



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
COMPUTACIÓN

*Memorias Asociativas
en álgebra min y max
robustas a ruido
mezclado*

Julio César Salgado Ramírez

Doctorado en Ciencias de la Computación

Mayo 2011

Director de Tesis: Dr. Juan Luis Díaz de León Santiago



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 13:00 horas del día 16 del mes de Diciembre de 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

Centro de Investigación en Computación

para examinar la tesis titulada:

"MEMORIAS ASOCIATIVAS EN ÁLGEBRA MIN Y MAX ROBUSTAS A RUIDO MEZCLADO"

Presentada por el alumno:

SALGADO

Apellido paterno

RAMÍREZ

Apellido materno

JULIO CÉSAR

Nombre(s)

Con registro:

A	0	5	1	0	5	8
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Juan Luis Díaz de León Santiago

Dr. Cornelio Yañez Márquez

Dr. Oscar Camacho Nieto

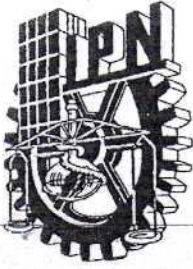
Dra. María Elena Acevedo Mosqueda

Dr. Jesús Guillermo Figueroa Nazuno

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Luis Alfonso Villa Vargas

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACION
EN COMPUTACION
DIRECCION



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, DF el día 8 del mes FEBRERO del año 2011, el (la) que suscribe JULIO CÉSAR SALGADO RAMÍREZ alumno (a) del Programa de DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN con número de registro A051058, adscrito a CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de DR. JUAN LUIS DIAZ DE LEÓN SANTIAGO y cede los derechos del trabajo intitulado MEMORIAS ASOCIATIVAS EN ÁLGEBRA MIN Y MAX ROBUSTAS AL RUIDO MEZCLADO, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección julio-cesar-salgado@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

JULIO CÉSAR SALGADO RAMÍREZ

Nombre y firma

Resumen.

El presente trabajo de tesis muestra un nuevo modelo de memoria heteroasociativa min robusta al ruido mezclado; este modelo se basa en la obtención de un kernel que cumple con las condiciones suficientes para garantizar la recuperación completa de patrones. La creación del kernel se basa en el conocimiento de la distribución real del ruido de adquisición en imágenes binarias y en tonos de gris; como este tipo de ruido, es mezclado y se distribuye por los bordes de la imagen (esto se demuestra en esta tesis), la transformada de distancia permite medir qué tanto el ruido se aleja o se acerca de los bordes; por lo tanto, la transformada de distancia permite construir un kernel. Este trabajo, además, presenta una forma ingeniosa de modelar el ruido de adquisición a través de la transformada rápida de distancia y muestra probabilísticamente cómo un kernel, aunque sea afectado con ruido, es capaz de recuperar completamente los patrones aprendidos, situación que no permite el modelo original propuesto por Ritter, Sussner y Díaz de León.

Abstract.

The current thesis work shows a new model of robust heteroassociative min to mixed noise; this model is based on the getting of a kernel which successfully fulfills enough conditions to guarantee the complete recovery of patterns. The creation of this kernel is based on the knowledge of distribution of real noise acquired in binarial and gray toned images; since this kind of noise is mixed and distributed by the image borders (shown in the current work), the distance transformation allows us to measure how far or close a noise gets to the borders; thus this distance transformation allows the construction of a kernel. This work, besides, presents a genius way to model the noise acquisition through this fast process, and shows probabilistically how a kernel, even affected by a noise, is able to recover the learned patterns, which the original model proposed by Ritter, Sussner and Díaz de León is unable to perform.

Agradecimientos.

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)*, porque este trabajo de tesis no habría sido posible sin el apoyo de esta gran Institución, porque al becarme, propició haber dedicado mucho tiempo para alcanzar esta gran meta.

A *Jehová* mi DIOS por haberme dado vida, tiempo, fuerzas, una familia que me quiere y grandes amigos. Gracias mi DIOS.

A *Sussan*, en verdad, gracias por todo el tiempo que me apoyaste. Fueron momentos difíciles, momentos en los que tuvimos que sacrificar mucho por terminar este trabajo, sin embargo, se ha terminado. Tú fuiste mis cimientos y mi refugio en todo este tiempo. Este logro no es mío, sino de los dos. Gracias amor por esto.

A *Alexis*, hijo, gracias porque me comprendiste al no salir a jugar contigo a la pelota mientras estaba escribiendo este trabajo, no sólo eso, me diste tu apoyo y tu cariño. Gracias hijo.

A mis amigos *Rafa* y *Vale*, sé que sólo me quitaron el tiempo, pero fue bueno, porque en esos momentos me dieron ideas nuevas. Gracias

Mil gracias *Dr. Juan Luis Díaz de León* por haberme dirigido todo este tiempo, no sólo eres mi maestro, sé que eres mi amigo y por eso te doy las gracias.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Objetivo	8
1.2. Motivación	9
1.3. Planteamiento del problema	11
1.4. Contribuciones	12
1.5. Organización de la tesis	12
2. Antecedentes y Estado del Arte	14
2.1. Antecedentes	14
2.1.1. Ruido	14
2.1.2. Memorias Asociativas	19
2.2. Estado del Arte	32
3. Marco teórico	37
3.1. Espacios métricos	37
3.1.1. Métricas	37
3.2. Transformada de distancia	38
3.2.1. Transformada rápida de distancia	40
4. Desarrollo	44
4.1. Ruido	44
4.1.1. Algoritmos de distribución de ruido obtenido por los medios de adquisición en imágenes binarias y tonos de gris basándose en Transformada de Distancia	45
4.1.2. Función de probabilidad de ruido	53
4.2. Kernel Optimal basado en la TRD	56
4.2.1. Generación del kernel para imágenes binarias	56
4.2.2. Generación del kernel para imágenes en tonos de gris	57
4.3. Nuevo Modelo de Memoria Heteroasociativas en Álgebra min y max robusta al ruido mezclado	57
4.3.1. Modelo genérico de memoria heteroasociativa basada en álgebra min robusta a ruido mezclado	57
4.3.2. Nuevo modelo genérico de memorias heteroasociativas min robusta a ruido mezclado	62

5. Disquisiciones Experimentales	65
5.1. Distribución de ruido adquirido	65
5.1.1. Distribución en imágenes binarias	65
5.1.2. Distribución en imágenes de tonos de gris	75
5.2. Kernel con condiciones suficientes	82
5.3. Nuevo modelo de memorias heteroasociativas basadas en álgebra min y max	89
6. Conclusiones y trabajos futuros	96
6.1. Conclusiones	96
6.2. Trabajos futuros	97
A. Condiciones de convergencia para las memorias asociativas min robustas al ruido sustractivo	98
B. Tablas de variaciones en la adquisición de datos entre escáners	103

Índice de tablas

5.1.	Tabla de distribución absoluta y relativa donde el ruido de adquisición afecta a imágenes binarias.	84
5.2.	Tabla de distribución de frecuencias absolutas y relativas donde el ruido de adquisición afecta a imágenes binarias.	85
5.3.	Tabla <i>A</i> de distribución de probabilidades de ruido de adquisición en imágenes en tonos de gris.	87
5.4.	Tabla <i>B</i> de distribución de probabilidades de ruido adquisición en imágenes en tonos de gris.	88
5.5.	porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 1 (imágenes binarias de 50x50) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.	91
5.6.	porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 2 (imágenes en tonos de gris de 50x50) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.	91
5.7.	porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 3 (imágenes binarias de 80x80) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.	92
5.8.	porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 4 (imágenes en tonos de gris de 80x80) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.	93
5.9.	porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 5 (imágenes binarias de 120x120) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.	94
5.10.	porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 6 (imágenes en tonos de gris de 120x120) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.	94
B.1.	Porcentaje de variación entre imágenes por número de escaneos e impresiones de las 25 imágenes binarias obtenidas por los escáners HP y LM	104
B.2.	Máximos y mínimos de variación entre imágenes por número de escaneos e impresiones de 20 imágenes en tonos de gris en HP	105
B.3.	Máximos y mínimos de variación entre imágenes por número de escaneos e impresiones de 20 imágenes en tonos de gris en LM	106
B.4.	Promedios de máximos y mínimos mostrados en las tablas B.2 y B.3. .	107

Índice de figuras

2.1. Ruidos: Guassiano, Rayleigh y Gamma en ese orden.	16
2.2. Ruidos: Exponencial, Uniforme y Sal y Pimienta, en ese orden.	18
2.3. Imagen original e imágenes corrompidas con ruido aditivo, sustractivo y mezclado, en ese orden.	19
2.4. Memoria Asociativa vista como una caja negra.	19
2.5. Fase de aprendizaje del modelo kernel.	34
2.6. Fase de recuperación del modelo kernel.	34
2.7. Fase de Aprendizaje del modelo heurístico.	35
2.8. Fase de recuperación del modelo heurístico.	35
3.1. Representación de métricas discretas	38
3.2. Transformada de distancia	39
3.3. Conjunto de métricas para el barrido de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo del algoritmo de la TRD.	41
3.4. Conjunto de métricas para el barrido de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda del algoritmo de la TRD.	41
3.5. resultado del algoritmo de la TRD	42
4.1. Esquema que ilustran el algoritmo 4.1.	47
4.2. Esquema que ilustran el algoritmo 4.2.	50
4.3. Esquema que ilustran el algoritmo 4.3.	51
4.4. Esquema que ilustran el algoritmo 4.4.	53
4.5. Esquema de ruido.	54
4.6. Patrón recuperado conservando porcentajes de ambos ruidos.	62
4.7. Proceso de aprendizaje del nuevo modelo de memorias heteroasociativas min robustas a ruido mezclado.	63
4.8. Proceso de recuperación del nuevo modelo de memorias heteroasociativas min robustas a ruido mezclado.	64
5.1. Escaneos con la imagen de cráneos	67
5.2. Algunas de las imágenes binarias usadas para determinar la distribución del ruido en medios de adquisición.	68
5.3. Distribución de ruido por número de escaneos basados en la TRD del inciso <i>a</i> de la figura 5.2.	68
5.4. Distribución del ruido en la imagen de la escultura egipcia después de 4 escaneos en HP.	69

5.5. Distribución del ruido en la imagen de escultura romana después de 4 escaneos en HP.	70
5.6. Distribución del ruido en la imagen de Susana después de 4 escaneos en HP.	70
5.7. Distribución del ruido en la imagen de la calavera después de 4 escaneos en HP.	71
5.8. Distribución del ruido en la imagen de la escultura egipcia después de 4 escaneos en LM.	71
5.9. Distribución del ruido en la imagen de la escultura romana después de 4 escaneos en LM.	72
5.10. Distribución del ruido en la imagen de Susana después de 4 escaneos en LM.	73
5.11. Distribución del ruido en la imagen de la calavera después de 4 escaneos en LM.	73
5.12. Resultado después de aplicar el algoritmo que simula la generación de ruido en los bordes; con 15 % de ruido	74
5.13. Distribución de probabilidad de ruido simulado en imágenes binarias	74
5.14. Algunas de las imágenes en tono de gris usadas para determinar la distribución del ruido en medios de adquisición.	77
5.15. Apariencia de las imágenes en tono de gris de la figura 5.14 después de 5 escaneos.	77
5.16. Imágenes binarias que muestran visualmente la cantidad de ruido aditivo (color negro) y de ruido sustractivo (color blanco).	78
5.17. Imagen en tonos de gris de Ashlynn vista como una sábana tridimensional	78
5.18. Distribución real del ruido en los medios de adquisición en imágenes en tonos de gris.	79
5.19. Distribución real de ruido de adquisición en la imagen de Ashlynn donde la mayor concentración de éste es cercana a la distancia 0.	80
5.20. Distribución real del ruido en la imagen de Alexis donde la mayor concentración de la distribución de éste es cercana a la distancia 0.	80
5.21. Distribución real del ruido en la imagen de Ashlynn, de cuerpo completo, donde la mayor concentración de la distribución de éste es cercana a la distancia 0.	81
5.22. Comparativa de distribución real del ruido en HP con LM de la imagen de dragón.	81
5.23. Distribuciones de ruido de la misma imagen con diferentes tamaños.	85
5.24. Imágenes (renglón 1) y sus kernels (renglón 2).	86
5.25. Comparación de distribuciones de ruido entre imagen escaneada e imagen con ruido simulado.	86
5.26. Conjuntos fundamentales para imágenes binarias y en tonos de gris cuyo tamaño es de 50x50. Además de mostrar la apariencia de ruido de adquisición simulado.	90
5.27. Conjuntos fundamentales para imágenes binarias y en tonos de gris cuyo tamaño es de 80x80. Además de mostrar la apariencia de ruido de adquisición simulado.	92

5.28. Conjuntos fundamentales para imágenes binarias y en tonos de gris cuyo tamaño es de 120x120.	93
--	----

Capítulo 1

Introducción

Es muy interesante y sorprendente el saber cómo el cerebro humano es capaz de aprender y recordar su entorno; basta con escuchar algún sonido, oler un aroma, ver una imagen, tocar una textura, entre otras cosas, para que nuestro cerebro, a través de sus neuronas, asocie la información externa con algo que se ha aprendido y en consecuencia éste indique cómo actuar acorde a esa información. Lo más sorprendente, es que a nuestro cerebro le basta poca información adquirida por nuestros sentidos para que recuerde a su totalidad la información aprendida; por ejemplo, el cerebro aprende las características de un rostro de una persona a plena luz del día y es capaz de recordar las mismas características aprendidas de ese rostro en una noche con poca iluminación, esto quiere decir, que el cerebro necesita información mínima pero suficiente para recordar. También es cierto que si el cerebro no cuenta con información mínima suficiente no es capaz de recordar, lo que indica que si la información mínima que necesita el cerebro para recordar está afectada por otro tipo de información (ruido), a pesar de que se trate de algo que ya ha aprendido, no lo podrá recordar. Este hecho ha inspirado a algunos investigadores, en el área de reconocimiento de patrones, a presentar modelos que simulen el comportamiento del cerebro. Uno de esos modelos son las memorias asociativas[1-23], logrando una gran velocidad en la operación y en la respuesta; la finalidad, de la implementación, es la de aplicarlos en la solución de problemas en el reconocimiento de patrones para muy diversas áreas. El punto central de una memoria asociativa se basa en que éstas tengan una mayor capacidad en el aprendizaje de patrones, que recuperen estos y además que sean robustas ante los diferentes tipos de ruido[24-33].

Una memoria asociativa es un modelo matemático, como se verá en el capítulo 2, en donde toma como entrada un patrón (características numéricas que definen un objeto) a ser recuperado (recordado) y que es procesado por una caja negra (memoria asociativa), como consecuencia directa genera como resultado el patrón aprendido. Lo relevante de las memorias asociativas es que son capaces de recuperar patrones con un contenido muy fuerte de ruido. El ruido en el reconocimiento de patrones, en el caso específico de las memorias asociativas, causan grandes estragos en la recuperación de patrones; por tal motivo es necesario conocer el ruido, saber cómo es que se adhiere a un patrón (que para este trabajo de tesis los patrones serán imágenes binarias y en tonos de gris).

Investigadores que trabajan en reconocimiento de patrones asumen que el ruido se distribuye sobre el dominio de la función [21] [23] [34] [41] e investigadores que analizan señales asumen que el ruido se distribuye sobre el rango de la función [38-39] y esto lo muestran a través de la relación señal-ruido; de hecho, tiene más sentido hablar de la relación señal-ruido que la distribución en el dominio, porque para que haya ruido tiene que existir señal que la porte. *En este trabajo de tesis se asume que el ruido existe y se distribuye sobre el rango de la función además de sobre el dominio.*

El ruido se concentra donde la información existe y en donde existe ahí se distribuye tomando en cuenta la amplitud de la señal.

Existen dos tipos de ruidos, el de adquisición y el de transmisión; donde el primero es generado por los dispositivos electrónicos como por ejemplo los sensores de adquisición y el segundo es ocasionado por los medios de comunicación al transmitir la información. Es importante destacar que el ruido de transmisión ha sido tratado con los métodos existentes en el reconocimiento de patrones, lo que incluye a las memorias asociativas, por tal razón éste no es de importancia para este trabajo de tesis. El ruido de adquisición es el más importante dado que es el que se pretende atacar en el reconocimiento de patrones, pero no ha sido tratado correctamente porque no existe un modelo completo que defina su correcta distribución (el presente trabajo de tesis propondrá un modelo de distribución de ruido similar al de los medios de adquisición -aportación original-).

El modelo de memoria asociativa usada en esta investigación es la generalización (aportación original) de los modelos de las memorias en álgebra min y max, como lo son las memorias asociativas morfológicas y las memorias asociativas $\alpha\beta$. La piedra angular de este trabajo es la Transformada Rápida de Distancia dado que responde a dos cuestiones principales que las memorias asociativas en álgebra min y max necesitan para recuperar patrones afectados por ruido mezclado; la primera es ¿cómo se distribuye el ruido y qué tanto afecta a las imágenes si éstas son adquiridas? y la segunda es ¿cómo encontrar un kernel (información mínima suficiente del patrón que originalmente es aprendido y que no es afectado por el ruido).

Se procederá a continuación a definir el objetivo, motivación y planteamiento del problema del presente trabajo de tesis.

1.1. Objetivo

Proponer una metodología que permita elegir el kernel suficiente para que las memorias asociativas basadas en álgebra min y max recuperen en forma completa los patrones afectados con ruido mezclado. Para encontrar el kernel suficiente se hará uso de la Transformada Rápida de Distancia. Además, se desarrollará un nuevo esquema para dotar a los modelos de memorias asociativas basadas en álgebra min y max de mayor tolerancia al ruido mezclado.

