(Ly)] \rho(y, t) \\ &\leq -S_{M_1} [\gamma(L|y|)] (k_p S_{M_1} [\gamma(Ly)] - \bar{r}), \end{aligned} \quad (11)$$

where the set of control parameters M_1 and M_2 must be selected according to the previous discussion. Therefore, from the last inequality, $\dot{V} < 0$ as long as $\alpha(L|y|)\beta(y) > M_1$. Once again, inequality (6) is satisfied, implying that there exists a finite time, $T_1 \geq T_0$ such that $S_{M_1}[*]$ works in the lineal region. Consequently, inequality (11) converts to

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma(L|y|) (k_p \gamma(L|y|) - \bar{r}),$$

and, evidently, $\dot{V} < 0$, while

$$g(y) = k_p \gamma(L|y|) - \bar{r} > 0. \quad (12)$$

Thus, there exists a time, $t > T_* \geq T_1$ such that $g(y(t)) \leq 0 \forall t > T_*$. In other words, y is confined to moving inside of the compact set, $B_{\bar{y}}$, where

$$B_{\bar{y}} = \{y \in R : |y| \leq \bar{y}, \text{ with } g(\bar{y}) = 0\}.$$

It should be stressed that the confined region can be shrunk by selecting the values of the control parameters, k_p , k_d , L , β_0 and β_1 , as conveniently large.

Remark 1: Evidently, \bar{y} can be numerically computed by plotting, $y > 0$, versus, $g(y)$, and detecting the sign change of $g(y)$.

Henceforth, $Q = \{M_1, M_2, k_p, k_d, L, \beta_0, \beta_1, \delta, \kappa\}$ is used to denote the set of positive control gains parameters.

Proposition 1: Consider the scalar uncertain system (1), with the uncertain $|\rho(y, t)| \leq \bar{r}$, in closed-loop with

$$\begin{aligned} u &= -k_p S_{M_1} [\gamma(Ly)] + S_{M_2} [z], \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1} [\gamma(Ly)], \end{aligned} \quad (13)$$

where the set control parameters, Q , satisfies the restrictions

$$k_p M_1 > M_2 + \bar{r} + \delta, M_2 > \bar{r} + 2k y_M + \delta, \quad (14)$$

with

$$y_M \hat{=} \frac{1}{L} \alpha^{-1} \left(\frac{M_1}{\beta_0^k} \right), k = \frac{k_d}{k_p}. \quad (15)$$

Then, the closed-loop system is uniformly ultimately bounded. Besides, for some finite time, $T > 0$, $|y(t)| \leq \bar{y}$ for all, $t > T > 0$, where \bar{y} is the single root of

$$g(y) = k_p \gamma(L|y|) - \bar{r}. \quad (16)$$

The following properties help to stress some facts about the proposed controller:

- (P1) If $\rho(y, t) = r$, where r is a constant and, under the same consideration in **Proposition 1**, we have that $y \rightarrow 0$ and $z \rightarrow -r$, as long as $t \rightarrow \infty$.
- (P2) Suppose that $|\rho(y, t)| \leq \rho_b(y) \leq \bar{r}_b$ for all $y \in R$ with $\rho_b(0) = 0$, and selecting $\alpha(Ly)$, $\beta(y)$, and the set of control parameters, Q , such that

$$k_p |S_{M_1} [\gamma(L|y|)]| > |\rho_b(y)|, \forall y \in R - \{0\}, \quad (17)$$

with, $M_1 > M_2 + \bar{r}_b + \delta$, it can be assured that $y \rightarrow 0$ and $z \rightarrow 0$, as long as $t \rightarrow \infty$.

The proofs of these facts are in the Appendix.

Based on the previous facts, **Lemma 1** is established as follows.

Lemma 1: Consider the closed-loop system (1) and (13), and suppose that the uncertain term can be written as

$$\rho(y, t) = r_0 + \rho_b(y),$$

where r_0 is any fixed constant and $\rho_b(y)$ satisfies **P2**. Tacking $\bar{r} = \bar{r}_b + |r_0|$ and restricting the set of control parameters Q , according to (14), then we have $y \rightarrow 0$ and $z \rightarrow -r_0$, as long as $t \rightarrow \infty$.

The above Lemma is a straightforward consequence of properties **P1** and **P2**.

Comment 1: The inequality (17) is quite easy to fulfil by adequately fixing the set of parameters, Q . For instance, suppose that

$$\rho(y, t) = \sin(y)^i, \quad i \in N.$$

Hence, $\rho_b(y) = |\sin(y)|^i$ with $i \in N$. Then, using the following setup

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \sqrt{1 + y^2} \tan^{-1}(y), \\ L &= 2M_2 = 2k_p = 1\delta = 10^{-1}, \end{aligned}$$

inequality (17) converts to

$$\begin{aligned} |\sin(y)^i| &< S_{M_2=2} [\tan^{-1}(2|y|)\sqrt{1 + 4y^2}], \\ \forall y \in R - \{0\} \wedge i \in N, \end{aligned}$$

which always holds. In addition, note that the parameter L does not needs to be too large.

Numerical example: In order to test the effectiveness of the proposed control law strategy (13), for the uncertain system (1), we run a numerical simulation for the unknown term, $\rho(y, t) = 0.5\sin(t/4) + \sin(y)$. The control objective was to follow the reference signal, $\sin(t/2)$. The system was initialised at 0.2 rads; the control function was $\gamma(y) = \sqrt{1 + y^2} \tan^{-1}(y)$, with $L = 50$, $k_p = 3$, $k_d = 1$, $M_1 = 3$ and $M_2 = 2$. The corresponding results can be seen in **Figure 1**. From this figure it can be seen that the proposed control law effectively makes the uncertain system to follow the selected reference in a very short period of time.

3. Some generalisations of the proposed control scheme

The proposed scheme can be also extended for the case where the uncertain term is unbounded. Suppose that the uncertain term can be upper-bounded by some nonlinear strictly positive function, as

$$|\rho(y, t)| \leq \bar{r} \rho_u(y), \quad (18)$$

where $\bar{r} > 0$ and $\rho_u(y)$ is any strictly positive non-bounded function (for instance, $\rho_u(y) = 1 + |y|^{\frac{1}{2}} + |y|^2$). Then, the following proposition is fulfilled:

Proposition 2: Consider the scalar uncertain system (1), where the uncertainty fulfils the inequity (18), in closed-loop with

$$\begin{aligned} u &= -k_p \rho_u(y) S_{M_1} [\gamma(Ly)] + \rho_u(y) S_{M_2} [z], \\ \dot{z} &= -k_d \rho_u(y) S_{M_1} [\gamma(Ly)], \end{aligned} \quad (19)$$

where control parameters are selected according to (14) and (15). Then, the closed-loop system is uniformly ultimately bounded. That is, $|y(t)| \leq \bar{y}$, for $t > T > 0$, where \bar{y} is the single root of (16).

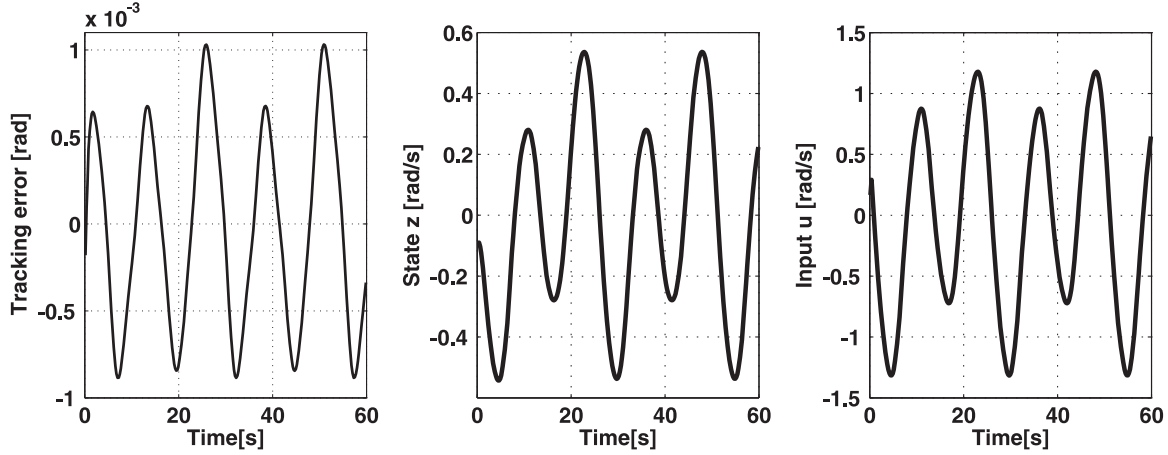


Figure 1. Close-loop response of the uncertain first-order system.