1.2. Motivación

La memoria representa una de las propiedades más fascinantes del cerebro. Es imposible no maravillarse por la cantidad de información que se puede registrar en el curso de una vida. Normalmente, uno es capaz de recordar colores, olores, sonidos, escenas con una facilidad increíble, pero la memoria no se centra sólo en estas proezas, es completamente esencial, además, en los actos más banales y comunes. Sin ella ninguna conversación tendría lugar: seríamos incapaces de responder a nuestro interlocutor, puesto que habríamos olvidado la frase que acabara de pronunciar.

Por supuesto, para entender la memoria humana es necesario construir modelos matemáticos. A estos modelos se les conoce como memorias asociativas. Una memoria de este tipo realiza asociaciones de parejas de información: por ejemplo, una memoria asociativa retiene que una información X está asociada con otra W , y que la información Z en cambio lo está con Y .

Por ejemplo, para extraer información de una memoria convencional de computadora, es necesario dar una dirección de memoria; por otro lado, para extraer la información de una memoria asociativa, en lugar de proporcionar una dirección lo que debe presentársele a la memoria es otra información. La memoria convencional de una computadora puede ser vista como una gran biblioteca: para entregar el libro que usted solicita, el bibliotecario debe saber exactamente en qué sala, estante y nivel se encuentra. Una memoria asociativa es como una biblioteca en la que nadie sabe dónde están los libros; sin embargo, usted recibirá “El hombre bicentenario” presentando una foto de Isaac Asimov.

La segunda característica de las memorias asociativas es que los recuerdos no están localizados. Suponga que una memoria asociativa debe retener dos informaciones. La primera información no se encuentra en una zona del cerebro ni la segunda en otra, sino que las dos comparten la misma zona de memoria, ése es quizá el hecho más sorprendente de las memorias asociativas.

La memoria cerebral no está ordenada en celdas secuenciales numeradas y accesibles por dirección; por el contrario, pareciera ser más bien del tipo asociativo. De esa manera, un traumatismo no resulta ser tan catastrófico como debiera ser, puesto que la memoria está distribuida a lo largo del cerebro. Debido a ello, ciertos tipos de amnesia traumática pueden ser superados gracias a esa deslocalización.

El cerebro humano ha servido de inspiración para el desarrollo de las memorias asociativas, pues éstas asocian entidades de información análogamente a aquél. Así, la imagen de las personas que son conocidas por un sujeto están asociadas, en alguna parte de su cerebro, al nombre correspondiente.

Se especula que todas esas asociaciones son almacenadas en zonas de memoria que son meramente conjuntos de neuronas interconectadas.

La memoria humana es, además, flexible; esa flexibilidad permite la capacidad de aproximación en el reconocimiento: no es necesario presentar al cerebro la totalidad

de un objeto para que sea capaz de reconocerlo; es suficiente mostrarle sólo una parte.

Esas características y otras igualmente impresionantes son modeladas en computadora usando memorias asociativas, que no son más que redes de neuronas artificiales: unidades simples que procesan información interconectadas entre sí y formando estructuras complejas, a partir de las cuales se obtienen comportamientos colectivos interesantes.

Esas redes son capaces de simular ciertas funciones cognoscitivas en las que el todo, contrariamente al sentido común, es mucho más que la suma de las partes. Es importante destacar que las memorias asociativas son un caso especial de las redes neuronales, con la diferencia que las redes neuronales tienden a iterar para aproximar una función a una solución y las memorias asociativas son ONE SHOT; es decir, que con sólo un intento de recuperación, determinan si el patrón es conocido o no para ella.

Es importante definir a qué se refiere el término aprendizaje en el contexto de las memorias asociativas. El aprendizaje es el proceso que realiza una memoria asociativa, mediante el cual, guarda rasgos de los patrones que está asociando y los distribuye de cierta forma, que determina el modelo matemático, en la matriz de aprendizaje; garantizando que los rasgos almacenados de manera distribuida son suficientes para su futura recuperación.

Existen varios modelos de memorias asociativas entre las que destacan las basadas en álgebra min y max sobre las clásicas (memorias que trabajan en el anillo de los reales). Una álgebra min y max es una estructura algebraica en la que se especifica un conjunto (espacio de trabajo) y uno o más operadores definidos para dicho espacio. Para el caso concreto del álgebra min y max, se hace uso de los operadores \wedge y \vee junto con una relación de orden que definen perfectamente el comportamiento de las memorias asociativas para esta álgebra.

Las memorias morfológicas y las memorias $\alpha\beta$ son memorias que pertenecen a la familia de las memorias basadas en álgebra min y max ya que cumplen precisamente con su definición. Estas memorias se clasifican en memorias de tipo \vee (max) y memorias de tipo \wedge (min). Una memoria de tipo \vee tienen tres posibles respuestas al recuperar un patrón; las respuestas son: o es el patrón que aprendió, o la unión del patrón aprendido con otro patrón, o es el super conjunto de todos los patrones. En el caso de las memorias de tipo \wedge también tienen tres posibles respuestas: o se recupera el patrón aprendido, o la intersección con otro patrón, o el conjunto vacío. Estas características de recuperación son muy relevantes ya que, en las memorias que no se basan en álgebra min y max, la recuperación no completa implica, en general, que el patrón recuperado no tiene ninguna relación con el patrón aprendido.

Las memorias de tipo \vee son robustas a grandes porcentajes de ruido sustractivo; no así para el ruido aditivo y mezclado. Por su parte, las memorias de tipo \wedge son

robustas a grandes cantidades de ruido aditivo, pero son intolerantes al ruido mezclado y sustractivo.

Para atacar el problema de ruido mezclado, las memorias morfológicas proponen un modelo basado en kernel (el modelo de “kernel” será tratado a profundidad en el capítulo 2 de esta tesis), modelo que aplica a toda la familia de memorias en álgebra min y max. El término kernel difiere según el contexto en que se esté trabajando. Por ejemplo, existe un concepto de kernel en sistemas operativo, otro en álgebra lineal que no tiene que ver con sistemas operativos.

Cuando se escoge de manera apropiada el kernel, esta memoria es robusta al ruido mezclado. Los autores de las memorias morfológicas, así como también los autores de las memorias $\alpha\beta$, expresan textualmente (*lo que motivó a este trabajo de tesis*): **“El problema de la elección o construcción del kernel es un problema abierto”**, debido a que no es una tarea trivial formalizar un modelo matemático para definir bajo qué circunstancias y con qué certidumbre se debe construir la cota mínima que formará el kernel para garantizar que el patrón a aprenderse será recuperado en forma completa a pesar de que éste esté afectado con ruido mezclado [21-23] [34].

1.3. Planteamiento del problema

El problema esencial que motivó esta investigación es el ruido, debido a que provoca muchos estragos en las memorias asociativas. El ruido es un elemento que altera la información hasta el grado de hacerla imperceptible. En el caso de los medios electrónicos, el ruido puede darse en la adquisición o en la transmisión, es un hecho que el ruido siempre esté presente en estos medios, por ejemplo en ocasiones el ruido puede ser tan pequeño que puede confundirse con las señales y parecer que no existe, sin embargo sí existe.

Cuando se prueban los modelos de memorias asociativas inclusive los modelos de redes neuronales para la cantidad de ruido que pueden soportar, los autores crean éste de manera artificial por no conocer un modelo que permita generar una distribución correcta del ruido en los medios de adquisición, lo que puede afectar en el rendimiento de los modelos matemáticos en cuestión. Por tal razón, si la familia de memorias asociativas en álgebra min y max contaran con un mecanismo que les permitiera escoger un kernel apropiado para atacar el ruido mezclado, la familia de memorias asociativas en álgebra min y max quedaría completo.

En resumen, no existe un mecanismo que modele la distribución del ruido de adquisición, ruido que es más utilizado en reconocimiento de patrones, que permita medir el rendimiento de las memorias asociativas y, en el caso de las memorias asociativas en álgebra min y max, no existe un mecanismo que permita crear un kernel adecuado para atacar el problema de ruido mezclado (ruido que es inmune a este tipo de memorias si no es tratado por kernel).

1.4. Contribuciones

Las principales contribuciones originales de este trabajo de tesis son:

1. Distribución de Probabilidad de ruido de adquisición en imágenes binarias.
2. Distribución de Probabilidad de ruido de adquisición en imágenes de tonos de gris.
3. Algoritmos que permiten simular el ruido adquirido en imágenes binarias y de tonos de gris.
4. Mecanismo de construcción de kernels basados en la Transformada Rápida de Distancia.
5. Modelo generalizado de memorias heteroasociativas en álgebra min robustas al ruido mezclado.

1.5. Organización de la tesis

En el **Capítulo 1 *Introducción***, se habló de la importancia de las memorias asociativas, además de definir el objetivo, la motivación y el plantamiento del problema del presente trabajo de tesis.

El **Capítulo 2 *Antecedentes y Estado del Arte***, presentará los tipos de ruidos más comunes tratados en la literatura en el procesamiento digital de imágenes; también, se presentarán los modelos más importantes de memorias asociativas en orden de aparición histórica. Por último se presentarán los trabajos actuales relacionados a la construcción de kernels para memorias asociativas en álgebra min y max.

El **Capítulo 3 *Marco Teórico***, habla de la Transformada Rápida de Distancia, destacando las métricas que ésta puede utilizar, además, de mostrar el algoritmo computacional para su implementación.

En el **Capítulo 4 *Desarrollo***, se establecerá la distribución real del ruido en los medios de adquisición para imágenes binarias y en tonos de gris, así como los algoritmos correspondientes para simular dicho ruido. Se presentarán los mecanismos para la creación de kernels basados en la probabilidad de que el ruido afecte ciertas distancias obtenidas a través de la Transformada Rápida de Distancia. Por último, se establecerá el nuevo modelo genérico de memorias heteroasociativas min robustas al ruido mezclado. Este capítulo es el más importante de este trabajo de investigación.

El **Capítulo 5 *Disquisiciones Experimentales***, mostrará los experimentos realizados para: la comprobación de la distribución real del ruido de adquisición en las imágenes binarias y de tonos de gris, la construcción de los kernels en función a la distribución del ruido y el rendimiento del nuevo modelo genérico de memorias heteroasociativas min robustas al ruido mezclado con los kernels generados.

En el **Capítulo 6 *Conclusiones y trabajos futuros***, se enfatizan las principales conclusiones derivadas del presente tema de tesis, además, se presentarán trabajos a desarrollar que se derivan como consecuencia directa de la presente investigación.

Capítulo 2

Antecedentes y Estado del Arte

En este capítulo, en su primera parte, se presentará cómo es modelado el ruido en imágenes por la literatura, después, se mostrará históricamente cómo se han presentado los modelos de memorias asociativas a través del tiempo. Estos dos temas son de vital importancia para el presente trabajo de tesis. La segunda sección de este capítulo mostrará los trabajos recientes que se han realizado en cuanto a la obtención de kernels para un mejor desempeño en las memorias asociativas basadas en álgebra min y max.

2.1. Antecedentes

2.1.1. Ruido

El ruido ha desempeñado un papel crucial en el análisis estadístico de datos y las memorias asociativas no han sido la excepción; sin embargo, existe un hecho muy curioso e interesante y es que el ruido, ocasionalmente, si es definido, se define en función al contexto del área de investigación de que se trate. Algunos investigadores han comentado que el *ruido* ha sido un término históricamente ambiguo[35-36].

El ruido suele usarse para designar señales no deseadas que tiende a perturbar la transmisión y el procesamiento de señales en sistemas de comunicación y sobre las cuales no se tiene un control completo[37-39]. En otro contexto, el ruido es asociado con irregularidades esparcidas cerca de las superficies [40]. Es de llamar la atención de que en áreas de investigación donde el ruido desempeña un papel determinante se hable de él pero no se defina qué es [42].

Los tipos de ruido que se mostrarán en esta sección son los aplicables a imágenes en la literatura [41] [51], dado que son imágenes las que fungirán como patrones de entrada y de salida en este trabajo de tesis.

Las principales fuentes de ruido que afectan a las imágenes digitales son producidas en el proceso de la digitalización y en el proceso de la transmisión de éstas. El rendimiento del sensor de imagen, por ejemplo, se ve afectado por una variedad de factores, tales como las condiciones del medio ambiente durante la adquisición de la imagen y por la calidad de los elementos que conforman a los sensores. También, en la

adquisición de imágenes con una cámara CCD, los niveles de luz y el sensor de temperatura son factores importantes que afectan la cantidad de ruido en las imágenes resultantes. Otro ejemplo más, son las imágenes que se alteran durante la transmisión de éstas, principalmente debido a la interferencia en el canal usado, como es el caso en la transmisión de una imagen, que puede ser afectada bajo ciertos disturbios atmosféricos, en una red inalámbrica.

Lo relevante en el análisis del ruido, son los parámetros que definen las características especiales de ruido y si el ruido se correlaciona con la imagen. Se asume que el ruido es independiente de las coordenadas espaciales y que no está correlacionado con la imagen.

Ruido Gaussiano

Debido a su tratabilidad matemática, tanto en el espacio y dominio de frecuencia, los modelos de ruido Gaussiano (también llamada normal) se utilizan con frecuencia en la práctica. De hecho, esta tratabilidad es tan conveniente que en problemas de ruido reales a menudo resultan en modelos Gaussianos.

La Función de Densidad de Probabilidad (FDP) de una variable aleatoria Gaussiana z es obtenida por:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.1)$$

donde z representa el tono de gris, μ es la media y σ es la desviación estándar. σ^2 representa la varianza de z .

Ruido Rayleigh

La FDP del ruido Rayleigh es obtenida através de:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & \text{para } z \geq a \\ 0 & \text{para } z < a \end{cases} \quad (2.2)$$

La media y la varianza de esta densidad se obtiene por medio de:

$$\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}} \quad (2.3)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4} \quad (2.4)$$

Ruido Erlang (Gamma)

La FDP del ruido Erlang es obtenida por:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{para } z \geq 0 \\ 0 & \text{para } z < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $a > 0$ y b entero positivo. La media y la varianza de esta función de densidad es obtenida por:

$$\mu = \frac{b}{a} \quad (2.6)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2} \quad (2.7)$$

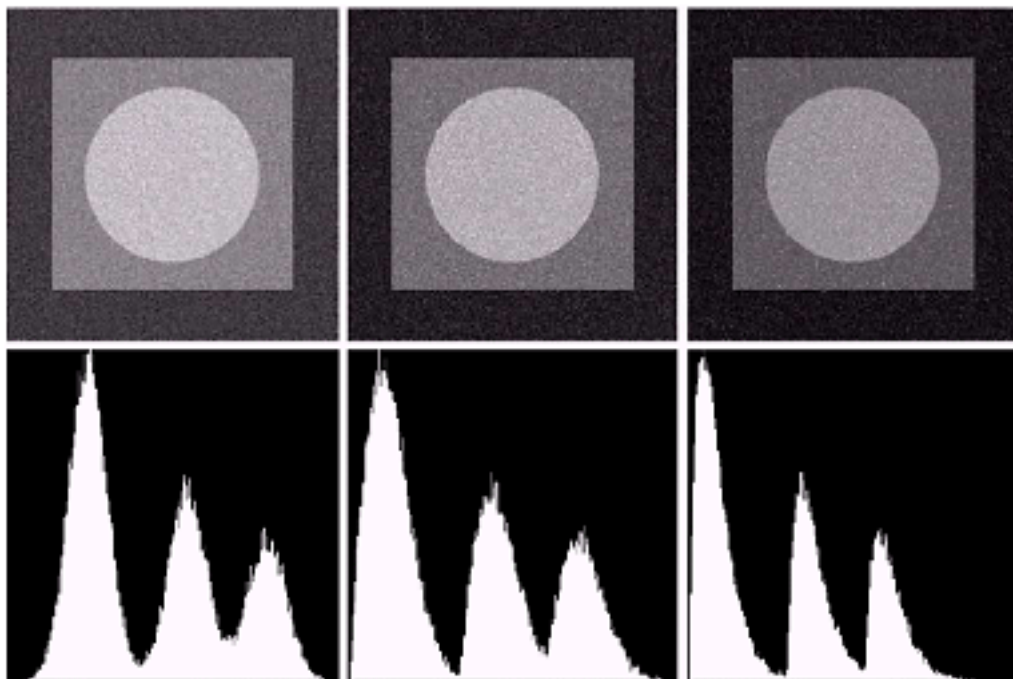


Figura 2.1: Ruidos: Guassiano, Rayleigh y Gamma en ese orden.

Ruido Exponencial

La FDP del ruido Exponencial es obtenida por:

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{para } z \geq 0 \\ 0 & \text{para } z < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

donde los parámetros como son $a > 0$. La media y la varianza de esta función de densidad es obtenida por:

$$\mu = \frac{1}{a} \quad (2.9)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2} \quad (2.10)$$

Notese que esta FDP es un caso especial de la FDP de Erlang, con $b = 1$.

Ruido Uniforme

La FDP del ruido Uniforme es obtenida por:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.11)$$

La media y la varianza de esta función de densidad es obtenida por:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad (2.12)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.13)$$

Ruido Impulsivo (Sal y Pimienta)

la FDP del ruido bipolar o impulsivo se obtiene a través de:

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{para } z = a \\ P_b & \text{para } z = b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.14)$$

Si $b > a$ entonces el nivel de gris de b aparecerá como puntos de luz en la imagen. Por el contrario, el nivel de a aparecerá como un punto oscuro. Si ambos son 0, el ruido impulsivo es llamado unipolar. Si ninguno es de probabilidad cero, y en especial si son aproximadamente iguales, los valores del ruido impulsivo se parecerá a granulos como la sal y pimienta distribuido al azar sobre toda la imagen. Por esta razón, el ruido impulsivo bipolar es llamado ruido sal y pimienta.

El ruido impulsivo puede ser positivo o negativo; el impulso negativo aparecerá como negro (pimienta) y el impulso positivo aparecerá como blanco (sal). Normalmente este tipo de ruido aparece en la digitalización de imágenes.

Resumiendo, como grupo las FDPs proporcionan herramientas útiles para modelar una amplia gama de situaciones de ruido que se encuentran en la práctica. Además, el ruido es definido como información no deseada que es independiente de las coordenadas espaciales (salvo ruido periódico) y que no está correlacionado con la imagen; donde las fuentes de ruido son:

- **adquisición:** defectos en los sensores, temperatura, ruido en el sistema de captura, etc.
- **transmisión:** interferencias en el canal (ejemplo: variación de condiciones atmosféricas en microondas)

El ruido queda descrito mediante variables estadísticas, en particular en las FDP. El ruido impulsivo tiene dos casos particulares como lo son el ruido bipolar y unipolar, que se presenta debido a: los defectos electrónicos de dispositivos CCD, errores en transmisión o ruido externo que contamina la conversión A/D. El ruido uniforme es utilizado para simulaciones de valores aleatorios. El ruido Gaussiano es generado principalmente por componentes electrónicos; y debido a su versatilidad matemática es ampliamente utilizado en situaciones donde no se ajustan los principios físicos del ruido. El ruido Rayleigh se presenta en imágenes de radar. El ruido Gamma se presenta en imágenes generadas por láser. El ruido exponencial es un caso particular del ruido Gamma y se presenta en imágenes generadas por laser.

Las figuras 2.1 y 2.2 muestran imágenes afectadas con los diferentes tipos de ruido descritos en esta sección, además, destacan su distribución a través de histogramas.

En el caso de imágenes binarias el ruido aditivo, ruido sustractivo y ruido mezclado (sal y pimienta) suelen presentarse como lo muestra la figura 2.3.

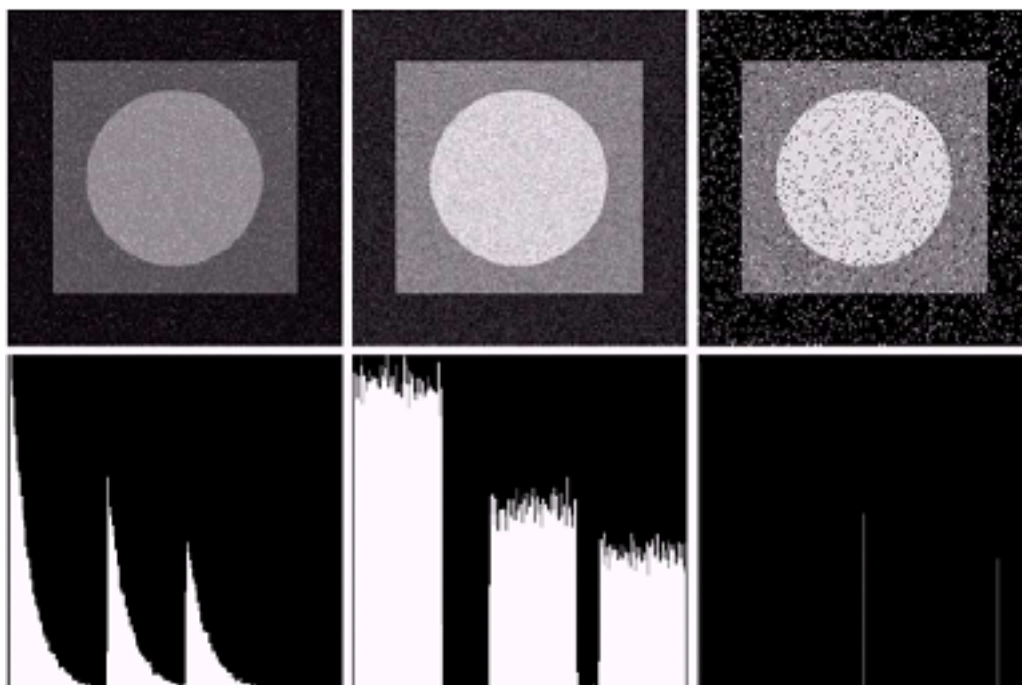


Figura 2.2: Ruidos: Exponencial, Uniforme y Sal y Pimienta, en ese orden.

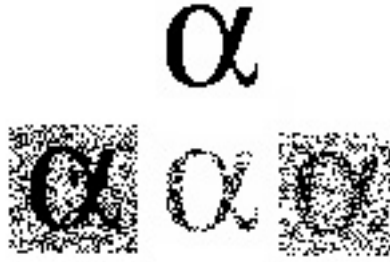


Figura 2.3: Imagen original e imágenes corrompidas con ruido aditivo, sustractivo y mezclado, en ese orden.

2.1.2. Memorias Asociativas

Una memoria asociativa es un proceso que tiene por objetivo: “*recuperar de forma completa patrones, a partir de patrones de entrada, que quizá estén alterados con algún tipo de ruido*” [43]; se puede ejemplificar como una caja negra que recibe de entrada un patrón X lo procesa y genera como resultado un patrón Y , como lo muestra la figura 2.4.

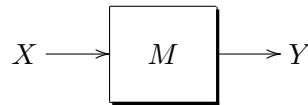


Figura 2.4: Memoria Asociativa vista como una caja negra.

El término “*recuperar en forma completa*” significa que el patrón que ha sido recuperado (recordado por la memoria), es idéntico al patrón que fue aprendido.

La relación que existe entre el patrón de entrada x con el de salida y se muestra mediante una pareja ordenada (x, y) .

El patrón de entrada x y el patrón de salida y son vectores columna; la memoria asociativa debe ser capaz de aprender un conjunto de parejas ordenadas de patrones, y recuperar los de salida a partir de los de entrada. La representación del conjunto de todos los patrones que conforman la memoria M es:

$$\{(x^\omega, y^\omega) \mid \omega \in \{1, 2, \dots, p\}\} \quad (2.15)$$

donde p indica la cardinalidad del conjunto mostrado. Al conjunto finito de patrones denotado en la expresión 2.15 se le conocerá como: “*conjunto fundamental de patrones*” y a sus elementos “*patrones fundamentales*”, los cuales pueden ser de entrada o salida.

Para hacer referencia a algún elemento de un patrón x o de un patrón y , se usará la notación:

$$x_j^\omega \text{ ó } y_j^\omega \quad (2.16)$$

donde j representa el índice de la posición del elemento del patrón y ω el índice de pareja.

De acuerdo con la figura 2.4 M es la “*matriz de aprendizaje M*” ó “*memoria asociativa M*”. M contendrá la información codificada del conjunto fundamental, y esta misma, después que haya aprendido, será operada de cierta manera con el patrón x que se presente de entrada, el cual puede estar alterado con algún tipo de ruido, y generará un patrón y de salida.

La operación de las memorias asociativas consta de dos fases, que son:

1. la de **aprendizaje** que consiste en encontrar el o los operadores necesarios, para que de alguna manera se codifique la relación que existe entre los patrones de entrada y de salida y con dicha codificación se genere la matriz de aprendizaje M .
2. la de **recuperación** que consiste en encontrar el operador o los operadores necesarios y las condiciones suficientes para generar un patrón de salida; es decir, una vez que se ha conformado la matriz M , se presenta un patrón de entrada x que previamente se aprendió, M se opera con el operador o los operadores necesarios bajo ciertas circunstancias con el patrón x , y se genera un patrón de salida y .

A un patrón de entrada alterado con ruido, se le representará como \tilde{x} . Por ejemplo, la expresión \tilde{x}^ω representa el patrón de entrada x^ω alterado con ruido.

Si en la fase de recuperación todos los patrones son recuperados en forma completa, se dice que *la memoria es perfecta*.

Las memorias asociativas pueden verse como : *autoasociativas* y *heteroasociativas*.

Una memoria es autoasociativa si se cumple:

$$x^\mu = y^\mu \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (2.17)$$

Una memoria es heteroasociativa si se cumple:

$$\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ para el que } x^\mu \neq y^\mu \quad (2.18)$$

Las memorias asociativas pueden clasificarse en dos tipos que son las clásicas y las basadas en álgebra min y max; las memorias clásicas [1-20] trabajan en el anillo de los

reales mientras que las memorias asociativas basadas en álgebra min y max lo hacen en el anillo de los máximos y mínimos [21-23]. En un estudio comparativo realizado entre los modelos más importantes de las memorias asociativas clásicas y las memorias en álgebra min y max para el caso binario, se destaca, lo que ya habían afirmado los autores de las memorias en álgebra min y max, que éstas generan mejores resultados que los modelos clásicos [34].

Las memorias asociativas, en función a su diseño, obtienen los resultados esperados [34]; sin embargo, existe un factor que hace muchos estragos en éstas y este factor es el *ruido*. El ruido ocasiona efectos muy interesantes en la recuperación de patrones al grado que la recuperación de estos no tiene ninguna relación con el patrón aprendido.

LernMatrix

La memoria *Lernmatrix* es una memoria heteroasociativa desarrollada por Karl Steinbuch al inicio de los sesenta [44] [45]. Karl Steinbuch desarrolló un método para codificar información en arreglos cuadriculados llamado *crossbar* [46]. Esta memoria puede operar como un clasificador si se escogen de manera adecuada los patrones de salida.

Fase de Aprendizaje

La *Lernmatrix* acepta como entrada a los patrones $x^\mu \in A^n$, $A = \{0, 1\}$ y genera como salida la clase $y^\mu \in A^p$ que le puede corresponder de entre p clases diferentes; para representar la clase $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, se asigna a los componentes del vector de salida y^ω los siguientes valores: $y_k^\omega = 1$, y $y_j^\omega = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, p$.

El conjunto fundamental $(x^\mu, y^\mu) \in A^n \times A^p$ se puede ilustrar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & x_1^\mu & x_2^\mu & \cdots & x_j^\mu & \cdots & x_n^\mu \\
 y_1^\mu & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\
 y_2^\mu & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_i^\mu & m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{in} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_p^\mu & m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pj} & \cdots & m_{pn}
 \end{array} \tag{2.19}$$

Los componentes m_{ij} de la *Lernmatrix* M tienen valor cero al iniciar el aprendizaje, y se actualizan de acuerdo con la regla $m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ -\varepsilon & \text{si } x_j^\mu = 0 \text{ y } y_i^\mu = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.20}$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

Fase de Recuperación

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $x^\omega \in A^n$ dado. Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $y^\omega \in A^p$ que le corresponde al patrón x^ω .

El modo para construir el vector y^ω que tiene este método, es: la i -ésima coordenada y_i^ω del vector de la clase $y^\omega \in A^p$, se obtiene como se indica a continuación:

$$y_i^\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^p \left[\sum_{j=1}^n m_{hj} \cdot x_j^\omega \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.21)$$

donde \bigvee es el operador *máximo*.

Linear Associator de Anderson & Kohonen

Para presentar la *Linear Associator* [47] [48], se debe considerar el conjunto fundamental $\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ con:

$$A = \{0, 1\}, \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad y \quad y^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m \quad (2.22)$$

Fase de Aprendizaje

La fase de aprendizaje para la Linear Associator consiste en dos etapas:

Primera Etapa. Para cada una de las p asociaciones (x^μ, y^μ) se encuentra la matriz $y^\mu \cdot (x^\mu)^t$ de dimensión $m \times n$

$$y^\mu \cdot (x^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu) \quad (2.23)$$

Segunda etapa. Se suman las p matrices para obtener la memoria

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^p y^\mu \cdot (x^\mu)^t = [m_{ij}]_{m \times n} \quad (2.24)$$

el componente ij -ésimo de la memoria M se expresa de la siguiente manera:

$$m_{ij} = \sum_{\mu=1}^p y_i^\mu x_j^\mu \quad (2.25)$$

Fase de Recuperación

La fase de recuperación consiste en presentarle a la memoria un patrón de entrada x^ω , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ y realizar la siguiente operación:

$$M \cdot x^\omega = \left[\sum_{\mu=1}^p y^\mu \cdot (x^\mu)^t \right] \cdot x^\omega \quad (2.26)$$

entonces, la expresión 2.26 representa:

$$M \cdot x^\omega = y^\omega \quad (2.27)$$

Memoria Autoasociativa Hopfield

Hopfield en su artículo, parte de un sistema físico descrito por un vector de estado x cuyas coordenadas son (x_1, x_2, \dots, x_n) ; se considera que el sistema tiene puntos límite localmente estables x^a, x^b, \dots . Entonces, si el sistema es activado en un estado suficientemente cercano a cualquier punto límite localmente estable, digamos en $x = x^a + \Delta$, al transcurrir el tiempo el estado del sistema cambiará hasta llegar a que $x \approx x^a$. El punto de arranque $x^a + \Delta$ representa un conocimiento parcial del estado estable x^a , y a partir de ahí el sistema genera la información correcta x^a . Hopfield declara categóricamente que un sistema físico que se comporta de esta manera y que, además, sea susceptible de que cualquier *conjunto* predeterminado de estados pueda ser asignado como el conjunto de estados localmente estables, es útil como memoria asociativa [11].

En el modelo de Hopfield cada neurona tiene dos posibles estados: o es $x_i = -1$ o es $x_i = 1$.

La intensidad de la fuerza de conexión de la neurona x_i a la neurona x_j se representa por el valor de m_{ij} , y se considera que hay simetría, es decir, $m_{ij} = m_{ji}$. Si x_i no está conectada con x_j , entonces $m_{ij} = 0$; en particular, no hay conexiones recurrentes de una neurona a sí misma, lo cual significa que $m_{ii} = 0, \forall i$. El estado instantáneo del sistema está completamente especificado por el vector columna de dimensión n cuyas coordenadas son los valores de las n neuronas.

La memoria Hopfield es autoasociativa, simétrica, con ceros en la diagonal principal. El conjunto fundamental para la memoria Hopfield es $\{(x^\mu, x^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ con:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad A = \{-1, 1\} \quad (2.28)$$

Fase de Aprendizaje

La fase de aprendizaje de la memoria Hopfield se realiza de la siguiente manera:

$$m_{ij} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^p x_i^\mu x_j^\mu & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.29)$$

operativamente la expresión 2.29 se puede representar como:

$$M = \sum_{\mu=1}^p [x^\mu \cdot (x^\mu)^t - I] = [m_{ij}]_{n \times n} \quad (2.30)$$

donde I es la matriz identidad.

Fase de Recuperación

La fase de recuperación para la memoria Hopfield consiste en tres etapas; se debe tener presente que al presentar un patrón \tilde{x} a la memoria autoasociativa Hopfield, ésta cambiará su estado con el tiempo, de modo que cada neurona x_i ajuste su valor de acuerdo con el resultado que arroje la comparación de la cantidad $\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j$ con un valor de umbral, el cual normalmente se coloca en cero.

Se representará el estado de la memoria Hopfield en el tiempo t por $x(t)$; entonces $x_i(t)$ representa el valor de la neurona x_i en el tiempo t y $x_i(t+1)$ el valor de x_i en el tiempo siguiente ($t+1$).

Dado un vector columna de entrada \tilde{x} :

Primera Etapa. Para $t = 0$, se hace $x(t) = \tilde{x}$; es decir, $x_i(0) = \tilde{x}_i, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Segunda etapa. $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ se calcula $x_i(t+1)$ en conformidad con la siguiente condición:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(t) > 0 \\ x_i(t) & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(t) = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(t) < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Tercera Etapa. Se compara $x_i(t+1)$ con $x_i(t) \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Si $x(t+1) = x(t)$ el proceso termina y el vector recuperado es $x(0) = \tilde{x}$. De otro modo, se realizan tantas iteraciones como sea necesario hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $x_i(\tau+1) = x_i(\tau) \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; el proceso termina y el patrón recuperado es $x(\tau)$.

El proceso de convergencia descrito en la tercera etapa de la fase de recuperación, indica que el sistema llega a un punto límite localmente estable en el tiempo τ .

Memorias Asociativas Morfológicas

Las *memorias morfológicas* rompen el esquema convencional de como venían tratándose las memorias asociativas clásicas, en contraste, las memorias morfológicas se basan en: *el uso de máximos o mínimos de sumas para la fase de aprendizaje y máximos o mínimos de sumas para la fase de recuperación* [21].

Existen dos tipos de memorias morfológicas: las memorias \bigvee (*max*), simbolizadas por M , y las memorias \bigwedge (*min*) simbolizadas por W ; ambas memorias funcionan para los modos *heteroasociativo* y *autoasociativo*.

El conjunto fundamental para las memorias asociativas morfológicas es:

$$\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$$

$$A \in \mathbb{R}, \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad y^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m \quad (2.32)$$

Se definen dos nuevas operaciones entre matrices en términos de las operaciones $+$, \bigvee y \bigwedge , con el fin de expresar las fases de aprendizaje y recuperación de las memorias asociativas morfológicas [21].

Sea D una matriz $[d_{ij}]_{m \times r}$ y H una matriz $[h_{ij}]_{r \times n}$ cuyos términos son números enteros.