Proof: First of all, we must recall that the closed-loop system, defined by (1) and (19), is

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -k_p \rho_u(y) S_{M_1} [\gamma(Ly)] + \rho_u(y) S_{M_2} [z] + \rho(y, t), \\ \dot{z} &= -k_d \rho_u(y) S_{M_1} [\gamma(Ly)],\end{aligned}\quad (20)$$

where $|\rho(y, t)| \leq \bar{r} \rho_u(y)$. Following the same steps as in **Proposition 1** is easy to see that this closed-loop system is stable. Now, to estimate a convenient bound for \bar{y} , we use the proposed function, V , given in (10). Hence, the time derivative of, V , around the trajectories of (20) can be upperbounded by

$$\dot{V}(x) \leq -\rho(y) S_{M_1} [\gamma(L|y|)] (k_p S_{M_1} [\gamma(Ly)] - \bar{r}).$$

Now from the restriction that $k_p M_1 > M_2 + \bar{r} + \delta$ for some finite time,

$$\gamma(Ly) < M_1.$$

Once again, $\dot{V} < 0$ as long as $g(y) = k_p \gamma(L|y|) - \bar{r} > 0$, implying that $|y| \leq \bar{y}$ for a finite time.

3.1 Controlling a second-order uncertain system

Suppose that we have the following uncertain second-order nonlinear system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \rho(x, t) + bu,\end{aligned}\quad (21)$$

where $x = (x_1, x_2) \in R^2$ is the vector state, $u \in R$ is the control action, and $\rho(*)$ is a scalar uncertain nonlinear function, provided that

$$|\rho(x, t)| \leq k_b + k_a \|x\|, \quad k_a, k_b \geq 0, \quad (22)$$

with $0 < \underline{b} \leq b \leq \bar{b}$. The control objective is to render the states x_1 and x_2 to the origin by using a continuous controller. To accomplish this, the auxiliary variable, $\sigma(x) = \lambda x_1 + x_2$, with $\lambda > 0$, is forced to move very close to the origin in a finite time. Roughly speaking, it is attempted to make variables $\sigma(\cdot)$ and $\dot{\sigma}(\cdot)$ almost zero in a finite time. Now, this control problem is solved, taking advantage of the previously proposed robust control scheme, leading to the following controller:

$$\begin{aligned}u &= -k_p S_{M_1} [\gamma(L\sigma)] \rho_l(x) + S_{M_2} [z] \rho_l(x), \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1} [\gamma(L\sigma)] \rho_l(x),\end{aligned}\quad (23)$$

where $\rho_l(x) = (k_b + \lambda|x_2| + k_a\|x\|)$, and for simplicity,

$$\sigma = \lambda x_1 + x_2, \quad \lambda > 0. \quad (24)$$

From the above relation, after some simple algebra, $\dot{\sigma}$, may be written as

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= b \rho_l(x) (-k_p S_{M_1} [\gamma(L\sigma)] + S_{M_2} [z] + p(x, t)), \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1} [\gamma(L\sigma)] \rho_l(x),\end{aligned}\quad (25)$$

where $p(x, t)$ lumped all the uncertain terms, defined by

$$p(x, t) = \frac{\lambda x_2 + \rho(x, t)}{b \rho_l(x)}.$$

Then, the parameter \bar{r} is redefined as

$$\max |p(x, t)| \leq \bar{r} = \frac{1}{\underline{b}}, \quad (26)$$

and selecting the control parameters M_1 and M_2 according to (14) and (15), respectively. It is easy to check whether σ and z are bounded (see the previous section). In fact, from

the first equation of (25), there is $T_0 > 0$, such that

$$|\sigma(t)| \leq \sigma_M = \frac{1}{L} \alpha^{-1} \left(\frac{M_1}{\beta_0^\kappa} \right), \forall t \geq T_0. \quad (27)$$

Now in order to determine a good-estimation for the bound, $\bar{\sigma} > 0$, such that, $|\sigma(t)| \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_M$, from the above restriction, we have that $S_{M_1}[\cdot]$ works in the linear region, after $t \geq T_0$. Therefore, the following Lyapunov function can be proposed:

$$V(\sigma, z) = \int_0^\sigma \gamma(L\sigma(s))ds + \frac{b}{k_d} \int_0^z S_{M_2}[s] ds, \quad (28)$$

where the time derivative around of the trajectories of (25) leads to

$$\dot{V}(\sigma, z) = -b(k_p \rho_l(x) \gamma^2(L\sigma) + \gamma(L\sigma)p(x, t)). \quad (29)$$

After some simple algebra, it is easy to show that \dot{V} can be upperbounded by

$$\dot{V}(\sigma, z) \leq -b \rho_l(x) \gamma(L|\sigma|)(k_p \gamma(L|\sigma|) - \bar{r}).$$

In addition, evidently, $\dot{V} < 0$, as long as

$$g(y) = k_p \gamma(L|\sigma|) - \bar{r} > 0.$$

Consequently, there exists a finite time $T_1 \geq T_0 > 0$, after which $|g(\sigma)| \leq g(\bar{\sigma})$, where $\bar{\sigma}$ is the single root of $g(y)$. This section is ended by introducing the following proposition, which summarises the above developments.

Proposition 3: *The second-order nonlinear system (21) in closed-loop with (23), where the saturation function level parameters were selected according to (14) and (15), is uniformly ultimately bounded. That is, $|\sigma| \leq \bar{\sigma}$ for all $t > T > 0$, where $\bar{\sigma}$ is the single root of (16).*

3.2 Stabilisation of a class of nonlinear systems

It is well known that many mechanical systems admit the following cascade form:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f(x) + d_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= u + d_2, \end{aligned} \quad (30)$$

where $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ is the state, $u \in R$ is the controller, $f: R^4 \rightarrow R$ and $b: R^4 \rightarrow R$ are nonlinear smooth functions, d_1 and d_2 are bounded perturbations, and, f and d_i satisfy the following:

$$|f(x)| \leq \kappa \|x\|; |d_i(t)| \leq \bar{d}_i.$$

The control objective is to render the state x to one small vicinity at the origin by using a continuous controller. Similarly to before, the variable σ is selected as

$$\sigma(x) = x_4 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

where the set of constants $\lambda_i > 0$ will be selected below. Therefore, its corresponding time derivative is

$$\dot{\sigma}(x) = u + Kx + \lambda_2 f_1(x) + f_2(x) + d_0,$$

where $d_0 = d_1 + \lambda_2 d_1$ and $Kx = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4$. Now, using simple algebra, the last equation can be rewritten as

$$\dot{\sigma}(x) = \rho_l(x) \left(\frac{u + K_\lambda x}{\rho_l(x)} + p(x, t) \right), \quad (31)$$

where $\rho_l(x)$ and $p(x, t)$ are defined by

$$\begin{aligned} \rho_l(x) &= k(\bar{d}_1 + \lambda_2 \bar{d}_2 + (\lambda_2 \kappa_1 + \kappa_2) \|x\|) \\ p(x, t) &= \frac{f_2(x) + d_0}{\rho_l(x)}, \end{aligned}$$

with $k > 1$. Again, using simple algebra, $|p(x, t)| \leq \bar{r} = 1/k$.

Based on **Proposition 3**, u is introduced as

$$\begin{aligned} u &= \rho_l(x) (-k_p S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] + S_{M_2}[z]), \\ \dot{z} &= -k_d S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \rho_l(x). \end{aligned} \quad (32)$$

Note that the proposed controller (32) in closed-loop with (31) corresponds to the previously obtained system (25). Therefore, following similar steps as before, after some finite time, $t \geq T_0$,

$$|\sigma(t)| \leq \sigma_M = \frac{1}{L} \alpha^{-1} \left(\frac{M_1}{\beta_0^\kappa} \right), \forall t \geq T_0.$$

Even more, there exists some time, $T_1 \geq T_0$, such that $|g(\sigma(t))| \leq g(\bar{\sigma})$ for all $t \geq T_1$, where $\bar{\sigma}$ is the single root of $g(y)$ (e.g. (16)). Hence, $|\sigma(t)| \leq \bar{\sigma}$, where $\bar{\sigma}$ can be forced to be very close to zero. This means that

$$x_4 = -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 + \delta(t), \quad (33)$$

where $|\delta(t)| \leq \bar{\sigma}$ for all $t \geq T_1$. Observe that the first three differential equation of system (30) are globally Lipschitz. That is, the states $\{x_1, x_2, x_3\}$ cannot have a finite time of scape (Khalil, 2002). Therefore, after some finite period of time, $T_1 > t$, these last three equations of (30) can be rewritten as

$$\dot{q} = A_\lambda q + d(q, t), \quad (34)$$

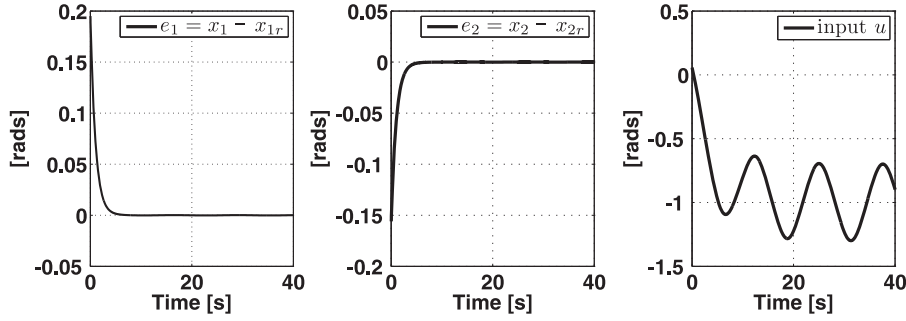


Figure 2. Close-loop response of the uncertain inverted pendulum attached to a DC-motor.