Definición 2.1 *El producto máximo de D y H , denotado por $C = D \nabla H$, es una matriz $[c_{ij}]_{m \times n}$ cuya ij -ésima componente c_{ij} se define de la siguiente manera:*

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^r (d_{ik} + h_{kj}) \quad (2.33)$$

Definición 2.2 *El producto mínimo de D y H , denotado por $C = D \Delta H$, es una matriz $[c_{ij}]_{m \times n}$ cuya ij -ésima componente c_{ij} se define así:*

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^r (d_{ik} + h_{kj}) \quad (2.34)$$

Memorias asociativas morfológicas \bigvee

Fase de Aprendizaje

La fase de aprendizaje para las memorias morfológicas de tipo max consta de dos etapas:

Primera Etapa. En cada una de las p asociaciones (x^μ, y^μ) se usa el producto mínimo, expresión 2.34, para crear la matriz $y^\mu \Delta (-x^\mu)^t$ de dimensión $m \times n$, donde el negado transpuesto del patrón de entrada x^μ se define como: $(-x^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$:

$$\begin{aligned}
 y^\mu \Delta (-x^\mu)^t &= \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \Delta (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu) \\
 y^\mu \Delta (-x^\mu)^t &= \begin{pmatrix} \left[\bigwedge (y_1^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_1^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_1^\mu - x_n^\mu) \right] \\ \left[\bigwedge (y_2^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_2^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_2^\mu - x_n^\mu) \right] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \left[\bigwedge (y_i^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_i^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_i^\mu - x_n^\mu) \right] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \left[\bigwedge (y_m^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_m^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigwedge (y_m^\mu - x_n^\mu) \right] \end{pmatrix} \\
 y^\mu \Delta (-x^\mu)^t &= \begin{pmatrix} y_1^\mu - x_1^\mu & y_1^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_n^\mu \\ y_2^\mu - x_1^\mu & y_2^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu - x_1^\mu & y_i^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu - x_1^\mu & y_m^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

Segunda Etapa. Se aplica el operador \bigvee (máximo) a las p matrices para obtener la memoria morfológica M .

$$\begin{aligned}
 M &= \bigvee_{\mu=1}^p \left[y^\mu \Delta (-x^\mu)^t \right] = [m_{ij}]_{m \times n} \\
 m_{ij} &= \bigvee_{\mu=1}^p (y_i^\mu - x_j^\mu) \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Fase de Recuperación

La fase de recuperación consiste en realizar el producto mínimo Δ , expresión 2.34, de la memoria M con un patrón de entrada x^ω , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, para obtener un vector columna de dimensión m :

$$y = M \Delta x^\omega \quad (2.37)$$

la i -ésima componente del vector y es:

$$y_i = \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + x_j^\omega) \quad (2.38)$$

Memorias asociativas morfológicas \bigwedge

Fase de Aprendizaje

La memoria morfológica min para la fase de aprendizaje consta dos etapas:

Primera Etapa. En cada una de las p asociaciones (x^μ, y^μ) se hace uso del producto máximo, expresión 4.9, para crear la matriz $y^\mu \nabla (-x^\mu)$ de dimensión $m \times n$, donde el negado del transpuesto del patrón de entrada x^μ se define como: $(-x^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$

$$y^\mu \nabla (-x^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \nabla (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$y^\mu \nabla (-x^\mu)^t = \begin{pmatrix} \left[\bigvee (y_1^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_1^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_1^\mu - x_n^\mu) \right] \\ \left[\bigvee (y_2^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_2^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_2^\mu - x_n^\mu) \right] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \left[\bigvee (y_i^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_i^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_i^\mu - x_n^\mu) \right] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \left[\bigvee (y_m^\mu - x_1^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_m^\mu - x_j^\mu) \right] & \cdots & \left[\bigvee (y_m^\mu - x_n^\mu) \right] \end{pmatrix}$$

$$y^\mu \nabla (-x^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu - x_1^\mu & y_1^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_n^\mu \\ y_2^\mu - x_1^\mu & y_2^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu - x_1^\mu & y_i^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu - x_1^\mu & y_m^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Segunda Etapa. Se aplica el operador mínimo \bigwedge a las p matrices para obtener la memoria W .

$$W = \bigwedge_{\mu=1}^p \left[y^\mu \nabla (-x^\mu)^t \right] = [w_{ij}]_{m \times n} \quad (2.40)$$

$$w_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p (y_i^\mu - x_j^\mu) \quad (2.41)$$

Fase de Recuperación

La fase de recuperación consiste en realizar el producto máximo, expresión 4.9, ∇ de la memoria W con un patrón de entrada x^ω , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, para obtener un vector columna y de dimensión m :

$$y = W \nabla x^\omega \quad (2.42)$$

la i -ésima componente del vector y es:

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^\omega) \quad (2.43)$$

Memorias Asociativas $\alpha\beta$

Las memorias asociativas $\alpha\beta$ son memorias que funcionan para los modos hetero-asociativo y autoasociativo y pertenecen a la familia de memorias en álgebra min y max. Hacen uso, además, de dos nuevos operadores: el operador Alfa (α) para la fase de aprendizaje y el operador Beta (β) para la fase de recuperación [23].

La especificación de los conjuntos A y B es de la siguiente manera:

$$A = \{0, 1\} \quad \text{y} \quad B = \{0, 1, 2\}$$

La operación binaria $\alpha = A \times A \rightarrow B$, está definida por la siguiente tabla:

x	y	$\alpha(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	2
1	1	1

La operación binaria $\beta = B \times A \rightarrow A$, está definida de la siguiente manera:

x	y	$\beta(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
2	0	1
2	1	1

Las memorias asociativas $\alpha\beta$ hacen uso de cuatro operaciones matriciales que son:

1. **Operación α máx:** $P_{m \times r} \Psi_{\alpha} Q_{r \times n} = [f_{ij}^{\alpha}]_{m \times n}$, donde

$$f_{ij}^{\alpha} = \bigvee_{k=1}^r \alpha(p_{ik}, q_{kj})$$

2. **Operación β máx:** $P_{m \times r} \Psi_{\beta} Q_{r \times n} = [f_{ij}^{\beta}]_{m \times n}$, donde

$$f_{ij}^{\beta} = \bigvee_{k=1}^r \beta(p_{ik}, q_{kj})$$

3. **Operación α mín:** $P_{m \times r} \mathbb{M}_{\alpha} Q_{r \times n} = [h_{ij}^{\alpha}]_{m \times n}$, donde

$$h_{ij}^{\alpha} = \bigwedge_{k=1}^r \alpha(p_{ik}, q_{kj})$$

4. **Operación β mín:** $P_{m \times r} \mathbb{M}_{\beta} Q_{r \times n} = [h_{ij}^{\beta}]_{m \times n}$, donde

$$h_{ij}^{\beta} = \bigwedge_{k=1}^r \beta(p_{ik}, q_{kj})$$

Nota 2.3 k es un entero positivo que puede tomar valores de entre 1 y r inclusive.

Restricción

- Ninguna de las cuatro operaciones está definida si $\exists j, k$ tales que $q_{kj} = 2$
- Las operaciones Ψ_{α} y \mathbb{M}_{α} no están definidas si $\exists i, j, k$ tales que $p_{ik} = 2$ o $q_{kj} = 2$

Notación 2.4 El símbolo \boxtimes representa indistintamente a alguna de las dos operaciones Ψ_{α} o \mathbb{M}_{α} cuando opere un vector columna de dimensión m con un vector fila de dimensión n :

$$y \Psi_{\alpha} x^t = y \boxtimes x^t = y \mathbb{M}_{\alpha} x^t \quad (2.44)$$

De acuerdo con la expresión 2.44 se tiene que:

$$y \boxtimes x^t = \begin{pmatrix} \alpha(y_1, x_1) & \alpha(y_1, x_2) & \cdots & \alpha(y_1, x_n) \\ \alpha(y_2, x_1) & \alpha(y_2, x_2) & \cdots & \alpha(y_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha(y_m, x_1) & \alpha(y_m, x_2) & \cdots & \alpha(y_m, x_n) \end{pmatrix}$$

entonces la ij -ésima componente de la matriz $y \boxtimes x^t$ esta dada por:

$$[y \boxtimes x^t]_{ij} = \alpha(y_i, x_j) \quad (2.45)$$

es decir, para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$ se tiene:

$$[y^\mu \boxtimes (x^\mu)^t]_{ij} = \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \quad (2.46)$$

Memorias asociativas $\alpha\beta$ de tipo \bigvee

Fase de Aprendizaje

La fase de aprendizaje consta de dos etapas; en la primera se utiliza el operador \boxtimes , y en la segunda el operador máximo \bigvee .

Primera Etapa. Para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, a partir de la pareja (x^μ, y^μ) se construye la matriz:

$$[y^\mu \boxtimes (x^\mu)^t]_{m \times n} \quad (2.47)$$

Segunda Etapa. Se aplica el operador binario máximo \bigvee a las matrices obtenidas en la primera etapa.

$$\mathbf{V} = \bigvee_{\mu=1}^p [y^\mu \boxtimes (x^\mu)^t] \quad (2.48)$$

La entrada ij -ésima está dada por la siguiente expresión:

$$v_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \quad (2.49)$$

de acuerdo con la definición de $\alpha : A \times A \longrightarrow B$, se observa que $v_{ij} \in B, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fase de Recuperación

Se presenta un patrón x^ω , con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria $\alpha\beta$ tipo \bigvee y se realiza la operación \mathbb{m}_β :

$$\mathbf{V}\mathbb{m}_\beta x^\omega \quad (2.50)$$

El tamaño de la matriz \mathbf{V} es de $m \times n$ y x^ω es un vector columna de dimensión n ; como resultado se obtiene un vector columna de dimensión m , cuya i -ésima componente es posible obtener a partir de la siguiente expresión:

$$(\mathbf{V}\mathbb{m}_\beta x^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^n \beta(v_{ij}, x_j^\omega) \quad (2.51)$$

$$(\mathbf{V}\mathbb{m}_\beta x^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^n \beta \left\{ \left[\bigvee_{\mu=1}^p \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \right], x_j^\omega \right\} \quad (2.52)$$

Memorias asociativas $\alpha\beta$ de tipo \bigwedge

Fase de Aprendizaje

La memoria $\alpha\beta$ de tipo *min* para realizar la fase de aprendizaje debe seguir dos etapas; en la primera se debe utilizar el operador \boxtimes , y en la segunda se hace uso del operador \bigwedge .

Primera Etapa. Para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, a partir de la pareja (x^μ, y^μ) se construye la matriz:

$$[y^\mu \boxtimes (x^\mu)^t]_{m \times n} \quad (2.53)$$

Segunda Etapa. Se aplica el operador binario mínimo \bigwedge a las matrices obtenidas en la primera etapa.

$$\Lambda = \bigwedge_{\mu=1}^p [y^\mu \boxtimes (x^\mu)^t] \quad (2.54)$$

la entrada ij -ésima está dada por la siguiente expresión:

$$\lambda_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \quad (2.55)$$

de acuerdo con la definición de $\alpha : A \times A \rightarrow B$, es posible observar que $\lambda_{ij} \in B, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fase de Recuperación

En esta fase se presenta un patrón x^ω , con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria asociativa $\alpha\beta$ de tipo \bigwedge y se efectúa la operación $\mathbb{A}\beta$:

$$\Lambda \mathbb{A}\beta x^\omega \quad (2.56)$$

El tamaño de la matriz Λ es $m \times n$ y x^ω es un vector columna de dimensión n ; como resultado se obtiene un vector columna dimensión m , cuya i -ésimo componente es posible obtener a partir de la siguiente expresión:

$$(\Lambda \mathbb{A}\beta x^\omega)_i = \bigvee_{j=1}^n \beta(\lambda_{ij}, x_j^\omega) \quad (2.57)$$

$$(\Lambda \mathbb{A}\beta x^\omega)_i = \bigvee_{j=1}^n \beta \left\{ \left[\bigwedge_{\mu=1}^n \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \right], x_j^\omega \right\} \quad (2.58)$$

2.2. Estado del Arte

Las memorias asociativas basadas en álgebra min y max vienen al escenario cuando son desarrolladas las memorias asociativas morfológicas en 1988 [21]; éstas, rompen el esquema de cómo se trataban las memorias asociativas clásicas. Además, definen la forma en que las memorias en el álgebra min y max deben operar. Para el año 2002 las memorias asociativas $\alpha\beta$ hacen su aparición [23]; aunque difiere la relación de orden para asociar los patrones entre las $\alpha\beta$ y las morfológicas, las primeras, siguen el esquema de aprendizaje y recuperación definido por las memorias morfológicas.

Esta nueva familia ha resultado muy eficiente en la recuperación de patrones afectados con ruido aditivo y sustractivo, pero son ineficaces ante el ruido mezclado [34]. Para resolver este problema exitosamente, las memorias morfológicas presentan un modelo llamado “kernel”. Por otro lado, las memorias $\alpha\beta$ proponen un modelo heurístico, basado principalmente en las dos operaciones básicas de la morfología matemática que son: la erosión y la dilatación. Cabe destacar, que tanto el modelo de “kernel” como el modelo “heurístico” aplican a esta familia de memorias asociativas, sin embargo, aunque ambos modelos resuelven el problema con el ruido mezclado, lo hacen parcialmente.

El modelo de kernel es muy eficiente cuando el “kernel” es elegido apropiadamente. El problema radica en saber qué rasgos del patrón se deben tomar en cuenta para la creación de un kernel; el kernel generado *no debe ser afectado por ruido* para que el modelo funcione. Como se observa, la elección del kernel es un problema no trivial. Por el lado del modelo heurístico, éste sí resuelve el problema del ruido mezclado, pero tiende a tener problemas en la recuperación de patrones muy rápidamente y con porcentajes no muy altos de este tipo de ruido [34], no siendo una opción muy fiable para esta familia de memorias.

Sussner especifica las características que debe cumplir el kernel en imágenes binarias para que éstas sean aprendidas y recuperadas correctamente [52]. El grupo de investigación $\alpha\beta$ ha aportado importantes avances en pro de las memorias en álgebra min y max como, por mencionar algunos, el uso de las memorias $\alpha\beta$ en imágenes en tonos de gris y colores y las memorias bidireccionales $\alpha\beta$ [53] [54]. Sossa et.al. presentan, a través de la variación de la memoria autoasociativa morfológica max, una propuesta de cómo atacar el ruido mezclado haciendo uso de la mediana estadística para garantizar la recuperación completa [55]. Está claro que las investigaciones recientes en la familia de memorias asociativas en álgebra min y max han aportado conocimientos y avances que son relevantes y muy importantes, sin embargo, queda latente el saber cómo el ruido realmente se comporta en los patrones a recuperar, lo que implica que no ha sido atacado el problema real correctamente; se ha experimentado con el ruido distribuido en el dominio de la función en forma aleatoria, lo que implica que el desempeño de ésta familia de memorias asociativas puede ser mejor de lo que se ha mostrado en la literatura hasta el momento. A pesar de que se ha demostrado con investigaciones posteriores a la creación de las memorias morfológicas, que las memorias asociativas en álgebra min y max bajo ciertas condiciones puede ser robusta al ruido mezclado, siguen dependiendo de la obtención de un kernel que no sea afectado por el ruido para garantizar la recuperación correcta de los patrones.

En el capítulo 4 se mostrará un método para la elección de un kernel suficiente que resolverá el problema del ruido mezclado para esta familia de memorias. Mientras tanto, se describirá en las siguientes secciones cómo funciona el modelo de “kernel” y el modelo “heurístico”.

Modelo de “kernel”

En la sección 2.1.2 del capítulo anterior, se mostró la definición de las memorias asociativas morfológicas pero no se presentaron completas; el modelo de *kernel* es el modelo completo. En realidad lo es para toda la familia de memorias en álgebra min y max [21] [22].

El modelo de kernel se establece de la siguiente manera:

Definición 2.5 Sea $Z = (z^1, z^2, \dots, z^k)$ una matriz de $n \times k$. Se puede decir que Z es kernel de (X, Y) si y sólo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $M_{ZZ} \Delta X = Z$
2. $W_{ZY} \nabla Z = Y$

si efectivamente Z es el kernel de (X, Y) entonces: $W_{ZY} \nabla (M_{ZZ} \Delta X) = W_{ZY} \nabla Z = Y$.

En la figura 2.5, se muestra la fase de aprendizaje del modelo kernel y significa lo siguiente: el patrón X entra en un proceso de obtención del kernel, este proceso no está definido, como salida genera el patrón Z ; a su vez, el patrón Z es el patrón de

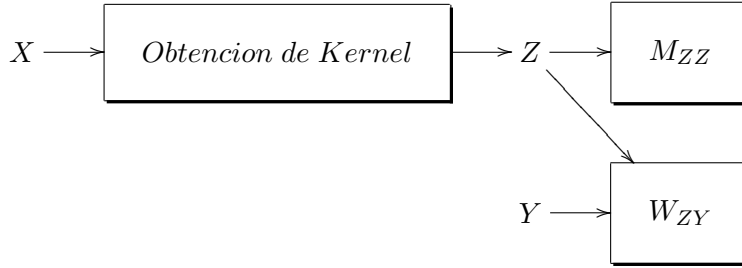


Figura 2.5: Fase de aprendizaje del modelo kernel.

entrada para entrenar la memoria autoasociativa M , acto seguido o paralelamente se entrena la memoria heteroasociativa con los patrones Z y Y . Así se define la fase de aprendizaje.

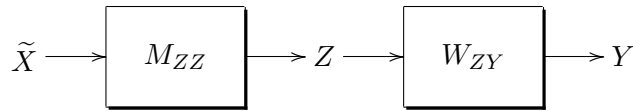


Figura 2.6: Fase de recuperación del modelo kernel.

La figura 2.6 muestra la fase de recuperación en el modelo de kernel. El patrón X está afectado con ruido mezclado y es presentado a un proceso donde se hace, primero, la recuperación con la memoria M ; segundo, el patrón recuperado por M , es decir Z sirve como patrón de entrada de la memoria W generando como resultado el patrón Y .