where

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$B(q, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix},$$

where $|\beta(t)| \leq \bar{d}_1 + \bar{\sigma} + \kappa(1 + \bar{\lambda})\|x\|$ with $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$. Now, to ensure the ultimate boundedness of system (34), matrix A_λ has to be Hurwitz, and the system has to be asymptotically and exponentially stable if $\bar{d}_1 = 0$ and $\bar{\sigma} = 0$. It can be easily solved invoking Khalil's vanishing perturbation theorem (see Khalil, 2002). To achieve this, it is enough to satisfy the following inequity:

$$\kappa \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)(1 + \bar{\lambda})}, \quad (35)$$

where Q and P satisfy the following Lyapunov equation:

$$PA_\lambda + A_\lambda^T P = -Q, \quad (36)$$

where $Q > 0$ and $P > 0$. That is to say, if A_λ is selected such that the expressions (35) and (36) are fulfilled, the state q exponentially decayed to zero. However, considering the perturbations $d_1 \neq 0$ and $\delta_1 \neq 0$, it is easy to see that the state q is ultimately bounded. This means that $|q| \leq \bar{\delta}(\bar{\lambda}, L)$, where the constant $\bar{\delta}$ can be as small as needed.¹ According to the above discussion, the following proposition gives sufficient conditions to ensure the ultimately boundedness of system (30) in closed-loop with (32).

Proposition 4: *Let us consider the nonlinear system (30) in closed-loop with (32), under the assumptions that A_λ is selected according to (35) and (36), and the saturation function level parameters were selected according to (14) and (15). Then, there exists a finite time $T > 0$ where the state x is ultimately bounded, with $|x| \leq \bar{x}(\bar{\lambda}, L)$, where \bar{x} can be as small as needed, selecting adequately $\bar{\lambda}$ and L .*

3.3 Numerical example

To show the effectiveness of the proposed controller (23), it was applied it to the well-known inverted pendulum attached to a DC-motor, whose state model is given by

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin(x_1) + \rho(t),$$

where x_1 and x_2 are the pendular angle position and the pendular angle velocity, respectively; the control signal u corresponds to the motor torque. The parameters M , L , g and J are the pendulum mass, the pendulum arm length, the gravity constant and the arm inertia, respectively, while ρ is a bounded perturbation. Assuming that physical parameters are partially known and ρ given by

$$\frac{1}{J} = 0.8 \pm 0.2, \quad \frac{MgL}{2J} = 1 \pm 0.25, \quad \rho(t) = 1 + 0.1 \sin(t/5).$$

The objective is to drive the tracking errors $e_1 = x_1 - x_r$ and $e_2 = x_2 - \dot{x}_r$ close enough to the origin. That is, $e_1 \cong 0$ and $e_2 \cong 0$. Thus, defining $\sigma = e_1 + e_2$ and repeating similar steps as before, the following controller

$$u = -k_p S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \rho_l(e_1) + S_{M_2}[z] + \ddot{x}_r, \\ \dot{z} = -k_d S_{M_1}[\gamma(L\sigma)] \rho_l(e_1), \quad \rho_l(e_1) = 1 + |e_2|,$$

assures that both errors can be as small as desired if the set of control parameters satisfies the conditions (14) and (15). In order to achieve a good performance, the control parameters were fixed as

$$\gamma(\sigma) = \sqrt{L + \frac{\sigma^2}{L^2}} \tan^{-1}(\sigma) \quad k_p = 5 \quad k_d = 1 \\ M_2 = 2.78 \quad M_1 = 3 \quad k = 0.2,$$

where $\bar{r} = 2.7$ and $\sigma_M = 68 \times 10^{-4}$ (see (26) and (27), respectively). By numerical computation, it is easy to see that the steady-state error of ' σ ' is given by $\bar{\sigma} \cong 1.1 \times 10^{-3}$, implying that $|e_1| \leq \bar{\sigma}$.

Figure 2 shows the closed-loop response of both tracking errors and the corresponding controller. From this figure, it is clear that the proposed controller effectively

renders the errors close enough to the origin in about 2.25 s.

4. Conclusions

A smooth control strategy for the regulation problem of an uncertain system was obtained. This strategy assures uniform ultimate boundedness of the closed-loop system inside of the zero-state neighbourhood, which can be made arbitrarily small. To accomplish this, a class of nonlinear **PI** controllers was designed. This controller behaves as if it were a sliding mode controller. This behaviour approximation was in turn achieved using a combination of saturation functions and a traditional **PI** controller. The controller robustness against unmodelled and persistent perturbations did not need a high-gain controller or a sliding mode controller to dominate it. In addition, the obtained closed-solution has a finite time of convergence in a small vicinity. To perform the corresponding stability convergence analysis the traditional Lyapunov method was used. Finally, the effectiveness of the obtained controller was validated by numerical simulations, which demonstrated clearly the controller is able to render the system to a small vicinity of the origin. It is worth mentioning that the obtained controller was designed for a generalisation of uncertain systems of first or second order. However, a generalisation for systems of higher order can be obtained.

Acknowledgements

This research was supported by the Centro de Investigación en Computación of the Instituto Politecnico Nacional (CIC-IPN), and by the Secretaría de Investigación y Posgrado of the Instituto Politecnico Nacional (SIP-IPN), under Research Grants 20131342 and 20131304. Julio A. Mendoza is a doctoral student at the Centro en Investigación en Computación and a scholarship holder of the CONACYT and he wants to thanks both institutions.

Note

1. To avoid unnecessarily extending this report, the computing of $\bar{\lambda}$ is omitted.

References

- Abdallah, C., Dawson, D.M., Dorato, P., & Jamshidi, M. (1991). Survey of robust control for rigid robots. *IEEE Control Systems Magazine*, 11, 24–30.
- Bartolini, G., Ferrara, A., & Usai, E. (1997). Applications of a sub-optimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7, 299–319.
- Benabdallah, A. (2009). On the practical output feedback stabilization for nonlinear uncertain systems. *Nonlinear Analysis*, 14, 145–153.
- Bernhard, P. (2002). Survey of linear quadratic robust control. *Macroeconomic Dynamics*, 6, 19–39.
- Bondarev, A.G., Bondarev, S.A., Kostilyeva, N.Y., & Utking, V.I. (1985). Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automatica i telemekhanika (Autom. Remote Control)*, 46, 679–684.
- Burton, J.A., & Zinober, S.I. (1986). Continuous approximation of VSC. *International Journal of Systems Sciences*, 17, 875–885.
- Davila, J., Fridman, L., & Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical system via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79, 1251–1262.
- Eker, I. (2006). Sliding mode control with PID sliding surface and experimental application to an electromechanical plant. *ISA Transactions*, 45, 109–118.
- Fulwani, D., Bandyopadhyay, B., & Fridman, L. (2012). Non-linear sliding surface: Towards high performance robust control. *IET Control Theory & Applications*, 6, 235–242.
- Grimble, M.J. (2006). *Robust industrial control systems*. Chichester: Wiley.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Krstic, M., Kokotovic, P.V., & Kanellakopoulos, I. (1995). *Non-linear and adaptive control design* (1st ed.). New York, NY: John Wiley & Sons.
- Lee, G.W., & Cheng, F.T. (1996). Robust control of manipulators using the computed torque plus H_∞ compensation method. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 143, 64–72.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58, 1247–1263.
- Levant, A. (2001). Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence. *International Journal of Control*, 46, 1447–1451.
- Levant, A., & Fridman, L. (2002). Higher order sliding modes. In J. Barbot & W. Perruquetti (Eds.), *Sliding mode control in engineering* (pp. 53–101). New York, NY: Marcel Dekker Inc.
- Ortega, R., Astolfi, A., & Barabanov, N.E. (2002). Nonlinear PI control of uncertain systems: An alternative to parameter adaptation. *System & Control Letters*, 47, 259–278.
- Ortega, R., Loria, A., & Kelly, R. (1995). A semiglobally stable output feedback PID regulator for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, 1432–1436.
- Parra-Vega, V. (2001). Second order sliding mode control for robot arms with time base generators for finite-time tracking. *Dynamics and Control*, 11, 175–186.
- Pérez-Cruz, J.H., Ruiz-Velázquez, E., Rubio, J.J., & de Albadilla, C.A. (2012). Robust adaptive neurocontrol of SISO nonlinear systems preceded by unknown deadzone. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–23.
- Polyakov, A., & Poznyak, A. (2009). Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “Twisting” controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45, 444–448.
- Qu, Z., & Dawson, D.M. (1995). *Robust tracking control of robot manipulators*. New York, NY: IEEE press.
- Rafimanzelat, M.R., & Yadanpanah, M.J. (2004). A novel low chattering sliding mode controller. In *5th Asian Control Conference*, Melbourne, Australia (Vol. 3, pp. 1958–1963).
- Resendiz, J., Yu, W., & Fridman, L. (2008). Two-stage neural observed mechanical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 55, 1076–1081.
- Rubio, J.J. (2012). Modified optimal control with a back propagation network for robotic arms. *IET Control Theory & Applications*, 6, 2216–2225.
- Rubio, J.J., & Pérez-Cruz, J.H. (2013). Evolving intelligent system for the modelling of nonlinear systems with dead-zone

- input. *Applied Soft Computing*. Advance online publication. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2013.03.018
- Rubio, J.J., Plamen, A., & Pacheco, J. (2011). Uniformly stable backpropagation algorithm to train a feedforward neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22, 356–366.
- Rubio, J.J., & Soriano, L.A. (2010). An asymptotic stable proportional derivative control with sliding mode gravity compensation and with a high gain observer for robotic arms. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 6, 4513–4526.
- Rubio, J.J., & Wen, Y. (2007). Stability analysis of nonlinear system identification via delayed neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 54, 161–165.
- Santibanez, V., Kelly, R., Zavala-Rio, A., & Parada, P. (2008). A new saturated nonlinear PID global regulator for robot manipulators. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, South Korea (pp. 11690–11695).
- Santesteban, R., Fridman, L., & Moreno, J.A. (2010). Finite-time convergence analysis for “Twisting” controller via a strict Lyapunov function. In *International Workshop on Variable Structure Systems* (pp. 26–28).
- Siqueira, A.A.G., Terra, M.H., & Bergerman, M. (2011). *Robust control of robots: Fault tolerant approaches*. Berlin: Springer Verlag.
- Sira-Ramirez, H. (1993). A dynamical variable structure control strategy in asymptotic output tracking problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 615–620.
- Sira-Ramirez, H., & Spong, M.W. (1988). Variable structure control of flexible joint manipulators. *IEEE International Journal of Robotics and Automation*, 3, 57–64.
- Slotine, J.J., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Spong, M.W., & Sira-Ramirez, H. (1986). Robust control design techniques for a class of nonlinear systems. In *IEEE American Control Conference*, Seattle, WA (pp. 1515–1522).
- Wen, Y., & Li, X. (2006). PD control of robot with velocity estimation and uncertainties compensation. *International Journal of Robotics and Automation*, 21, 1–9.
- Wen, Y., & Moreno-Armendariz, M.A. (2005). Robust visual servoing of robot manipulators with neuro compensation. *Journal of the Franklin Institute*, 342, 824–838.
- Wen, Y., & Poznyak, A. (1999). Indirect adaptive control via parallel dynamic neural networks. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 146, 25–30.

Wen, Y., Poznyak, A., & Li, X. (2001). Multilayer dynamic neural networks for non-linear system on-line identification. *International Journal of Control*, 74, 1858–1864.

Appendix A

Proof of property in P1

If $\rho(y, t) = r$ with r being constant, then the single equilibrium point given by $\bar{x} = (y = 0, z = -r)$ is asymptotically and globally stable for the system (5). Under the assumption in **Proposition 1**, y and z are globally stable in a Lyapunovian sense. However, to assure convergence at \bar{x} , we must use the following function:

$$V_1(x) = V(x) + rz, \quad (1)$$

where $V(x) > 0$ was previously defined in (10). Evidently, its time derivative of around (5) leads to

$$\dot{V}_1(x) = -k_p S_{M_1}^2 [\gamma(Ly)] \leq 0. \quad (2)$$

Since, $V_1(x)$, is bounded from below and, $\dot{V}_1(x)$, is semi-definite negative, then global stability of $x = (y, z)$ is once again assured. However, remarking that $\dot{V}_1(x) = 0$, if and only if $y = 0$, straightforwardly proves global asymptotic stability of the equilibrium point, $(y = 0, z = -r)$, via LaSalle’s theorem (see Khalil, 2002). \square

Proof of property in P2

From the previously-defined Lyapunov function, $V(x) > 0$, defined in (10), its corresponding time derivative is around the trajectories of (5) (for more detail, review the first expression of (11)), and after substituting, $|\rho(y, t)| \leq \rho_b(y)$, the following expression holds:

$$\dot{V}(x) \leq -S_{M_1} [\gamma(L|y|)] (k_p S_{M_1} [\gamma(L|y|)] - |\rho_b(y)|).$$

Now, from the assumption (17), it can be assured that $\dot{V}(x) < 0$, for all $y \in R - \{0\}$. After using LaSalle’s theorem, it is easy to show that both variables, y and z , asymptotically converge on the origin. \square

Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control

Carlos Aguilar-Ibáñez ·
Julio Mendoza-Mendoza · Jorge Dávila

Received: 22 October 2013 / Accepted: 25 July 2014 / Published online: 29 August 2014
© The Author(s) 2014. This article is published with open access at Springerlink.com

Abstract This paper presents a control strategy designed as a combination of a **PD** controller and a twisting-like algorithm to stabilize the damped cart pole system, provided that the pendulum is initially placed within the upper-half plane. To develop the strategy, the original system is transformed into a four-order chain of integrator form, where the damping force is included through an additional nonlinear perturbation. The strategy consists of simultaneously bringing the position and velocity of the pendulum to within a compact region by applying the **PD** controller. Meanwhile, the system state variables are brought to the origin by the twisting-like algorithm. The corresponding convergence analysis is done using several Lyapunov functions. The control strategy is illustrated with numerical simulations.

Keywords Inverted cart pendulum · Sliding control mode · Lyapunov method

C. Aguilar-Ibáñez (✉)
CIC - IPN, U.P.A.L.M, Av. Juan de Dios Bátiz s/n, Col. San Pedro Zacatenco, A.P. 75476, 07738 Mexico, D.F., Mexico
e-mail: carlosaguilari@cic.ipn.mx

J. Mendoza-Mendoza
CIC - IPN, Mexico, D.F., Mexico
e-mail: aladegrabriel@hotmail.com

J. Dávila
ESIME - IPN, Av. Ticoman 600, Col. San Jose Ticoman, 07340 Mexico, D.F., Mexico
e-mail: jadavila@ipn.mx

1 Introduction

The cart pole system (**CPS**), also known as the inverted pendulum on a cart, is among the classic mechanical systems that have been studied extensively in control theory during the last four decades. This system was originally used as a benchmark for educational purposes, see [1, 6, 15, 33, 39, 43, 44, 46]. Through the years, this system has attracted attention as an important underactuated mechanical system, because the pendulum angular acceleration cannot be directly controlled [18, 42]. As the **CPS** dynamics resembles that of many underactuated robot systems, it has been studied as a simplified model such systems (see [7, 27, 30, 38, 40, 43]). This system is made up of a cart that moves, forward and backward, over a straight line and has a free-moving pendulum hanging from it. The cart is moved by a horizontal force, which is the input of the system. It is well known that several control strategies that were initially conceived for fully actuated systems cannot be applied to drive this system. Actually, the system is not feedback linearizable [23, 42]; also, the system loses controllability when the pendulum passes through the horizontal plane [18, 41]. However, the system can be controlled when located near the unstable equilibrium point, by applying the direct pole placement procedure [25, 42].

In the present authors' opinion, there are two important problems related to the control of the **CPS**. The first consists of the upward swing of the pendulum from the hanging position to the upright position. In general, this

problem has been tackled by using methods based on energy control and hybrid schemes [2,3,8,9,22,26,31,44,45]. The second issue arises when the pendulum is located somewhere in the upper-half plane, and the goal is bringing it to its unstable equilibrium point. Usually, this control challenge has been solved by applying nonlinear control tools. A full review of these tools is beyond the scope of this work; however, we mention, for instance, the well-known energy-based controller or Lyapunov-based techniques, and methods based on the feedforward or the backforward forms, in conjunction with the saturation function or the bounded function approaches [3–5,13,14,22,30,45].

In this work, we propose a control strategy to stabilize the damped CPS around to its unstable equilibrium point, assuming that the pendulum starts moving from some position located inside of the upper-half plane and that the damped coefficient is known. Considering the damping force in the non-actuated coordinate makes controlling this system a challenge, because this force can easily destroy the system stability [21,32,47]. In addition, managing this force is a very difficult task. Several works have neglected the damping coefficient for this reason.