Memorias asociativas $\alpha\beta$

Las memorias asociativas $\alpha\beta$ presentan un modelo heurístico para resolver el problema del ruido mezclado [23]. El modelo híbrido o heurístico es presentado gráficamente en las figuras 2.7 y 2.8. El modelo híbrido consiste en:

1. Se aprende el conjunto fundamental $(x^\omega, y^\omega) \mid \omega = \{1, 2, \dots, p\}$ donde p representa la cardinalidad uno a uno del conjunto fundamental, con la memoria de tipo \bigvee
2. Se aprende el conjunto fundamental $(x^\omega, y^\omega) \mid \omega = \{1, 2, \dots, p\}$ donde p representa la cardinalidad uno a uno del conjunto fundamental, con la memoria de tipo \bigwedge
3. El patrón \tilde{x} que está afectado con ruido mezclado es erosionado obteniendo un vector columna "A"; el mismo patrón \tilde{x} es dilatado obteniendo un vector columna "B".

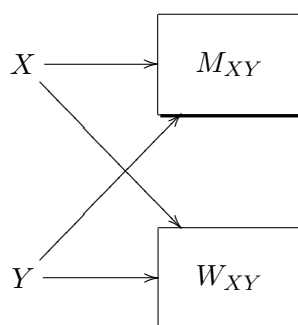


Figura 2.7: Fase de Aprendizaje del modelo heurístico.

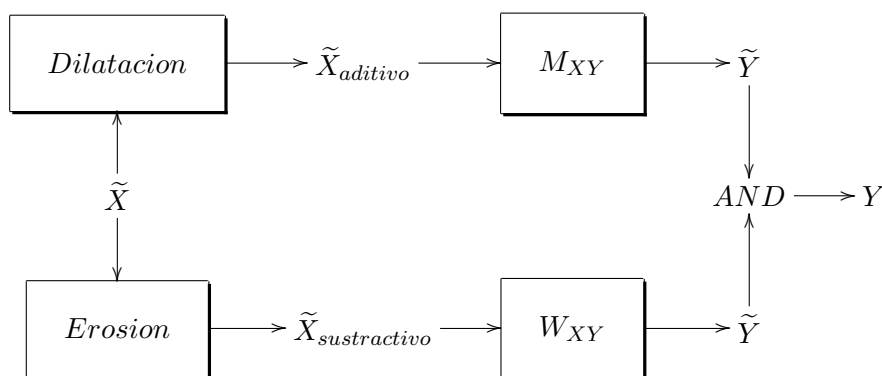


Figura 2.8: Fase de recuperación del modelo heurístico.

4. El vector columna "A", que para este momento el vector "A" es un patrón afectado con ruido sustractivo, es presentado a la memoria $\alpha\beta \bigwedge$, recuperando un patrón(vector columna "C") limpio de ruido.
5. El vector columna "B", que para este momento el vector "B" es un patrón afectado con ruido aditivo, es presentado a la memoria $\alpha\beta \bigvee$, recuperando un patrón(vector columna "D") limpio de ruido.
6. A los vectores columna(patrones) "C" y "D", se les aplica el operador lógico "AND", generando como resultado un vector columna limpio de ruido mezclado. Éste último es el patrón y^ω deseado.

Queda claro que estos modelos son interesantes y temas de estudio para esta familia de memorias asociativas, sin embargo, ambos tienen sus ventajas y desventajas. En este trabajo de tesis, se hace énfasis al modelo de kernel debido a que si éste se escoge acertadamente es un método muy seguro para la recuperación de patrones de manera completa. El método heurístico sale del interés de este trabajo.

Ya para este momento han surgido varias preguntas que son: ¿Qué es el ruido y cómo se presenta? y ¿Cómo las memorias asociativas en álgebra min y max pueden resolver este problema para obtener recuperaciones completas?

Las respuestas a estas cuestiones se responden en este trabajo de tesis. Se presentará la distribución real del ruido en los medios de adquisición, que es el ruido de interés a los investigadores en reconocimiento de patrones. Además, se propondrá una metodología que permitirá elegir los rasgos de un patrón (kernel); el kernel guardará una relación geométrica con el patrón original. El kernel garantizará, con un porcentaje alto de éxito, la recuperación en forma completa de un patrón aunque éste esté afectado con ruido mezclado.

Capítulo 3

Marco teórico

Las herramientas matemáticas que son imprescindibles para alcanzar el objetivo de este trabajo de tesis se describirán en este capítulo; la más destacada, de estas herramientas, es la “*transformada rápida de distancia*” (TRD). Ésta resulta ser piedra angular en la búsqueda del kernel optimal para la familia de las memorias asociativas en álgebra min y max en el caso binario. Antes de analizar la transformada rápida de distancia, es importante describir los espacios métricos debido a que estos son necesarios para la TRD.

3.1. Espacios métricos

Definición 3.1 Sea \mathbf{X} un conjunto. Una **métrica** en \mathbf{X} , también llamada *distancia*, es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que:

$$\begin{aligned}d(x, y) &= 0 \leftrightarrow x = y \text{ con } x, y \in X \\d(x, y) &= d(y, x) \forall x, y \in X \\d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X\end{aligned}$$

entonces la dupla (X, d) es llamado espacio métrico. Si d es una métrica, $X = \mathbf{Z}$ y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ entonces d es llamada métrica discreta.

3.1.1. Métricas

Sean $p = (x, y)$, $q = (u, v)$ puntos sobre \mathbb{Z}^2

1. $d_4(p, q) = |x - u| + |y - v|$
2. $d_8(p, q) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$
3. $d_{6R}(p, q) = \max\{|x - u|, |y - v|, |x - u + y - v|\}$
4. $d_{6L}(p, q) = \max\{|x - u|, |y - v|, |x - u - y + v|\}$

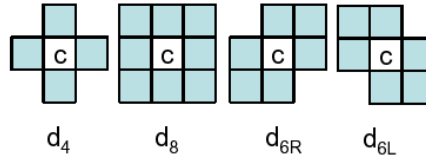


Figura 3.1: Representación de métricas discretas

Las métricas listadas anteriormente, mostradas en la figura 3.1, son llamadas discos cerrados de radio 1. Estos discos corresponden a las k -vecindades, donde $k \in \{4, 8, 6L, 6R\}$ y las distancias que hacen uso de estas vecindades se expresan como d_k [49] [50]. Estas k -vecindades son ampliamente usadas en el procesamiento digital de imágenes.

3.2. Transformada de distancia

Definición 3.2 *El mapeo TD:*

$$\begin{aligned}
 R &\subset X \subseteq \mathbb{Z}^2 \\
 f &: X \rightarrow \{0, 1\} \\
 f(x) = 1 &\leftrightarrow x \in R \quad y \quad f(x) = 0 \leftrightarrow x \notin R \\
 F &= \{(x, f(x)) | x \in X\} \\
 \delta &: X \rightarrow \mathbb{Z}^+ \\
 \delta(x) &= \min\{d(x, y) | y \in X - R\} \\
 \Delta &= \{(x, \delta(x)) | x \in X\} \\
 TD &: F \rightarrow \Delta \\
 TD((x, f(x))) &= (x, \delta(x))
 \end{aligned}$$

donde $d \in \{d_4, d_8, d_{6R}, d_{6L}\}$, F es una **imagen binaria**, Δ recibe el nombre de **Transformada de distancia**, la función δ se llama **transformación de distancia** y R es la **región de interés**.

La definición 3.2 quiere decir: que para una región de interés R , donde R es un conjunto de puntos x tales que $f(x) = 1$, al aplicar a x la transformación de distancia δ , se obtiene como resultado un conjunto de duplas $(x, \delta(x))$ tal que $\delta(x) \in \mathbb{Z}^+$. El resultado de esta transformación es una imagen en tonos de grises; cada valor de tono de gris representa la distancia numérica que tiene cada punto (pixel) con respecto a su complemento. Los resultados de la transformada de distancia se muestran gráficamente en la figura 3.2.

Algunas de las funciones más comunes para obtener medidas de distancia son:

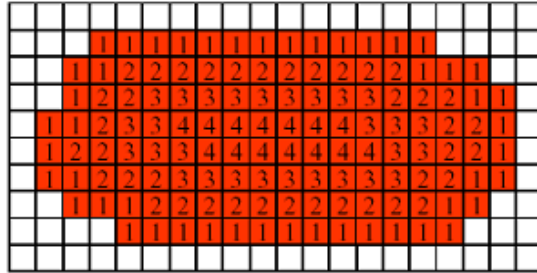


Figura 3.2: Transformada de distancia

- La Euclidiana

$$distancia([x, y], [i, j]) = \sqrt{(x - i)^2 + (y - j)^2}$$

- La City-block

$$distancia([x, y], [i, j]) = |x - i| + |y - j|$$

- La Chessboard

$$distancia([x, y], [i, j]) = \max(|x - i|, |y - j|)$$

El algoritmo 3.1 muestra cómo la transformada de distancia se comporta. En primera instancia, se barre la imagen hasta encontrar un píxel de la región (color blanco) en la coordenada (x, y) , al ubicarlo, se realiza un nuevo barrido de toda la imagen hasta encontrar todos los píxeles del complemento (color negro) en las coordenadas (i, j) , durante este barrido, la función *distancia* va encontrando la distancia mínima entre el píxel (x, y) de la región y algún píxel del complemento, al finalizar el barrido de (i, j) se habrá encontrado la distancia mínima; ahora bien, la distancia mínima se asigna a la posición (x, y) de la misma imagen. Se continúa el barrido a partir de la coordenada $(x + 1, y)$ y al encontrar otro píxel de la región, nuevamente se realiza el barrido de toda la imagen hasta encontrar todos los píxeles del complemento y obtener la siguiente distancia mínima. Este proceso concluye al terminar el barrido de todos los píxeles de la región de la imagen. Como se observa en el algoritmo 3.1, se hace uso de 4 ciclos *for*, dos para el barrido en las coordenadas (x, y) y los otros dos para el barrido en las coordenadas (i, j) ; visto lo anterior, claramente se puede determinar que la complejidad para el algoritmo de la transformada de distancia es $O(n^2)$, es decir de orden cuadrático.

En la línea 8 del algoritmo 3.1 se hace referencia a la función *distancia*, esa función puede ser la Euclidiana, la City-block o la Chessboard.

Algoritmo 3.1: Algoritmo de la Transformada de Distancia

```

1 for  $y = 0$  to  $imagenBinaria \rightarrow altoDeImagen - 1$  do
2   for  $x = 0$  to  $imagenBinaria \rightarrow anchoDeImagen - 1$  do
3      $min = 255$ ;
4     if  $imagenBinaria \rightarrow Getpixel(x, y) = 1$  then
5       for  $j = 0$  to  $imagenBinaria \rightarrow altoDeImagen - 1$  do
6         for  $i = 0$  to  $imagenBinaria \rightarrow anchoDeImagen - 1$  do
7           if  $imagenBinaria \rightarrow Getpixel(i, j) = 0$  then
8              $d = distancia(imagenBinaria \rightarrow$ 
9                $Getpixel(x, y), imagenBinaria \rightarrow Getpixel(i, j))$ ;
10            if  $d < min$  then
11               $min = d$ ;
12            end
13          end
14        end
15      end
16       $imagenBinaria \rightarrow SetPixel(x, y, min)$ ;
17    end
18  end
19  $\delta = imagenBinaria$ ;

```

3.2.1. Transformada rápida de distancia

Teorema 3.3 si d es una de las métricas d_4, d_8, d_{6R}, d_{6L} y $N(c) = \{p_i \in \mathbb{Z}^2 \mid d(c, p_i) = 1\}$, para $c, p_i \in \mathbb{Z}^2$ y $c \neq p_i$ se tiene que:

1. $d(c, p) = \min\{d(p, p_i) : p_i \in N(c)\} + 1$
2. $d(c, p) = \max\{d(p, p_i) : p_i \in N(c)\} - 1$

La demostración del teorema 3.3 se encuentra en [50].

El teorema 3.3 permite definir lo siguiente:

Si se tiene la transformada de distancia de los vecinos de c se puede encontrar la transformación de distancia $\delta(c)$, donde

$$\delta(c) = \min\{\delta(c) + 1\}$$

ahora se tiene la una transformada de distancia en 2 pasos:

1. Barrer la imagen binaria de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Para cada pixel $c \in R$, donde R es la región de interés, se asigna:

$$\delta(c) = 1 + \min(\delta(p_j) : p_j \in E)$$

E es alguno de los siguientes conjuntos (mostrados en la figura 3.3) según la métrica a utilizar:

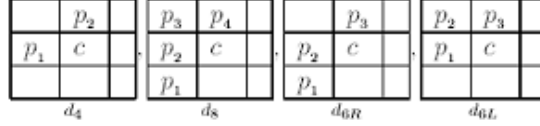


Figura 3.3: Conjunto de métricas para el barrido de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo del algoritmo de la TRD.

solo los puntos asignados en E son usados en la primera parte de la transformación.

2. Barrer la imagen binaria de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda. Para cada pixel $c \in R$, donde R es la región de interés, se asigna:

$$\delta(c) = \min\{\delta(c), 1 + \min\{\delta(p_i) : p_i \in D\}\}$$

D es alguno de los siguientes conjuntos según la métrica a utilizar; solo los puntos asignados en D son usados para la segunda parte de la transformación:

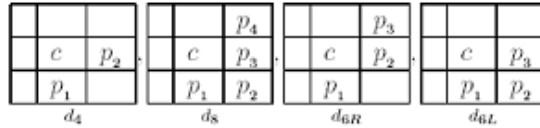


Figura 3.4: Conjunto de métricas para el barrido de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda del algoritmo de la TRD.

La implementación de los dos barridos de la imagen que propone la transformada rápida de distancia se muestra en el algoritmo 3.2; en ambos barridos de la imagen, es necesario encontrar un pixel de la región para determinar la distancia mínima acotada por la vecindad definida por la métrica utilizada. El resultado de aplicar este algoritmo con una distancia $d4$ se muestra en la figura 3.5.

El algoritmo 3.2 muestra la implementación de la TRD. De la línea 2 a la 17 se observa el primer barrido sobre la imagen; dado que sólo se realiza un barrido, es evidente que la complejidad de esta parte del algoritmo es de orden $O(n)$, es decir, de orden lineal. De las líneas 19 a la 38, se establece que la complejidad de este segundo barrido es de orden $O(n)$. Dicho lo anterior, se deduce que el algoritmo de la transformada rápida de distancia tiene una complejidad computacional de $2n$ por lo tanto su complejidad sigue siendo de orden $O(n)$, es decir, lineal.



Figura 3.5: resultado del algoritmo de la TRD

Cómo se puede observar la transformada rápida de distancia, por ser de complejidad lineal es mucho más rápida que la transformada de distancia convencional, sin embargo, la TRD tiene otras ventajas, que son:

1. TRD es mucha más rápida debido a que sólo requiere calcular mínimos en un conjunto de cardinalidad fija.
2. El tiempo de procesamiento es constante para cualquier imagen binaria.
3. El resultado de TRD siempre es el mismo haciendo uso de la misma métrica.

Algoritmo 3.2: Algoritmo de la Transformada Rápida de Distancia

```

1 //primerBarrido;
2 for y = 1 to imagenBinaria → altoDeImagen - 1 do
3   for x = 1 to imagenBinaria → anchoDeImagen - 1 do
4     a = imagenBinaria → Getpixel(x, y);
5     if a then
6       b = imagenBinaria → GetPixel(x, y - 1);
7       c = imagenBinaria → GetPixel(x - 1, y);
8       if b < a then
9         | a = b;
10      end
11      if c < a then
12        | a = c;
13      end
14      imagenBinaria → SetPixel(x, y, a + 1);
15    end
16  end
17 end
18 //segundoBarrido;
19 for y = imagenBinaria → altoDeImagen - 1 to 1 do
20   for x = imagenBinaria → anchoDeImagen - 1 to 1 do
21     a = imagenBinaria → Getpixel(x, y);
22     if a then
23       b = imagenBinaria → GetPixel(x + 1, y);
24       c = imagenBinaria → GetPixel(x, y + 1);
25       if b < a then
26         | a = b;
27       end
28       if c < a then
29         | a = c;
30       end
31       a ++;
32       if imagenBinaria → GetPixel(x, y) < a then
33         | a = imagenBinaria → GetPixel(x, y);
34       end
35       imagenBinaria → SetPixel(x, y, a);
36     end
37   end
38 end
39 δ = imagenBinaria;

```

Capítulo 4

Desarrollo

En este capítulo se describirá detalladamente el procedimiento de selección del kernel optimal para que las memorias basadas en álgebra min y max recuperen de manera completa los patrones a pesar de que estos últimos estén alterados con ruido mezclado. Previo a lo anterior, se establecerá la distribución real del ruido en los medios de adquisición y se mostrará cómo la transformada rápida de distancia permite modelar el ruido en los medios de adquisición. La parte final de este capítulo presentará un modelo de memorias heteroasociativas en álgebra min y max que, al hacer uso del kernel optimal, serán robustas al ruido mezclado.

4.1. Ruido

Todos los investigadores que trabajan en reconocimiento de patrones asumen que el ruido se distribuye sobre el dominio de la función y los investigadores que trabajane en señales asumen que el ruido se distribuye sobre el rango de la función y esto lo muestran a través de la relación señal-ruido; de hecho, tiene más sentido hablar de la relación señal-ruido que la distribución en el dominio, porque para que haya ruido tiene que existir señal que la porte. *En este trabajo de tesis se asume que el ruido existe y se distribuye sobre el rango de la función además de sobre el dominio.*

Premisa

El ruido se concentra donde la información existe y en donde existe ahí se distribuye tomando en cuenta la amplitud de la señal.

Existen dos tipos de ruidos, el de adquisición y el de transmisión; donde el primero es generado por los dispositivos electrónicos como por ejemplo los sensores de adquisición y el segundo es ocasionado por los medios de comunicación al transmitir la información. Es importante destacar que el ruido de transmisión ha sido tratado con los métodos existentes en el reconocimiento de patrones, lo que incluye a las memorias asociativas, por tal razón éste no es de importancia para este trabajo de tesis. *El ruido de adquisición es el más importante dado que es el que se pretende atacar en*

el reconocimiento de patrones, pero no ha sido tratado correctamente porque no existe un modelo completo que defina su correcta distribución.

Como se supone que el ruido se distribuye donde hay señal, el modelo propuesto se basa en una distribución de señales a lo largo de las líneas equipotenciales a la señal en el dominio de éstas, es decir con base a la Transformada de distancia.

Se asume que cada dispositivo de adquisición de datos tiene una distribución de probabilidades propia y que a partir de ésta se puede crear un kernel basado en la Transformada Rápida de Distancia que minimice la probabilidad de que el proceso de adquisición de datos afecte.

A continuación se describirán los algoritmos que permiten obtener y simular la distribución del ruido adquirido; el conocer la distribución del ruido permite determinar la probabilidad de que éste afecte un patrón en partes específicas, lo que permitirá saber qué partes del patrón sirvan como kernel.

4.1.1. Algoritmos de distribución de ruido obtenido por los medios de adquisición en imágenes binarias y tonos de gris basándose en Transformada de Distancia

Se asume que el ruido en los medios de adquisición al digitalizarse una imagen binaria, éste se distribuye en los bordes, por tal razón, es necesario contar con una herramienta que permita determinar cuántos píxeles afectó, hayan sido de borde o cercanos a éste. La Transformada Rápida de Distancia es esta herramienta, dado que proporciona información de cada pixel, indicando qué tan alejados están éstos de su borde, por lo tanto *la TRD es piedra angular para determinar y modelar la distribución del ruido en los medios de adquisición.*

Para saber la distribución del ruido en los medios de adquisición es necesario referenciar algunas de las imágenes binarias que han sido usadas en el presente trabajo de tesis, además de hacer uso de la TRD. Para determinar con exactitud a qué píxeles afectó el ruido generado por los medios de transmisión es necesario aplicar el algoritmo 4.1.

El algoritmo 4.1 realiza comparaciones en las coordenadas (x, y) entre la imagen original y la imagen escaneada; en primer instancia, en la imagen original se pregunta si el pixel de la coordenada (x, y) es un pixel negro (elemento del complemento del conjunto), entonces, se procede a preguntar si el pixel de la imagen escaneada en la misma coordenada que el de la imagen original es blanco, de ser verdadera la respuesta, indica que hay variación entre imágenes, es decir es un pixel ruidoso; esa coordenada, de la imagen escaneada, tiene un mapeo en la distancia contenida en $\delta 2$ (TRD del complemento); esa coordenada es un pixel ruidoso en la distancia n , por lo tanto se almacena en un arreglo ($h2$, histogramas de incidencias de distancias afectadas) en la posición n , comenzando el conteo de cuántas veces la distancia n es afectada en las comparaciones. Ahora bien, si el pixel en la coordenada (x, y) de la imagen original es blanco (elemento del conjunto), entonces pregunta nuevamente el algoritmo, si el pixel

Algoritmo 4.1: Algoritmo de distribucion de ruido en bordes

```
1  $\delta 1(imagenOriginal)$ ;  
2  $\delta 2(complementoDeImagenOriginal)$ ;  
3  $h1[255]$ ;  
4  $h2[255]$ ;  
5 for  $y = 0$  to  $AltoDeImagen - 1$  do  
6   for  $x = 0$  to  $AnchoDeImagen - 1$  do  
7      $c1 = imagenOriginal \rightarrow GetPixel(x, y)$ ;  
8      $c2 = \delta 1 \rightarrow GetPixel(x, y)$ ;  
9      $c3 = \delta 2 \rightarrow GetPixel(x, y)$ ;  
10     $c4 = imagenEscaneada \rightarrow GetPixel(x, y)$ ;  
11    if  $!c1$  then  
12      if  $c4$  then  
13         $h2[c3] ++$ ;  
14      end  
15    end  
16    else  
17      if  $!c4$  then  
18         $h1[c2] ++$ ;  
19      end  
20    end  
21    for  $i = 255$  to  $1$  do  
22       $Graficar(-i, h2[i])$ ;  
23    end  
24    for  $i = i$  to  $255$  do  
25       $Graficar(i, h1[i])$ ;  
26    end  
27  end  
28 end
```

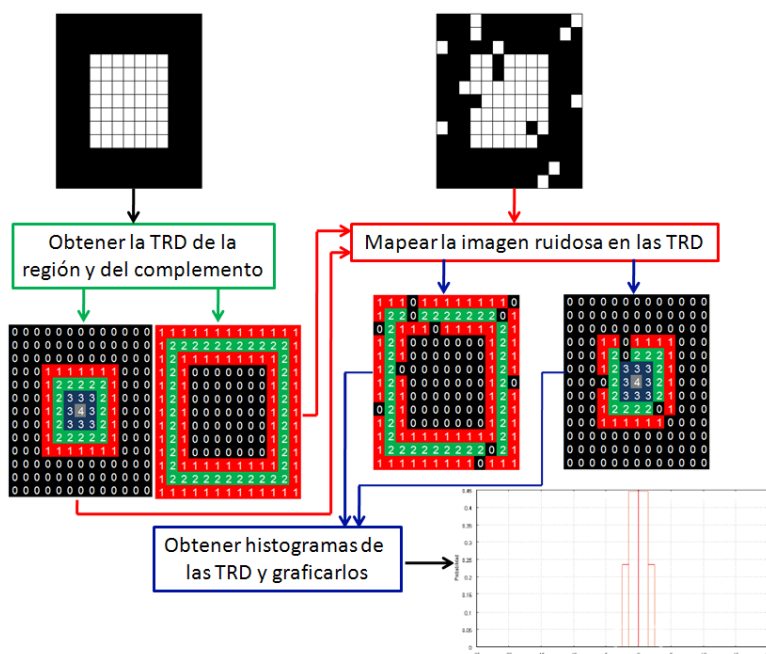


Figura 4.1: Esquema que ilustran el algoritmo 4.1.

de la imagen escaneada en la misma coordenada que el de la imagen original es negro, entonces, de ser verdad, existe variación entre imágenes, es decir es un pixel ruidoso; esa coordenada, de la imagen escaneada, tiene un mapeo en la distancia contenida en $\delta 1$ (TRD del conjunto); esa coordenada es un pixel ruidoso en la distancia n , por lo tanto se almacena en un arreglo ($h1$) en la posición n , comenzando el conteo de cuántas veces la distancia n es afectada en las comparaciones. Por último, se grafica los valores contenidos en los arreglos $h1$ y $h2$ para mostrar la distribución del ruido en las imágenes que se obtuvieron a través de los medios de adquisición. Se destaca que la distancia 0 no existe en la TRD, por tal razón, los ciclos que grafican no concideran la posición 0 de los arreglos. Este algoritmo *permitirá generar la distribución real del ruido en imágenes binarias en los medios de adquisición*. La figura 4.1 muestra imágenes binarias usadas como ejemplo, para ilustrar la obtención de la distribución de ruido por medio del algoritmo 4.1.

Dado que la TRD provee el mecanismo necesario para determinar la distribución del ruido en los medios de adquisición, por ende permite simular dicha distribución. El algoritmo 4.2 muestra como simularlo.

El algoritmo 4.2 realiza los siguientes procesos:

1. La obtención de la TRD de la imagen binaria original y la de su complemento; la TRD muestra las distancias de cada pixel con respecto a su complemento, con ésta es facil determinar qué pixeles son de borde o cuáles están cerca del borde. Ver sección 3.2.1.

2. La obtención de los histogramas de las transformadas rápidas de distancia de la imagen original y la de su complemento. Mediante los histogramas se puede obtener las frecuencias acumuladas de todas las distancias, que conforman las imágenes.
3. La obtención de la distancia exacta hasta donde el ruido será distribuido en la imagen binaria basándose en el arreglo *porcentajeDeRuidoPorDistancia*; este arreglo, que contiene el porcentaje de ruido que afectará a cada distancia (la posición en el arreglo indica la distancia), es pasado como argumento; para determinar la cantidad de ruido que afectará a la imagen, es necesario calcular la distancia máxima que afectará el ruido, además, por medio de una regla de tres se determina el número de píxeles a afectar por el ruido en el conjunto y en su complemento; cabe destacar que el porcentaje del ruido es dividido entre 2 dado que se hace una distribución uniforme tanto en el complemento como en el conjunto. Finalmente se almacenan la cantidad de píxeles que se afectarán en cada distancia en el arreglo v .
4. La generación de ruido en los bordes del conjunto. Para cada distancia que será afectada por el ruido, aleatoriamente se escogieran coordenadas (x, y) que serán cambiadas de color blanco a negro; este proceso se terminará cuando a cada distancia afectada por ruido se hayan completado el número de píxeles a afectar previamente calculados y almacenados en la variable v .
5. La generación de ruido en los bordes del complemento. Para cada distancia que será afectada por el ruido, aleatoriamente se escogieran coordenadas (x, y) que serán cambiadas de color negro a blanco; este proceso se terminará cuando a cada distancia afectada por ruido se hayan completado el número de píxeles a afectar previamente calculados y almacenados en la variable v .
6. La generación de ruido en el complemento. Aleatoriamente se escogieran coordenadas (x, y) que serán cambiadas de color negro a blanco; este proceso terminará cuando se hayan completado el número de píxeles a afectar. Este proceso generará algunos puntos blancos en el área del complemento. No tiene relación el que se determine la cantidad de puntos aleatorios que aparecerán en el complemento con la distancia máxima, sólo fue una convención el usarlo porque genera pocos puntos blancos.

La figura *redistribucion-Binaria-simulada* muestra de manera gráfica como se simula el ruido de adquisición en una imagen binaria a través del algoritmo 4.2.

Distribución del ruido en imágenes en tonos de gris en medios de adquisición

Para determinar la distribución real del ruido adquirido en las imágenes en tono de gris es necesario aplicar el algoritmo 4.3.

El algoritmo 4.3 hace un barrido de la imagen original y de la imagen escaneada al mismo tiempo, restando el valor del tono de gris de la imagen original del valor del

Algoritmo 4.2: Algoritmo de ruido en bordes simulado

```

1 Ruido En Bordes Simulado( int *porcentajeDeRuidoPorDistancia )
    $\delta_1$ (imagenOriginal);  $\delta_2$ (complementoDeImagenOriginal);
2 r1[255]; r2[255];
3 r1 = Histograma( $\delta_1$ ); r2 = Histograma( $\delta_2$ );
4 for d = 1 to  $\infty$  do
5   | if !porcentajeDeRuidoPorDistancia[d] then
6   |   | salirDelCicloFor;
7   | end
8   | valor = (porcentajeDeRuidoPorDistancia[d]/2)  $\times$  r[2]/100;
9 end
10 distancias = d - 1;
11 //RuidoEnConjunto;
12 for i = 1 to distancias do
13   | contador = 0;
14   | while contador  $\leq$  v[i] do
15   |   | x1 = rand() %ImagenOriginal  $\rightarrow$  AnchoDeImagen;
16   |   | y1 = rand() %ImagenOriginal  $\rightarrow$  AltoDeImagen;
17   |   | if  $\delta_1 \rightarrow$  GetPixel(x1,y1)  $\geq$  i then
18   |   |   | imagenRuidosa  $\rightarrow$  SetPixel(x1,y1,0);
19   |   |   | contador ++;
20   |   | end
21   | end
22 end
23 //RuidoEnComplemento;
24 for i = 1 to distancias do
25   | contador = 0;
26   | while contador  $\leq$  v[i] do
27   |   | x1 = rand() %ImagenOriginal  $\rightarrow$  AnchoDeImagen;
28   |   | y1 = rand() %ImagenOriginal  $\rightarrow$  AltoDeImagen;
29   |   | if  $\delta_2 \rightarrow$  GetPixel(x1,y1)  $\geq$  i then
30   |   |   | imagenRuidosa  $\rightarrow$  SetPixel(x1,y1,1);
31   |   |   | contador ++;
32   |   | end
33   | end
34 end
35 //RuidoEnComplemento;
36 contador = 0;
37 sum2 = rand() %v[distancias];
38 while contador  $\leq$  sum2 do
39   | x1 = rand() %ImagenOriginal  $\rightarrow$  AnchoDeImagen;
40   | y1 = rand() %ImagenOriginal  $\rightarrow$  AltoDeImagen;
41   | if  $\delta_2 \rightarrow$  GetPixel(x1,y1)  $\geq$  i then
42   |   | imagenRuidosa  $\rightarrow$  SetPixel(x1,y1,1);
43   |   | contador ++;
44   | end
45 end

```

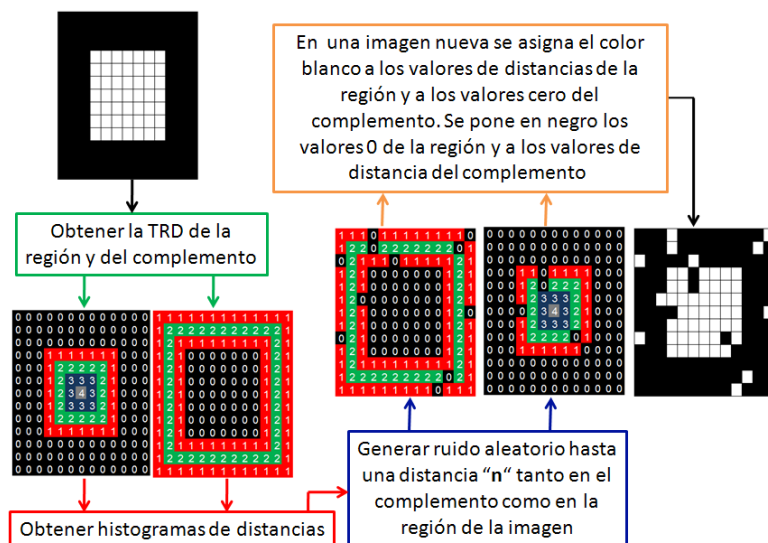


Figura 4.2: Esquema que ilustran el algoritmo 4.2.

tono de gris de la imagen escaneada (ambos tonos de gris en la misma coordenada) y guardando el resultado en la variable *dif*; la variable *dif* es la distancia que indica en cuántas unidades se movió el tono de gris de la imagen escaneada con respecto al tono de gris de la imagen original. Si la variable *dif* es positiva se almacena en el arreglo *h1* en caso contrario se almacena en el arreglo *h2*; ambos arreglos representan histogramas, el *h1* es el de ruido aditivo y el *h2* es el del ruido sustractivo. Es importante destacar que esté algoritmo funje como una Transformada de Distancia, sin embargo no lo es como tal, pero sí muestra la distribución real del ruido de adquisición en imágenes en tonos de gris en función a distancias, lo que permite concluir que el ruido adquirido en imágenes en tono de gris está en función a distancias, así como sucedió en el caso de las imágenes binarias. Este algoritmo es de vital importancia porque servirá como base para crear la distribución de ruido adquirido en imágenes en tonos de gris. Las imágenes de la figura 4.3 y la distribución de la figura ?? ilustran lo anteriormente comentado.

Al contar con la distribución real del ruido en las imágenes en tono de gris se puede simular éste y para hacerlo es necesario aplicar el algoritmo 4.4.

El algoritmo 4.4, en primera instancia, define un arreglo *D* de enteros con un tamaño de 512; donde cada índice *i* (que se relaciona con una distancia *i*) del arreglo *D* representa la suma acumulada de probabilidad de que el ruido afecte esa distancia *i*. El arreglo *f1* es la distribución obtenida del ruido en los medios de adquisición, el ruido está distribuido de la distancia -256 a la 256 ; recuerdese que las distancias negativas representan al ruido sustractivo y las positivas representan al ruido aditivo.

La figura 4.4 muestra esquemáticamente como funciona el algoritmo 4.4, donde tiene como entrada la imagen en tonos de gris y la distribución real de ruido.

Algoritmo 4.3: Algoritmo de ruido de adquisición en imágenes en tonos de gris

```

1 for  $y = 0$  to  $AltoDeImagen - 1$  do
2   for  $x = 0$  to  $AnchoDeImagen - 1$  do
3      $col1 = imagenOriginal \rightarrow GetPixel(x, y);$ 
4      $col2 = imagenEscaneada \rightarrow GetPixel(x, y);$ 
5      $dif = col1 - col2;$ 
6     if  $dif > 0$  then
7       |  $h1[dif] ++;$ 
8     end
9     else
10    |  $h2[dif] ++;$ 
11    end
12  end
13 end
14 for  $i = 255$  to  $1$  do
15 |  $Graficar(-i, h2[i]);$ 
16 end
17 for  $i = 1$  to  $255$  do
18 |  $Graficar(i, h2[i]);$ 
19 end

```

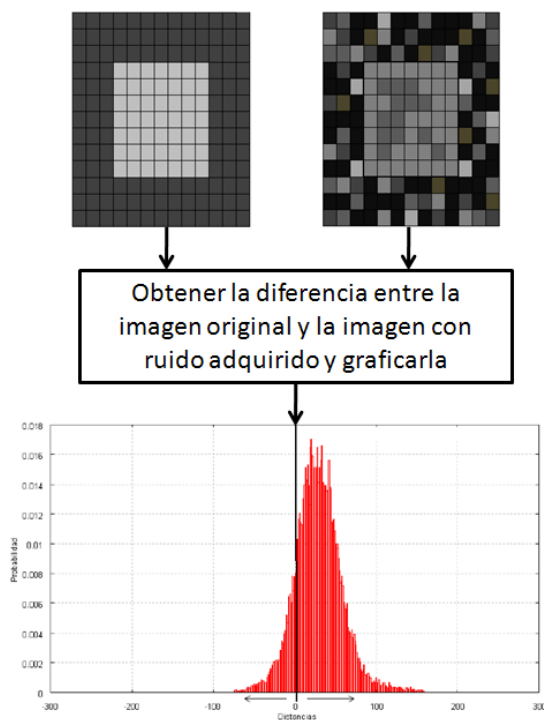


Figura 4.3: Esquema que ilustran el algoritmo 4.3.