To develop the proposed control strategy, we transformed the original system into a four-order chain of integrators, with an additional nonlinear perturbation. Then, we proposed the strategy as a combination of a linear PD controller and a modified version of the twisting algorithm [16,28,34–36], where the first acts over the pendulum position and velocity, while the second brings the whole system state to the origin. The corresponding stability analysis was carried out by using several Lyapunov functions. Convincing numerical simulations were done to assess the performance of the proposed control strategy. Finally, we mention that this work was inspired by [35,36]. However, our strategy, when the controller gains are adequately selected, may guarantee global convergence, as long as the position pendulum is initialized into the upper-half plane, though it has the disadvantage of being less robust in the presence of unmodeled perturbations. During the development of this study, we use the following functions:

$$sgn[x] = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ -1 & \text{if } x < 0, \\ \epsilon \in [-1, 1] & \text{if } x = 0. \end{cases}; \quad \frac{d}{dx} |x| = sgn[x].$$

The following sections are organized as follows. The nonlinear model of the system is presented in Sect. 2. In Sect. 3, we develop the control strategy. The numerical simulations and the conclusions are in Sects. 4 and 5, respectively.

2 Problem statement

Consider the damped inverted pendulum mounted on a cart. This system can be described by the following set of normalized differential equations [42]:

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \ddot{x} + \cos \theta \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \sin \theta &= f, \\ \ddot{x} \cos \theta + \ddot{\theta} - \sin \theta &= -d\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{1}$$

where x is the normalized cart displacement, θ , is the angle between the pendulum and the vertical, f is the normalized force applied to the cart, which is also the input to the system, and $\mu > 0$ is a scalar constant dependent on both the cart and pendulum masses. The pendulum viscous friction is considered as a linear function of the angular velocity, $d\dot{\theta}$, with $d \geq 0$.

In this work, the physical parameters μ and d are actually given by [42]:

$$\mu = \frac{M}{m}; \quad d = \frac{\gamma}{mL^{1/2}g^{3/2}},$$

where M and m stand for the cart and pendulum masses, respectively, the pendulum length is L , g is the gravity constant, and γ is the actual dissipation coefficient presented in the non-actuated coordinated θ . The damping force presented in the actuated coordinate is neglected in order to simplify the methodology presented here. It is important to remark that this force can be easily compensated by using any adaptive control algorithm ([20,29]).

The control objective consists of bringing the pendulum to its unstable equilibrium point,

$$p = (\theta = 0, \dot{\theta} = 0, x = 0, \dot{x} = 0),$$

under the following important considerations:

C1) The system is initialized inside of the following set:

$$U = \{(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) : (-\pi/2, \pi/2) \times R^3\}$$

C2) The state variables are available and the parameters are known.

It should be notice that **C1** is not very restrictive, because the pendulum is assumed to be somewhere inside of the upper-half plane; in fact, it can be easily accomplished by using some suitable controller such as those proposed in [26].

Differential equations are understood in the Filippov sense [19] in order to provide for the possibility to use discontinuous signals in controls. Filippov solutions coincide with the usual solutions, when the right-hand sides are Lipschitzian. It is assumed also that all considered inputs allow the existence of solutions and their extension to the whole semi-axis $t \geq 0$.

3 System transformation

After introducing the following feedback law:

$$f = u(\mu + \sin^2 \theta) - d \cos \theta \dot{\theta} - \dot{\theta}^2 \sin \theta + \cos \theta \sin \theta, \tag{2}$$

the system can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin \theta - \cos \theta u - d \dot{\theta}, \\ \ddot{x} &= u, \end{aligned} \tag{3}$$

Now, in order to represent the system (3) as a four-order chain of integrators plus an additional nonlinear perturbation, we define the following new change of coordinates:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right); \quad z_3 = \tan \theta; \\ z_2 &= \dot{x} + \dot{\theta} \sec \theta; \quad z_4 = \dot{\theta} \sec^2 \theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Then, the system (3) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2; \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \alpha(z_3) z_4^2 - d z_4 \beta(z_3); \\ \dot{z}_3 &= z_4; \\ \dot{z}_4 &= v; \end{aligned} \tag{5}$$

where

$$\alpha(z_3) = \frac{z_3}{(1+z_3^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \beta(z_3) = \frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}},$$

and v is the new control variable, defined as:

$$v = \sec^2 \theta (\sin \theta - \cos \theta u - d \dot{\theta}) + 2 \dot{\theta}^2 \sec^2 \theta \tan \theta \tag{6}$$

It is important to remark that:

$$|\alpha(x)| \leq \kappa_0 = \frac{2}{3^{3/2}}; \quad |\beta(x)| \leq 1. \tag{7}$$

Now, to dominate the undesirable term $d\beta(z_3)z_4$, found in the second equation of (5), we use the following change of coordinates and the following scale of time:

$$\begin{aligned} q_1 &= \epsilon^2 z_1; & q_2 &= \epsilon z_2; & q_3 &= z_3; \\ q_4 &= z_4/\epsilon; & \tau &= \epsilon t, \end{aligned} \tag{8}$$

where ϵ is a strictly positive free parameter. Hence, the system (5) can be written in the new coordinates as:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2; \\ \dot{q}_2 &= q_3 + \epsilon q_4 \rho(q); \\ \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= \frac{v}{\epsilon^2} = v_\epsilon, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\rho(q)$ is a vanishing perturbation defined by:

$$\rho(q) = \epsilon \alpha(q_3) q_4 - d \beta(q_3) \tag{10}$$

Here, the symbol “dot” stands for differentiation with respect to the dimensionless time τ . We must underscore that the free parameter, $\epsilon > 0$, can be tuned as desired.

Finally, the above system can be expressed in a compact form as:

$$\dot{q} = f(q) + B v_\epsilon = F(q, v_\epsilon); \tag{11}$$

where $v_\epsilon \in R, q \in R^4$ and $f(q) : R^4 \rightarrow R^4$.

4 Control of the cart pole system

The control law is proposed as:

$$v_\epsilon(q) = v_s(q) + v_e(q),$$

where $v_e(q)$ is a linear controller devoted to bring the states q_3 and q_4 close enough to the origin, and $v_s(q)$ is a bounded controller designed using the twisting sliding mode algorithm.

The linear control part of the controller, v_e , is selected as:

$$v_e = -\frac{k_1 q_3 + k_2 q_4}{k_3}; \tag{12}$$

Let us introduce the following auxiliary variables:

$$\begin{aligned} s_1 &= k_1 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 + (k_3 + k_2) q_3 + k_3 q_4; \\ s_2 &= k_1 q_2 + k_2 q_3 + k_3 q_4; \end{aligned} \tag{13}$$

where the set of constants $k_i > 0$ should be selected such that they satisfy the following:

$$\begin{aligned} k_2 &> 1/2 + \lambda_1 \epsilon^2 (k_2 + k_1) \kappa_0 + \delta_1; \\ \lambda_1^2 &> \lambda_2^2 + 2 \lambda_1 \epsilon d (k_2 + k_1) \bar{q}_4 + \delta_2; \\ \lambda_2 &> k_1 \left(\kappa_0 \epsilon^2 \bar{q}_4^2 + \epsilon d \bar{q}_4 \right) + \delta_3; \end{aligned} \tag{14}$$

where $\delta_i > 0, i = \{1, 2, 3\}$.¹ The inequities in (14) are referred to in the sequel as assumption **A1**. Let us

¹ With $\bar{q}_4 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{k_2}$ and δ_i can be fixed as needed inside of a suitable range.

propose v_s as a discontinuous injection based on the twisting control algorithm [28, 34–36]. That is,

$$v_s = -\frac{1}{k_3} (\lambda_1 \operatorname{sgn}[s_1] + \lambda_2 \operatorname{sgn}[s_2]) = -\frac{v_s}{k_3}; \quad (15)$$

where $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Let us synthesize the main result of this work in the following theorem:

Theorem 1 Consider the system (9) in closed-loop with:

$$v = -\frac{1}{k_3} (k_1 q_3 + k_2 q_4 + \lambda_1 \operatorname{sig}[s_1] + \lambda_1 \operatorname{sig}[s_2]),$$

where

$$s_1 = k_1 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 + (k_3 + k_2) q_3 + k_3 q_4;$$

$$s_2 = k_1 q_2 + k_2 q_3 + k_3 q_4.$$

Under the assumption that the control parameters $k_i > 0$; with $i = \{1, 2, 3\}$ and $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, satisfy the inequalities in (14), then the closed-loop system is asymptotically stable. In particular, the variables s_1 converge to zero in finite time.