Algoritmo 4.4: Algoritmo de distribución real de ruido de adquisición simulado

```
1 Imagen * imagenRuidosa;  
2  $d = 512$ ;  
3  $j = 0$ ;  
4  $i = 0$ ;  
5  $s = 0$ ;  
6  $D[d]$ ;  
7 while  $i < d$  and  $j < d$  do  
8   if  $s < i$  then  
9      $s+ = f1[j ++] \times d$ ;  
10  end  
11  else  
12     $D[i ++] = j - 256$ ;  
13  end  
14 end  
15 for  $y = 0$  to  $A \rightarrow \text{AltoDeImagen} - 1$  do  
16   for  $x = 0$  to  $A \rightarrow \text{AnchoDeImagen} - 1$  do  
17      $r = \text{rand}() \% d$ ;  
18      $gris = \text{Imagen} \rightarrow \text{GetPixel}(x, y)$ ;  
19      $gris+ = D[r]$ ;  
20     if  $gris > 255$  then  
21        $gris = 255$ ;  
22     end  
23     if  $gris < 0$  then  
24        $gris = 0$ ;  
25     end  
26      $\text{ImagenRuidosa} \rightarrow \text{SetPixel}(x, y, gris)$ ;  
27   end  
28 end
```

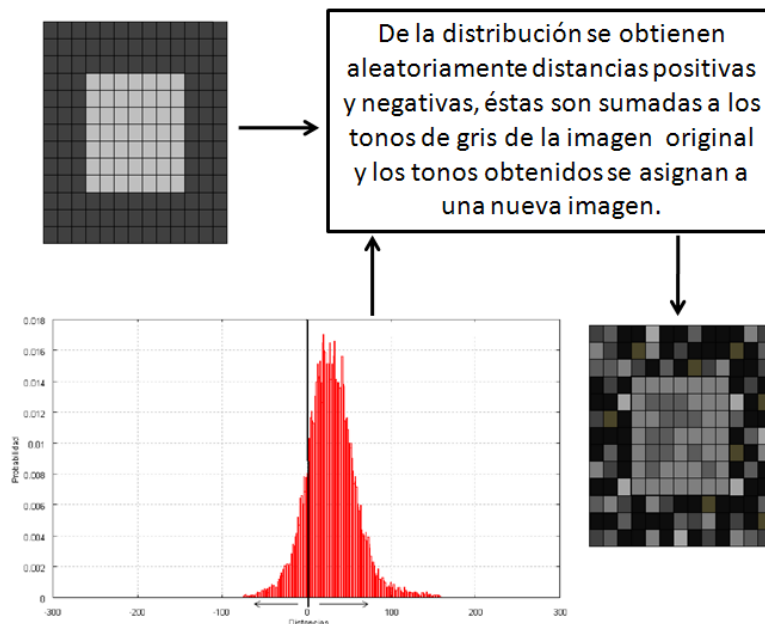


Figura 4.4: Esquema que ilustran el algoritmo 4.4.

4.1.2. Función de probabilidad de ruido

Definición 4.1 Sea f una función que va de P a A , es decir, $f : P \rightarrow A$, la función afectada por el ruido queda expresada por:

$$f^* = f + r = \pi(t) + \psi(\tau(f)) + \kappa(P) \quad (4.1)$$

donde:

- $\pi(t)$ es una función aleatoria dependiente del tiempo t e independiente de f .
- $\psi(\tau(f))$ es una función aleatoria dependiendo de una medida τ tomada a partir de los datos obtenidos.
- $\kappa(P)$ es una función aleatoria dependiente de p del dominio $p \in f, P$ de la información con ruido.

$\pi(t)$ representa el ruido de transmisión y es independiente a la información transmitida. $\psi(\tau(f))$ es el ruido de adquisición que está en función a una medida τ . $\kappa(P)$ es conocido con ruido geométrico.

El ruido esquemáticamente se puede ver como se muestra en la figura 4.5.

Dado que $\pi(t)$ ha sido tratado y atacado en el reconocimiento de patrones, lo que incluye a las memorias asociativas en álgebra \min y \max , no es de interés para este trabajo de tesis; además, $\kappa(P)$ es el ruido geométrico introducido por los dispositivos de adquisición (que el modelado de este ruido queda fuera del presente trabajo), se asume que $\pi(t)$ y $\kappa(p)$ son 0, por lo tanto el ruido a considerar es $\psi(\tau(f))$.

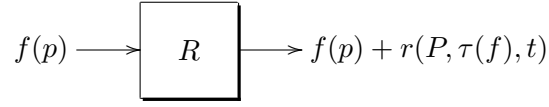


Figura 4.5: Esquema de ruido.

Definición 4.2 La probabilidad de que un punto $p \in P$ esté afectado por el ruido r dado que su medida de distancia $\tau(p) = i$ se expresa como:

$$P_r(p|\tau(p) = i) \quad (4.2)$$

donde $\tau(p)$ representa una distancia en particular tomada de la Transformada Rápida de Distancia afectada por ruido y obtenida de $\psi(\tau(f))$.

Lema 4.3 $P_r[(p|\tau(p) = d_1) \cap (p|\tau(p) = d_2)] = 0$ si $d_1 \neq d_2$

Demostración. Por contradicción; supóngase que $P_r[(p|\tau(p) = d_1) \cap (p|\tau(p) = d_2)] \neq 0$, entonces, existe un evento de ruido en p con $\tau(p) = d_1$ y $\tau(p) = d_2$ al mismo tiempo, pero τ es una medida, por lo tanto es un mapeo y no es posible que tenga valores diferentes. ■

Corolario 4.4 $P_r(p|\tau(p) = d_1)$ y $P_r(p|\tau(p) = d_2)$ son eventos independientes.

Demostración. Consecuencia directa del lema 4.3. Dado que τ es una medida, es decir, una distancia, la probabilidad de que un evento en p afecte el ruido a esta distancia es única; ahora bien, la única forma de que se afecte una distancia diferente es a través de otro evento de probabilidad de ruido, por lo tanto, $P_r(p|\tau(p) = d_1)$ es independiente de $P_r(p|\tau(p) = d_2)$. ■

Corolario 4.5 $P_r[(p|\tau(p) = d_1) \cup (p|\tau(p) = d_2)] = P_r[(p|\tau(p) = d_1) + (p|\tau(p) = d_2)]$.

Demostración. El corolario 4.4 demostró que $(p|\tau(p) = d_1)$ es evento independiente de $(p|\tau(p) = d_2)$; es decir, las probabilidades de que un evento de ruido en p afecte a dos distancias diferentes en tiempos diferentes son distintas, esto indica que la unión de las dos probabilidades es la suma de ambas probabilidades, por lo tanto,

$$P_r[(p|\tau(p) = d_1) \cup (p|\tau(p) = d_2)] = P_r[(p|\tau(p) = d_1) + (p|\tau(p) = d_2)] \quad (4.3)$$

■

Lema 4.6 $P_r(\bigcup_{d=d_1}^{d_2} (p|\tau(p) = d)) = \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d)$.

Demostración.

Por el lema 4.3 y por su corolario 4.5 se tiene que:

$$P_r\left(\bigcup_{d=d_1}^{d_2} (p|\tau(p) = d)\right) = \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d). \quad (4.4)$$

■

Teorema 4.7 $P_r(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2) = \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d)$.

Demostración.

$$P_r(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2) = P_r\left(\bigcup_{d=d_1}^{d_2} (p|\tau(p) = d)\right).$$

por el lema 4.6 se tiene:

$$P_r(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2) = \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d) = \bigcup_{d=d_1}^{d_2} (p|\tau(p) = d). \quad (4.5)$$

■

Corolario 4.8 $P_r(p| -d_1 \leq \tau(p) \leq d_1) = \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d)$

Demostración. Consecuencia directa del teorema 4.7 con $d_1 = -d_1$ y $d_2 = d_1$. ■

Corolario 4.9 $P_r^-(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2) = 1 - \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d)$, donde P_r^- significa la probabilidad complementaria a P_r .

Demostración.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{d=-\infty}^{\infty} P_r(p|\tau(p) = d) \\ &= \sum_{d=-\infty}^{d_1-1} P_r(p|\tau(p) = d) + \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d) + \sum_{d=d_2+1}^{\infty} P_r(p|\tau(p) = d) \\ 1 &= P_r(p|\tau(p) < d_1 \vee \tau(p) > d_2) + P_r(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P_r^-(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2) = 1 - \sum_{d=d_1}^{d_2} P_r(p|\tau(p) = d). \quad (4.6)$$

■

Lema 4.10 $P_r(p|r \text{ es aditivo}) = \sum_{d=-1}^{-\infty} (p|\tau(p) = d)$.

Demostración. Por definición, el ruido aditivo existe en el complemento de la región, por lo tanto $\tau(p) < 0$ entonces

$$P_r(p|r \text{ es aditivo}) = P_r\left(\bigcup_{d=-1}^{-\infty} (p|\tau(p) = d)\right) = \sum_{d=-1}^{-\infty} (p|\tau(p) = d). \quad (4.7)$$

■

Lema 4.11 $P_r(p|r \text{ es sustractivo}) = \sum_{d=1}^{\infty} (p|\tau(p) = d)$.

Demostración. Por definición, el ruido sustractivo existe en la región, por lo tanto $\tau(p) > 0$ entonces

$$P_r(p|r \text{ es sustractivo}) = P_r\left(\bigcup_{d=1}^{\infty} (p|\tau(p) = d)\right) = \sum_{d=1}^{\infty} (p|\tau(p) = d). \quad (4.8)$$

■

4.2. Kernel Optimal basado en la TRD

Dada una función $\psi(\tau)$ que muestra la distribución de ruido de adquisición y asumiendo que el ruido se distribuye a partir de los bordes y a su alrededor, el teorema 4.7 y el corolario 4.8 muestran que es posible encontrar un rango de distancias a partir de d_1 hasta d_2 de dicha distribución en donde la probabilidad de que el ruido afecte es alta; ahora bien, el kernel se construye partir de la hipótesis de que el ruido se distribuye por los bordes y que basta con realizar erosiones que eliminen el rango comprendido entre las distancias d_1 y d_2 obtenidas del teorema 4.7 y conservando las restantes. Al realizar las erosiones el probable ruido restante puede ser visto como ruido aditivo (si se construye el kernel con las distancias de la región), al cual las memorias de tipo M son robustas y si las distancias del kernel sobrantes de la erosión son las del complemento entonces el tipo de ruido es sustractivo, a este tipo de ruido son robustas las memorias W . Se asume que al tratar con el complemento de la región que conformará el kernel, se conservarán rasgos singulares que serán diferenciables con otros patrones, reduciendo el riesgo de que uno o varios patrones puedan ser memorizados por convertirse en subconjunto o superconjunto de otros.

Nota 4.12 *El término erosión usado en este trabajo de tesis no es la operación morfológica de la erosión que está definida en la morfología matemática, sino que se refiere, a la operación de resta realizada entre dos niveles de gris de una imagen.*

4.2.1. Generación del kernel para imágenes binarias

Definición 4.13 *Dada una función $\psi(\tau)$ y escogidas las distancias d_1 (distancia probable afectada por ruido en el complemento de la región) y d_2 (distancia probable afectada por ruido en la región) que satisfagan a $P_r(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2)$ se procederá a construir el kernel optimal binario de la siguiente manera:*

1. Realizar erosiones hasta la distancia d_2 de $\delta 1$.
2. Binarizar $\delta 1$ erosionada.
3. Obtener el negativo de $\delta 1$ erosionada.

4.2.2. Generación del kernel para imágenes en tonos de gris

Definición 4.14 Dada una función $\psi(\tau)$ y escogidas las distancias d_1 y d_2 que satisfagan a $P_r(p|d_1 \leq \tau(p) \leq d_2)$ se procederá a construir el kernel optimal binario de la siguiente manera:

1. Normalizar la distribución del histograma de la imagen en tonos de gris con la finalidad de contrastar uniformemente la imagen.
2. Erosionar la imagen con un elemento de estructura de radio 1 con valor d en su rango.
3. Obtener el negativo de la imagen erosionada.

4.3. Nuevo Modelo de Memoria Heteroasociativas en Álgebra min y max robusta al ruido mezclado

Dado el teorema 4.7, los corolarios 4.4, 4.5, 4.8 y 4.9, además, de los lemas 4.3, 4.6, 4.10 y 4.11 y tomando como base una función de distribución de ruido de adquisición $\psi(\tau)$, es posible proponer un modelo genérico de memorias heteroasociativas en álgebra min y max robustas al ruido mezclado.

4.3.1. Modelo genérico de memoria heteroasociativa basada en álgebra min robusta a ruido mezclado

Antes de comenzar con la definición del nuevo modelo es necesario establecer que la familia de memorias asociativas en álgebra min y max (las morfológicas y las $\alpha\beta$) usan los mismos teoremas que muestran las condiciones suficientes y necesarias para que un patrón pueda ser aprendido y recuperado en forma completa, la diferencia estriba en que las memorias morfológicas hacen uso de máximos y mínimos de sumas tanto para el aprendizaje como para la recuperación y las $\alpha\beta$ hace uso de una relación de orden para el aprendizaje (tabla de relación α) y otra relación de orden (tabla de relación β) para la recuperación. Por tal razón, el autor, se enfocará en las memorias asociativas morfológicas como base para definir el nuevo modelo de memorias heteroasociativas min, mas los resultados son aplicables a las memorias $\alpha\beta$.

El nuevo modelo genérico se define de la siguiente manera:

Sea A una matriz $[a_{ij}]_{m \times r}$ y B una matriz $[b_{ij}]_{r \times n}$ cuyos términos son números enteros.

Definición 4.15 El producto máximo de A y B , denotado por $C = A \vee B$, es una matriz $[c_{ij}]_{m \times n}$ cuya ij -ésima componente c_{ij} se define como:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^r (a_{ik} + b_{kj}) \quad (4.9)$$

Fase de Aprendizaje

La memoria heteroasociativa en álgebra min para la fase de aprendizaje se construye de la siguiente forma:

$$W = \bigwedge_{\varrho=1}^p [y^{\varrho} \vee (-x^{\varrho})^t] = [w_{ij}]_{m \times n} \quad (4.10)$$

$$w_{ij} = \bigwedge_{\varrho=1}^p (y_i^{\varrho} - x_j^{\varrho}) \quad (4.11)$$

Fase de Recuperación

La fase de recuperación consiste en realizar el producto máximo, expresión 4.9, \vee de la memoria W con un patrón de entrada x^{ϑ} , donde $\vartheta \in \{1, 2, \dots, p\}$, para obtener un vector columna y de dimensión m :

$$y = W \vee x^{\vartheta} \quad (4.12)$$

la i -ésima componente del vector y es:

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^{\vartheta}) \quad (4.13)$$

Nota 4.16 *Los teoremas y corolarios que demuestran las condiciones suficientes y necesarias para que las memorias de tipo min aprendan y recuperen en forma completa se encuentran en el apéndice A; sólo el teorema que muestra cuándo un patrón afectado por ruido puede ser recuperado es de interés para el presente trabajo de tesis, dado que éste se relaciona de manera directa con el ruido y con el nuevo modelo de memorias heteroasociativas min robustas al ruido mezclado.*

Teorema 4.17 *Sea $\tilde{x}^{\vartheta} \forall \vartheta = 1, \dots, k$ la versión distorsionada del patrón x^{ϑ} . Se cumple que $W \vee \tilde{x}^{\vartheta} = y^{\vartheta}$ si*

$$\tilde{x}_j^{\vartheta} \leq x_j^{\vartheta} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

y para cada renglón índice $i \in \{1, \dots, m\}$ existe una columna índice $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^{\vartheta} = x_{j_i}^{\vartheta} \vee \left(\bigvee_{\varrho \neq \vartheta} [y_i^{\varrho} - y_i^{\varrho} + x_{j_i}^{\varrho}] \right) \quad (4.15)$$

Demostración. Suponga que \tilde{x}^ϑ denota la versión distorsionada de x^ϑ y que $\forall \vartheta = 1, \dots, k$, $W \curlywedge \tilde{x}^\vartheta = y^\vartheta$. Entonces:

$$y_i^\vartheta = (W \curlywedge \tilde{x}^\vartheta)_i = \bigvee_{l=1}^n (w_{il} + \tilde{x}_l^\vartheta) \geq w_{ij} + \tilde{x}_j^\vartheta \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_j^\vartheta \leq y_i^\vartheta - w_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, \dots, n \quad (4.17) \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq \bigwedge_{i=1}^m (y_i^\vartheta - w_{ij}) \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq \bigwedge_{i=1}^m [y_i^\vartheta - \bigwedge_{\varrho=1}^k (y_i^\varrho - x_j^\varrho)] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq \bigwedge_{i=1}^m [y_i^\vartheta + \bigvee_{\varrho=1}^k (x_j^\varrho - y_i^\varrho)] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq \bigwedge_{i=1}^m [y_i^\vartheta + \bigvee_{\varrho \neq \vartheta} (x_j^\varrho - y_i^\varrho) \vee (x_j^\vartheta - y_i^\vartheta)] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq \bigwedge_{i=1}^m [\bigvee_{\varrho \neq \vartheta} (y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho) \vee x_j^\vartheta] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq x_j^\vartheta \vee \bigwedge_{i=1}^m [\bigvee_{\varrho \neq \vartheta} (y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho)] \geq x_j^\vartheta \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow & \tilde{x}_j^\vartheta \leq x_j^\vartheta \end{aligned}$$

Esto muestra que la inecuación obtenida en 4.14 es suficiente para que \tilde{x}_j^ϑ pueda ser recuperada. Lo que continua es

$$\tilde{x}_j^\vartheta \leq x_j^\vartheta \vee [\bigvee_{\varrho \neq \vartheta} (y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho)] \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ y } \forall i = 1, \dots, m. \quad (4.18)$$

Supóngase que el conjunto obtenido en 4.18 no contiene la equivalencia para $i = 1, \dots, m$; es decir, se asume que existen índices de renglón $i \in \{1, \dots, m\}$ tales que

$$\tilde{x}_j^\mu < x_j^\vartheta \vee \left[\bigvee_{\varrho \neq \vartheta} (y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho) \right] \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

entonces

$$\begin{aligned}
(W \Downarrow \tilde{x}^\vartheta)_i &= \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + \tilde{x}_j^\vartheta) & (4.20) \\
&< \bigvee_{j=1}^n \left[w_{ij} + x_j^\vartheta \vee \left(\bigvee_{\varrho \neq 1} [y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho] \right) \right] \\
&= \bigvee_{j=1}^n \left[w_{ij} + \left(\bigvee_{\varrho=1}^k [y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho] \right) \right] \\
&= \bigvee_{j=1}^n [w_{ij} + y_i^\vartheta - \bigwedge_{\varrho=1}^k (y_i^\varrho - x_j^\varrho)] \\
&= \bigvee_{j=1}^n [w_{ij} + y_i^\vartheta - w_{ij}] \\
&= y_i^\vartheta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(W \Downarrow \tilde{x}^\vartheta)_i < y_i^\vartheta$ lo cual contradice la hipótesis de que $W \Downarrow \tilde{x}^\vartheta = y^\vartheta$. Esto indica que por cada renglón índice debe existir una columna índice de j_i satisfaciendo 4.15.