Proof Following the application of the linear control, and after some simple algebra, the dynamics of s_1 and s_2 become:

$$\dot{s}_1 = s_2 + (k_1 + k_2) \epsilon q_4 \rho(q) + k_3 v_s;$$

$$\dot{s}_2 = k_1 \epsilon q_4 \rho(q) + k_3 v_s. \quad (16)$$

Then, the system composed by (16) and the last two equations of (9) reads as:

$$\dot{s}_1 = s_2 + \epsilon q_4 \rho(q) (k_1 + k_2) + k_3 v_s,$$

$$\dot{s}_2 = \epsilon q_4 \rho(q) k_1 + k_3 v_s$$

$$\dot{q}_3 = q_4,$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{k_3} (k_1 q_3 + k_2 q_4) + v_s; \quad (17)$$

To be able to carry out the convergence analysis, we analyze the boundedness of the states q_3 and q_4 , when the system (17) is feedback by the twisting controller, to assure the boundedness of the vanishing nonlinear perturbation $\rho(q)$. That is, the system (17), in closed-loop with (15), reads as

$$\dot{s}_1 = s_2 + \epsilon q_4 \rho(q) (k_1 + k_2) - v_s,$$

$$\dot{s}_2 = k_1 \epsilon q_4 \rho(q) - v_s$$

$$\dot{q}_3 = q_4,$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{k_3} (k_1 q_3 + k_2 q_4) - \frac{1}{k_3} v_s \quad (18)$$

where

$$v_s = \lambda_1 \operatorname{sig}[s_1] - \lambda_2 \operatorname{sig}[s_2].$$

Before formally presenting the corresponding proof, we introduce the following auxiliary lemma:

Lemma 1 Consider the following second order system:

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = -k_p x - k_d y + v;$$

where the set of constants $k_i > 0$, for $i = \{p, d\}$, with $|v| \leq \bar{v}$. Then, there exists a finite time, $t_0 > 0$, such that:

$$|x| \leq \frac{\bar{v} + \delta_0}{k_p}; \quad |y| \leq \frac{\bar{v} + \delta_0}{k_d}; \quad \forall t \geq t_0,$$

where $\delta_0 > 0$ is sufficiently small. The proof of this lemma is omitted due to its obviousness.

According to this lemma, the last two equations of (17) satisfy the following inequality:

$$|q_3| \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta_0}{k_1}; \quad |q_4| \leq \bar{q}_4 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta_0}{k_2}; \quad \forall t \geq t_0, \quad (19)$$

where t_0 is a finite period of time and δ_0 is a small positive constant. That is, q_3 and q_4 are bounded after $t \geq t_0$. This fact assures that the proposed closed-loop system is Lipschitzian, implying that the states s_1 and s_2 remain bounded during a finite time. Hence, the finite time of escape does not exist—see [24]. On the other hand, from the relations (7) and (10), the inequality,

$$|\rho(q)| \leq \kappa_0 \epsilon |q_4| + d; \quad \forall t \geq t_0, \quad (20)$$

is fulfilled. Having shown that q_3 and q_4 are uniformly bounded after some finite time, we are in a position to finally perform the convergence analysis of the whole system, using a continuous and differentiable almost everywhere Lyapunov function. Before to proceeding, we must remember that these kinds of Lyapunov functions have been introduced since the late nineties to prove the stability of discontinuous systems and systems with solutions intended in Filippov’s sense—see for example, [10–12]. Let us introduce our Lyapunov function, as:

$$V_T(p) = \frac{k_1}{2k_3} q_3^2 + \frac{1}{2} q_4^2 + \frac{\lambda_1}{k_3} |s_1| + \frac{1}{2k_3} s_2^2; \quad (21)$$

with the vector state $p = (s_1, s_2, q_3, q_4)$, whose time derivative around the trajectories of the system (17) is almost everywhere given by:

$$\dot{V}_T(p) = -\frac{k_2}{k_3}q_4^2 + \frac{1}{k_3}q_4v_s + \overbrace{\frac{\lambda_1}{k_3}\text{sgn}[s_1]\dot{s}_1 + \frac{1}{k_3}s_2\dot{s}_2}^{W(p)}. \tag{22}$$

Notice that the derivative of the Lyapunov function (21) exists for all s_1 values except the set of measure zero given by $s_1 = 0$. Notice that $W(p)$ can be expressed after using (16), as follows:

$$W(p) = \frac{\lambda_1}{k_3}(k_2 + k_1)\text{sgn}[s_1]\rho(q)\epsilon + \frac{k_1}{k_3}s_2\rho(q)\epsilon - \frac{\lambda_1^2}{k_3} - \frac{\lambda_1\lambda_2\text{sgn}[s_1]\text{sgn}[s_2]}{k_3} - \frac{\lambda_2}{k_3}|s_2|.$$

By using the inequality $|q_4v_s| \leq (q_4^2 + v_s^2)/2$, we have that (22) can be upperbounded, as:

$$\dot{V}_T(p) \leq -\left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{1}{2k_3}\right)q_4^2 - \frac{v_s^2}{2k_3} + W(p). \tag{23}$$

It is easy to see, after some simple algebra that the following inequality

$$\frac{v_s^2}{2k_3} + W(p) \leq -\frac{\lambda_1^2}{2k_3} - \frac{\lambda_2}{k_3}|s_2| + \frac{1}{2k_3}\lambda_2^2 + \frac{k_1}{k_3}|s_2|\epsilon\bar{q}_4\bar{\rho} + \frac{\lambda_1}{k_3}(k_2 + k_1)(\kappa_0\epsilon^2q_4^2 + \epsilon d\bar{q}_4) \tag{24}$$

holds, for all $t \geq t_0$; where for simplicity, we introduce, $\bar{\rho}$, such that²

$$|\rho(q)| \leq \bar{\rho} = \kappa_0\epsilon\bar{q}_4 + d. \tag{25}$$

After substituting (24) into the relation (23), we obtain the following inequality:

$$\begin{aligned} \dot{V}_T(p) \leq & -\left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{1}{2k_3} - \frac{\lambda_1}{k_3}\epsilon^2(k_2 + k_1)\kappa_0\right)q_4^2 \\ & - \frac{1}{2k_3}\lambda_1^2 + \frac{1}{2k_3}\lambda_2^2 + \frac{\lambda_1d}{k_3}\epsilon(k_2 + k_1)\bar{q}_4 \\ & - |s_2|\left(\frac{\lambda_2}{k_3} - \frac{k_1}{k_3}\epsilon\bar{q}_4\bar{\rho}\right). \end{aligned}$$

Then, according to the conditions in assumption **A1**, we have that after a finite time $t \geq t_0$, the following inequity is fulfilled:

$$\dot{V}_T(p) \leq -\frac{\delta_1}{k_3}q_4^2 - \frac{\delta_2}{2k_3} - \frac{\delta_3}{k_3}|s_2|. \tag{26}$$

From the above, it follows that $V_T(p) < V_T(p(0))$ and, from its own definition, $V_T(t)$ is radially bounded

² Notice that by definition

$$|\rho(q)| \leq \kappa_0\epsilon|q_4| + d \leq \kappa_0\epsilon\bar{q}_4 + d; \forall t \geq t_0.$$

and differentially everywhere, except when $s_1 = 0$. Consequently, the vector state p is bounded. On the other hand, as V_T is bounded from below, with strictly negative definite time derivative, then V converges and p has a limit. Also, \dot{p} is bounded, according to (18). That is, p is uniformly continuous. Now, integrating both sides of the last inequity and using simple algebra, we can claim that the following inequity:

$$\frac{\delta_1}{k_3} \int_{t_0}^t q_4^2(s)ds + \frac{\delta_3}{k_3} \int_{t_0}^t |s_2(s)| ds < V_T(p(t_0)), \tag{27}$$

holds, for $t > t_0$. It implies that the signals s_2 and q_4 are, respectively, L_1 and L_2 . According to Barbalat's lemma, we have that $s_2 \rightarrow 0$ and $q_4 \rightarrow 0$, as long as $t \rightarrow \infty$. We proceed to show that s_1 converges to zero, in a finite time. So, as the values of $|s_2|$ and $|q_4|$ decreasing continuously toward the origin, always exists a finite time $t_1 > 0$ and a constant $\mu > 0$, such that, $\lambda_1 > |\Delta(q(t))| + \mu$, for all $t > t_1$, where:

$$\Delta(q(t)) = s_2 + \epsilon q_4\rho(q)(k_1 + k_2) - \lambda_2\text{sgn}[s_2], \tag{28}$$

because $\lambda_1 \gg \lambda_2$. Hence, the first equation of (18) can be read, as:

$$\dot{s}_1 = -\lambda_1\text{sgn}[s_1] + \Delta(q); \quad t > t_1. \tag{29}$$

Evidently, the dynamics of s_1 coincides with the dynamics of a first-order sliding mode.

To see the convergence of s_1 , we propose $V_1 = s_1^2/2$. According to (28), we have:

$$\dot{V}_1 \leq -\mu|s_1|; \quad t > t_1.$$

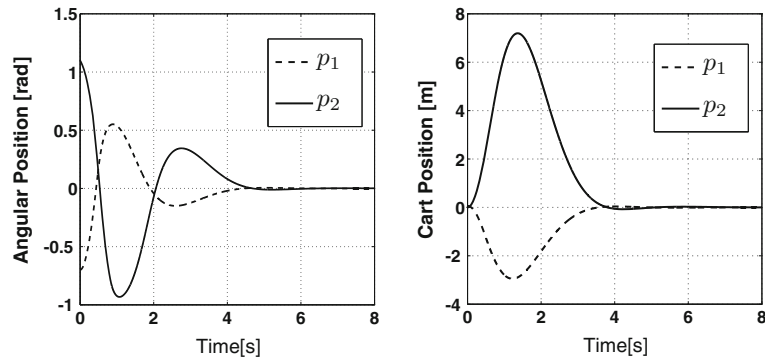
From the above inequity, we conclude that $s_1 \rightarrow 0$, in a finite time. That is, there is a time $t_2 > t_1$, such that, $s_1(t) \rightarrow 0$, as long as $t > t_2$. To prove that q_3 converges to zero, we introduce the following auxiliary variable $z = k_3q_4 + k_2q_3 - s_2$, whose time derivative can be written, after using simple algebra, as:

$$\dot{z} = -\frac{k_1}{k_2}(z - k_3q_4 + s_2) - k_1\epsilon q_4\rho(q). \tag{30}$$

According to (20) and the fact that $s_1 \rightarrow 0$ and $q_4 \rightarrow 0$, the last differential equation turns out to be $\dot{z} = -k_1z/k_2$. It implies that $z \rightarrow 0$ and $q_3 \rightarrow 0$. Therefore, the closed-loop system (18) asymptotically converges to the origin, if the control gains are selected according with **A1**.

Remark 1 The function V_T is continuous but not locally Lipschitz. Therefore, the usual version of the traditional Lyapunov theorem cannot be applied [10, 17]. However, it can be shown that function $V_T(p)$ is

Fig. 1 Closed-loop responses for two initial conditions (p_1, p_2), and a partial knowledge of 85% of the damping force



absolutely continuous along the trajectories of the closed-loop equation (17), implying that $V_T(p)$ is differentiable almost everywhere, monotone decreasing and converges to zero. These are the conditions needed by the theorem of Zubov [28,37].

Remark 2 Should the damping parameter d be very large, assumption **A1** becomes a strong condition, because assuring the positiveness of constants δ_i and k_i , $i = \{1, 2, 3\}$, in a way that the inequities in (14) hold, needs the parameter ϵ to be sufficiently small, which converts the controller into a high-gain controller—see (9). Another way to see it is that when the damping force is very strong, strong control actions must be taken.

It is important to note that the proposed controller has a very simple structure and does not presents singularities, if the system is initialized inside of the upper-half plane.

Tuning the control parameters The correct performance of the control strategy requires control parameters tuning according to the restriction (23). To illustrate this tuning, we fix the pendulum length, mass, and damping as $L = 0.35$ (m), $m = 0.250$ (Kg), and $\gamma = 4$ (kgm²/s), respectively. Then, according to the expression given in comment **C1**, the normalized damping coefficient is $d = 0.9$. Now, fixing the control gains as $k_1 = 0.9, k_2 = 3.5, k_3 = 4, \lambda_1 = 6$, and $\lambda_2 = 0.8$, and setting the rescale parameter as $0 < \epsilon < 0.404$, it is easy to see in a plot that the inequities in (14) hold.

Summarizing Given $d > 0$ and $\delta_i \approx 0.1$, we need to find an admissible parameter vector

$$Q = (k_1, k_2, k_3, \lambda_1, \lambda_2, \epsilon) \in R_+^6$$

fulfilling the restrictions given in (23). This problem can be solved using any numerical optimization program.

5 Numerical simulations

In order to verify the proposed controller performance, we carried out some numerical simulations, where the above proposed control gains were used, with $\epsilon = 0.4$. To make this experiment more interesting, we assume that the knowledge of the damping force has an accuracy of 85%. We ran two experiments with their own different initial conditions. The obtained closed-loop responses for $p_1 = (\theta(0) = 1.2(\text{rad}), \dot{\theta}(0) = -0.1(\text{rad/s}), x = 0, \dot{x} = 0)$ and $p_2 = (\theta(0) = -0.7[\text{rad}], \dot{\theta}(0) = 0, x = 0.2(\text{m/s}), \dot{x} = 0)$ are shown in Fig. 1, where p_i correspond to $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$. As we can see, the control strategy is able to render the system to the origin after 7(s) elapsed, even when the value of the damping coefficient, d , is partially known.

To provide an idea of how good the proposed control strategy **OC** is, we compared it with the control technique proposed by Riachy et al. in [35], here referred to as **RC**. The control parameters of **RC** were tuning heuristically, but to be fair, we tried to find the values that enable the best transient response. The initial conditions were fixed as $(\theta = 0.9, 0, 0, 0)$. The obtained results are shown in Fig. 2, where we can see that the closed-loop response of the propose control strategy is as good as the responses of **RC**. Furthermore, we can see that our strategy presents a better behavior in the angular variable, if compared with the **RF** strategy. However, the cart displacements in our strategy are larger that those in **RC**. Please keep in mind that this is a numeric comparison, a formal comparison is beyond the scope of this work, as is a comparative study between our control strategy and others found in the literature. We must underscore that all the simulations were carried out in the actual coordinates of the pendulum system. Finally, Fig. 3

Fig. 2 Comparison between the closed-loop responses of the OC and the RC strategies, represented with a solid line and a dotted line, respectively

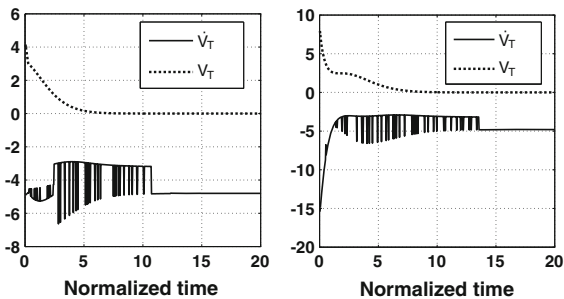
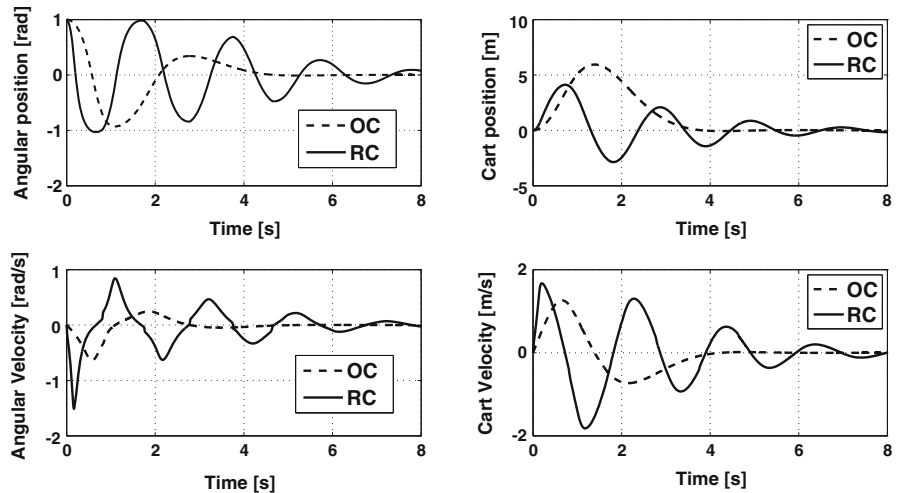


Fig. 3 Asymptotic behavior of V_T and \dot{V}_T , for the initial conditions: $(s_1 = 1, s_2 = 0, q_3 = -5, q_4 = 1)$ and $(s_1 = 0, s_2 = 0, q_3 = 1, q_4 = 4)$. The plot on the left side corresponds to the first initial conditions, and the one on the right side to the second initial conditions

shows numerically the asymptotic behavior the Lyapunov function $V_T(p)$, and its derivative. To this experiment, we used the same setup as before, but normalized time, and the following two different sets of initial conditions: $(s_1 = 1, s_2 = 0, q_3 = -5, q_4 = 1)$ and $(s_1 = 0, s_2 = 0, q_3 = 1, q_4 = 4)$. The numerical simulations shown in this figure are the expect results, because V_T converges asymptotically to zero and \dot{V}_T is always strictly negative, with \dot{V}_T tends to -4.9 .

6 Conclusions

In this work, we introduced a control strategy, based on a PD controller in conjunction with a twisting-like algorithm, to solve the stabilization of the damped cart pole system, assuming that the pendulum is initialized

somewhere inside of the upper-half plane. To this end, we first used some nonlinear transformations over the original pendulum system to express it as a four-order chain of integrators, with an additional perturbation that vanishes at the origin. The PD controller was designed to bring the pendulum position and its velocity inside of a compact region simultaneously. At the same time, the twisting-like algorithm renders the whole system state to the origin. For the convergence analysis, we used several Lyapunov functions, thereby assuring that our strategy converges asymptotically once the pendulum position and its velocity are inside of the compact region. The effectiveness and robustness of the strategy was tested running numerical simulations, where uncertainties in the parameters' values were included. The obtained results allow us to claim that the performance of our controller is satisfactory.

Acknowledgments This research was supported by the Centro de Investigación en Computación of the Instituto Politécnico Nacional (CIC-IPN), by the Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME-IPN), by the Secretaría de Investigación y Posgrado of the Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN), under Research Grants 20144330 and 20141003, and by the mexican CONACyT under grant 151855. Carlos Aguilar-Ibanez wants to express its gratitude to the reviewer because their comments help to greatly improve this work. Also, he thanks to Dr. Fernando Castaños for the time devoted to discuss key issues of this study, resulting in considerable technical improvements to it.

Open Access This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License which permits any use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and the source are credited.

References

1. Abedinnasab, M.H., Yoon, Y.J., Saeedi-Hosseiny, M.S.: High performance fuzzy-padé controllers: introduction and comparison to fuzzy controllers. *Nonlinear Dyn.* **71**(1–2), 141–157 (2013)
2. Acosta, J., Ortega, R., Astolfi, A., Sarras, I.: A constructive solution for stabilization via immersion and invariance: the cart and pendulum system. *Automatica* **44**(9), 2352–2357 (2008)
3. Acosta, J.A., Ortega, R., Astolfi, A., Mahindrakar, A.D.: Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *IEEE Trans. Autom. Control* **50**(12), 1936–1955 (2005)
4. Aguilar-Ibáñez, C.F., Gutiérrez-Frias, O.O.: Controlling the inverted pendulum by means of a nested saturation function. *Nonlinear Dyn.* **53**(4), 273–280 (2008)
5. Aguilar-Ibáñez, C.F., Gutiérrez-Frias, O.O.: A simple model matching for the stabilization of an inverted pendulum cart system. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **18**(6), 688–699 (2008)
6. Aguilar-Ibáñez, C., Sossa-Azuela, J.H.: Stabilization of the furuta pendulum based on a lyapunov function. *Nonlinear Dyn.* **49**(1–2), 1–8 (2007)
7. Almutairi, N.B., Zribi, M.: On the sliding mode control of a ball on a beam system. *Nonlinear Dyn.* **59**(1–2), 221–238 (2010)
8. Aracil, J., Gordillo, F., Astrom, K.J.: A family of pumping–damping smooth strategies for swinging up a pendulum. In: *Third IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*. Negoya, Japan (2006)
9. Aström, K.J., Aracil, J., Gordillo, F.: A family of smooth controllers for swinging up a pendulum. *Automatica* **44**(7), 1841–1848 (2008)
10. Bacciotti, A., Ceragioli, F.: Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth lyapunov functions. *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.* **4**, 361–376 (1999)
11. Bacciotti, A., Ceragioli, F.: Nonpathological lyapunov functions and discontinuous carathéodory systems. *Automatica* **42**(3), 453–458 (2006)
12. Bacciotti, A., Rosier, L.: *Liapunov functions and stability in control theory*. Commun. Control Eng. Springer, Berlin (2001)
13. BenAbdallah, A., Mabrouk, M.: Semi-global output feedback stabilization for the cart-pendulum system. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, vol. 50. December 12–15, 2011, Orlando, FL, USA (2011)
14. Bloch, A.M., Chang, D., Leonard, N., Marsden, J.E.: Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: potential shaping. *IEEE Trans. Autom. Control* **46**(10), 1556–1571 (2001)
15. Chung, C.C., Hauser, J.: Nonlinear control of a swinging pendulum. *Automatica* **31**(6), 851–862 (1995)
16. Dávila, A., Moreno, J.A., Fridman, L.: Optimal lyapunov function selection for reaching time estimation of super twisting algorithm. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 Held Jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009*, pp. 8405–8410. IEEE (2009)
17. Edwards, C., Spurgeon, S.: *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. CRC Press, Cleveland (1998)
18. Fantoni, I., Lozano, R.: *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Communications and Control Engineering. Springer, London (2002)
19. Filippov, A.F.: *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, vol. 18. Springer, Berlin (1988)
20. García-Alarcón, O., Puga-Guzan, S., Moreno-Valenzuela, J.: On parameter identification of the furuta pendulum. *Procedia Eng.* **35**, 77–84 (2012)
21. Gomez-Estern, F., Van der Schaft, A.J.: Physical damping in ida-pbc controlled underactuated mechanical systems. *Eur. J. Control* **10**(Special Issue on Hamiltonian and Lagrangian Methods for Nonlinear Control), 451–468 (2004)
22. Gordillo, F., Aracil, J.: A new controller for the inverted pendulum on a cart. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **18**(17), 1607–1621 (2008). doi:10.1002/rnc.1300
23. Jakubczyk, B., Respondek, W.: On the linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Math.* **28**, 517–522 (1980)
24. Khalil, H.K.: *Nonlinear Systems*, 2nd edn. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1996)
25. Lozano, R., Fantoni, I., Block, D.J.: Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Syst. Control Lett.* **40**(5), 197–204 (2000)
26. Lozano, R., Fantoni, I., Block, D.J.: Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Syst. Control Lett.* **40**(3), 197–204 (2000)
27. Martínez, R., Álvarez, J.: A controller for 2-dof underactuated mechanical systems with discontinuous friction. *Nonlinear Dyn.* **53**(3), 191–200 (2008)
28. Moreno, J.A.: A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. In: *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE. IEEE*, pp. 1–6 (2009)
29. Moreno-Valenzuela, J., Kelly, R.: A hierarchical approach to manipulator velocity field control considering dynamic friction compensation. *J. Dyn. Syst. Meas. Control* **128**(3), 670–674 (2006)
30. Olfati-Saber, R.: Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole and rotating pendulum. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2. Phoenix Az., pp. 1174–1181 (1999)
31. Ordaz-Oliver, J.P., Santos-Sánchez, O.J., López-Morales, V.: Toward a generalized sub-optimal control method of underactuated systems. *Optim. Control Appl. Methods* **33**(3), 338–351 (2011)
32. Ortega, R., Garcia-Canseco, E.: Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey. *Eur. J. Control* **10**(5), 432–450 (2004)
33. Pilipchuk, V.N., Ibrahim, R.A.: Dynamics of a two-pendulum model with impact interaction and an elastic support. *Nonlinear Dyn.* **21**(3), 221–247 (2000)
34. Polyakov, A., Poznyak, A.: Reaching time estimation for super-twisting second order sliding mode controller via lyapunov function designing. *IEEE Trans. Autom. Control* **54**(8), 1951–1955 (2009)

35. Riachy, S., Orlov, Y., Floquet, T., Santiesteban, R., Richard, J.P.: Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems I: local stabilization with application to an inverted pendulum. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **18**(4–5), 529–543 (2008)
36. Santiesteban, R., Floquet, T., Orlov, Y., Riachy, S., Richard, J.P.: Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems II: orbital stabilization of an inverted pendulum with application to swing up/balancing control. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **18**(4–5), 544–556 (2008)
37. Santiesteban, R., Fridman, L., Moreno, J.A.: Finite-time convergence analysis for twisting controller via a strict Lyapunov function. In: 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS), pp. 1–6. IEEE (2010)
38. Saranlı, U., Arslan, Ö., Ankaralı, M.M., Morgül, Ö.: Approximate analytic solutions to non-symmetric stance trajectories of the passive spring-loaded inverted pendulum with damping. *Nonlinear Dyn.* **62**(4), 729–742 (2010)
39. Semenov, M.E., Shevlyakova, D.V., Meleshenko, P.A.: Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions. *Nonlinear Dynamics* pp. 1–10 (2013). doi:[10.1007/s11071-013-1062-x](https://doi.org/10.1007/s11071-013-1062-x)
40. She, J., Zhang, A., Lai, X., Wu, M.: Global stabilization of 2-dof underactuated mechanical systems an equivalent-input-disturbance approach. *Nonlinear Dyn.* **69**(1–2), 495–509 (2012)
41. Shiriaev, A.S., Pogromsky, A., Ludvigsen, H., Egeland, O.: On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **10**(4), 283–300 (2000)
42. Sira-Ramirez, H., Agrawal, S.K.: *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York (2004)
43. Spong, M.W.: Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. In: IFAC World Congress. San Francisco CA (1996)
44. Spong, M.W., Praly, L.: *Coordinated-Science, Centre-Automatique: Control of Underactuated Mechanical Systems Using Switching and Saturation*. Springer, Berlin (1996)
45. Udhayakuma, K., Lakshmi, P.: Design of robust energy control for cart-inverted pendulum. *Int. J. Eng. Technol.* **4**(1), 66–76 (2007)
46. Weibel, S., Kaper, T., Baillieul, J.: Global dynamics of a rapidly forced cart and pendulum. *Nonlinear Dyn.* **13**(2), 131–170 (1997)
47. Woolsey, C., Bloch, A.M., Leonard, N.E., Marsden, J.E.: Physical dissipation and the method of controlled lagrangians. In: Proc. Eur. Control Conf., pp. 2570–2575. Port, Portugal (2001)