Ahora se probará el inverso. Suponga que

$$\tilde{x}_j^\vartheta \leq x_j^\vartheta \vee \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{\varrho \neq \vartheta} [y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_j^\varrho] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

para la primera parte de la demostración, la inecuación es verdadera si y sólo si

$$\tilde{x}_j^\vartheta \leq y_i^\vartheta - w_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$w_{ij} + \tilde{x}_j^\vartheta \leq y_i^\vartheta \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ y } \forall i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + \tilde{x}_j^\vartheta) \leq y_i^\vartheta \quad \forall i = 1, \dots, m & (4.23) \\
&\Leftrightarrow (W_{XY} \Downarrow \tilde{X})_i \leq y_i^\vartheta \quad \forall i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

esto implica que $W_{XY} \Downarrow \tilde{x}_\vartheta \leq y_\vartheta \quad \forall \vartheta = 1, \dots, k$ por lo tanto, si se muestra que $W_{XY} \Downarrow \tilde{x}^\vartheta \geq y_\vartheta \quad \forall \vartheta = 1, \dots, k$, entonces se tendrá que $W_{XY} \Downarrow \tilde{x}^\vartheta = y^\vartheta \quad \forall \vartheta$. Sea $\vartheta \in \{1, \dots, k\}$ e $i \in \{1, \dots, m\}$ escogidos arbitrariamente. Entonces

$$\begin{aligned}
(W_{XY} \searrow \tilde{x}^\vartheta)_i &= \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + \tilde{x}_j^\vartheta) & (4.24) \\
&\geq w_{ij_i} + \tilde{x}_{j_i}^\vartheta \\
&= w_{ij_i} + \left(x_{j_i}^\vartheta \vee \bigvee_{\varrho \neq 1} [y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_{j_i}^\varrho] \right) \\
&= w_{ij_i} + \bigvee_{\varrho=1}^k [y_i^\vartheta - y_i^\varrho + x_{j_i}^\varrho] \\
&= w_{ij_i} + y_i^\vartheta - \bigwedge_{\varrho=1}^k (y_i^\varrho - x_{j_i}^\varrho) \\
&= w_{ij_i} + y_i^\vartheta - w_{ij_i} \\
&= y_i^\vartheta
\end{aligned}$$

Esto muestra que $W_{XY} \searrow \tilde{x}^\vartheta \geq y^\vartheta$. ■

Nota 4.18 La expresión 4.14 muestra que el nuevo modelo de memoria heteroasociativa min es robusta al ruido sustractivo y se relaciona de manera directa con el ruido de adquisición.

Teorema 4.19 El modelo de memoria heteroasociativa min es robusto a ruido mezclado de forma parametrizada por d en $\psi(\tau)$ y se cumple que $E(d) \geq 1 - \sum_d^\infty P_r(p|\tau(p) = i)$ para $d > d_1$ donde $E(d)$ es la probabilidad de éxito en la recuperación en forma completa de patrones alterados con ruido mezclado.

Demostración. El lema 4.11 demuestra que el ruido sustractivo está ubicado en el lado positivo de la curva de $\psi(\tau)$ y se expresa como $P_r(p|r \text{ es sustractivo}) = \sum_{d=1}^\infty (p|\tau(p) = d)$. Se ha determinado que el ruido se distribuye por los bordes. Ahora bien, al realizar la erosión del patrón y obtener el complemento, el modelo es robusto a ruido mezclado a partir de una distancia d_1 donde $d_1 < 0$. De tal forma, que la probabilidad de éxito en la recuperación de patrones afectados con ruido mezclado en este nuevo modelo de memorias asociativas W queda expresado como $1 - \sum_{i=d_1}^\infty P_r(p|\tau(p) = i)$ donde $d_1 < 0$. Por otro lado, el teorema 4.17 demostró que es condición suficiente para la recuperación de patrones si se cumple $\tilde{x}_j^\vartheta \leq x_j^\vartheta \quad \forall j = 1, \dots, n$ y en la expresión 4.15 se garantiza que por cada renglón índice i debe existir una columna índice de j_i para que la recuperación sea completa, lo que implica que el modelo de memorias heteroasociativas W , como tal, es robusta a altos porcentajes de ruido sustractivo, por lo tanto, queda demostrado que:

$$E(d) \geq 1 - \sum_d^\infty P_r(p|\tau(p) = i) \text{ para } d > d_1 \quad (4.25)$$

■

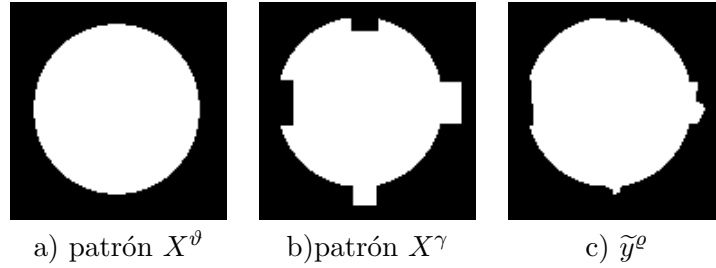


Figura 4.6: Patrón recuperado conservando porcentajes de ambos ruidos.

Corolario 4.20 *La probabilidad de recuperación en forma completa del modelo de memoria heteroasociativa min es 0 si al parametrizar por d se cumple que $\sum_{-\infty}^{-d} P_r(p|\tau(p) = i)$.*

Demostración. Consecuencia directa del teorema 4.19. Dado que $E(d) \geq 1 - \sum_d^{\infty} P_r(p|\tau(p) = i)$ y d es negativo, la misma expresión puede presentarse como $E(d) \geq 1 - \sum_{-d}^{\infty} P_r(p|\tau(p) = i)$; ahora bien, el complemento de $E(d)$ se expresa como $\sum_{-\infty}^{-d} P_r(p|\tau(p) = i)$, lo que indica que si lo anterior se cumple existe la probabilidad del 100% que la memoria falle. ■

Corolario 4.21 *El nuevo modelo de memoria heteroasociativa W con ruido mezclado puede fallar en la recuperación completa de patrones si el ruido es lo suficiente para volver subconjunto a un patrón X^{ϑ} de otro patrón X^{γ} donde $\vartheta \neq \gamma$.*

Demostración. Consecuencia directa de no cumplir con la expresión 4.15. ■

El corolario 4.21 es de suma importancia, dado que basta que en un renglón índice i en la memoria W que no contenga un índice j de columna de X para que la recuperación no sea completa. El resultado obtenido de no recuperar en forma completa $\tilde{y}^e \subset X^{\vartheta} \cup X^{\gamma}$ donde $\vartheta \neq \gamma$ implica que contendrá ruido sustractivo.

En la figura 4.6 se muestran 2 patrones que representan a X^{ϑ} y X^{γ} , dado que el ruido de adquisición se presenta en los bordes y si este es lo suficiente grande puede confundir a la memoria W de tal forma que la recuperación no será completa y contendrá ruido sustractivo.

4.3.2. Nuevo modelo genérico de memorias heteroasociativas min robusta a ruido mezclado

Dada una función de distribución de ruido de adquisición $\psi(\tau)$, donde se destaca que el ruido se distribuye en las distancias cercanas a la distancia 0, es decir por los bordes, además de saber por el teorema 4.19 que el nuevo modelo de memoria heteroasociativa es robusta al ruido mezclado se procederá a proponer el nuevo modelo de memoria heteroasociativa min robusta a ruido mezclado de la siguiente forma:

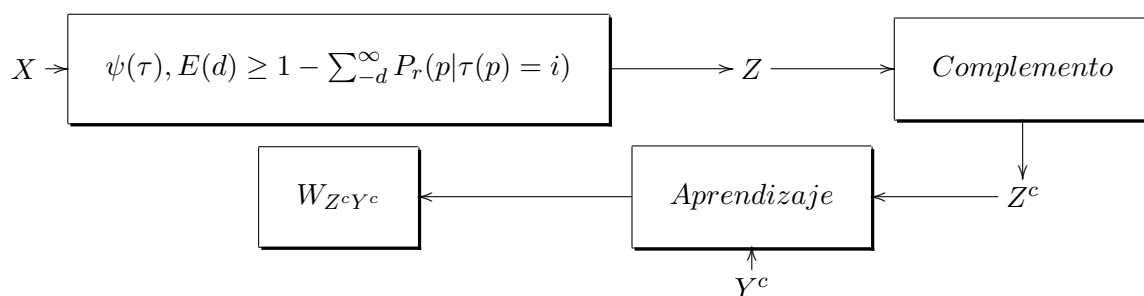


Figura 4.7: Proceso de aprendizaje del nuevo modelo de memorias heteroasociativas min robustas a ruido mezclado.

Fase de aprendizaje

La fase de aprendizaje consiste en:

1. Obtener $Z \subset X$ a través de $\psi(\tau)$ y del teorema 4.19.
2. Obtener el complemento de Z .
3. Realizar el proceso de aprendizaje con $W_{Z^c Y^c}$

La figura 4.7 muestra gráficamente el proceso de aprendizaje del nuevo modelo de memorias heteroasociativas min robustas al ruido mezclado.

Fase de recuperación

La fase de recuperación consiste en:

1. Obtener el complemento de \tilde{X} .
2. Realizar el proceso de recuperación con la memoria $W_{Z^c Y^c}$.
3. Obtener el complemento de Y^c .

La figura 4.8 muestra gráficamente el proceso de recuperación del nuevo modelo de memorias heteroasociativas min robustas al ruido mezclado.

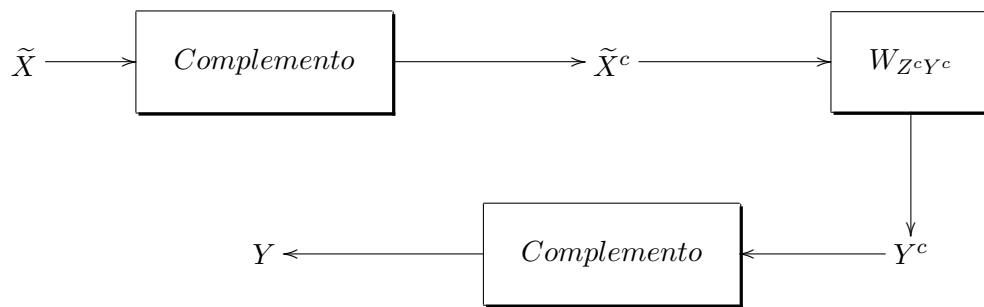


Figura 4.8: Proceso de recuperación del nuevo modelo de memorias heteroasociativas mínimamente robustas a ruido mezclado.

Capítulo 5

Disquisiciones Experimentales

Este capítulo mostrará los resultados de aplicar los teoremas y algoritmos presentados en el capítulo 4. Primero se mostrará la distribución real del ruido en los medios de adquisición para imágenes binarias y en tono de gris, además, se presentarán los resultados de escoger un kernel que cumple con las condiciones suficientes para que las memorias asociativas en álgebra min y max recuperen en forma completa. Finalmente se presentarán resultados del desempeño del modelo genérico de memorias asociativas en álgebra min y max.

5.1. Distribución de ruido adquirido

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos en los experimentos que permitieron observar la distribución real del ruido en los medios de adquisición para las imágenes binarias y para imágenes en tonos de gris.

5.1.1. Distribución en imágenes binarias

Para determinar la distribución del ruido generado por los medios de adquisición en imágenes binarias se realizó el proceso siguiente:

1. Impresión de la imagen digital binaria.
2. Escaneo de la imagen impresa en papel, obteniendo una imagen digital.
3. Comparación de la nueva imagen digital con la imagen original y se almacena el porcentaje de diferencia.
4. Impresión de la imagen nueva digital.
5. Se repite del paso 2 al 4, 15 veces para 25 imágenes diferentes.

Las imágenes son diferentes en cuanto a tamaño e información y se realizaron con dos escáners diferentes, uno es *HP ScanJet G4050 (HP)* y el otro es *LexMark series 8300 (LM)*, además, se utilizó la impresora *hp LaserJet 1010*. Los resultados obtenidos en el proceso de escaneo y digitalización se encuentran plasmados en la tabla B.1 del

apéndice B; estos resultados, muestran por columna, el porcentaje de ruido adquirido por número de imágenes.

Para determinar el porcentaje de variación entre las imágenes escaneadas y su original, se realizó una comparación pixel a pixel. Si los pixeles de ambas imágenes tienen valor diferente en la coordenada (x, y) , significa que hay variación y ésta se contabiliza; después, mediante una regla de tres se calcula el porcentaje de variación en la imagen escaneada y *ese porcentaje de variación es el ruido adquirido*.

En la tabla B.1, se puede observar que cada una de sus columnas, representa el total de repeticiones de impresión y escaneo realizados hasta ese momento en particular. Se destaca que el porcentaje de ruido de las 25 imágenes diferentes, por columna, son muy aproximados entre sí. La tabla, además, confirma que el ruido no se presenta en forma desproporcionada o descontrolada por cada repetición, sino que el ruido se presenta proporcionalmente en función a la adquisición de la imagen. Ahora bien, la conclusión obtenida por la tabla B.1 tiene sentido lógico al relacionar visualmente la apariencia que tienen las imágenes obtenidas por el escaner; en la figura 5.1 se puede observar que las imágenes son muy parecidas entre si, sin embargo, hay variaciones muy marcadas en los bordes de la imagen; obsérvese como el marco está afectado y también el contorno de los cráneos. Este resultado es significativo porque permite concluir que: *“el ruido que afecta a una imagen binaria que es obtenida por un medio electrónico de adquisición se distribuye en los bordes; es decir, el ruido de adquisición en una imagen binaria se presenta, crece y se distribuye estructuradamente donde hay cambios significativos de gradiente, además de ser ruido mezclado”*.

Las imágenes de la figura 5.1 en conjunción con las variaciones reflejadas en la tabla B.1, revelan que al realizar el proceso de escaneo, las imágenes obtenidas están sujetas a ligeros cambios de escala (debido a la configuración de los puntos por pixel -**ppp**- en el escáner) y de rotación (debido a la colocación de la imagen impresa en la cama del escáner); sin embargo, a pesar de estos inconvenientes técnicos al realizar el proceso antes mencionado, se puede garantizar que: *entre más alejado esté un pixel de su borde es menos probable que el ruido lo afecte y la probabilidad es muy alta de ser afectado en caso contrario*.

Distribución de ruido en imágenes binarias basándose en la Transformada Rápida de Distancia

La figura 5.2 muestra algunas imágenes binarias que fueron usadas para determinar la distribución del ruido en los medios de adquisición; las imágenes de los incisos de esta figura tienen las siguientes características:

- a). 420 pixeles de ancho x 420 pixeles de alto con 64 ppp de resolución;
- b). 420 pixeles de ancho x 420 pixeles de alto con 64 ppp de resolución;
- c). 600 pixeles de ancho x 800 pixeles de alto con 180 ppp de resolución;
- d). 542 pixeles de ancho x 700 pixeles de alto con 96 ppp de resolución.



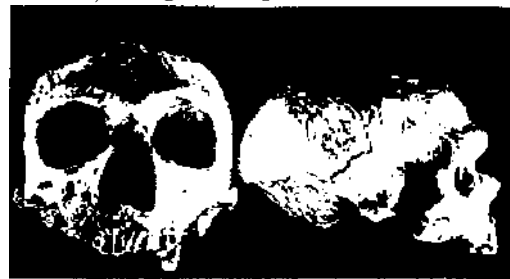
a) Imagen original



b) imagen del primer escaneo



c) imagen del segundo escaneo



d) imagen del tercer escaneo



d) imagen del cuarto escaneo



e) imagen del quinto escaneo



f) imagen del sexto escaneo



g) imagen del septimo escaneo

Figura 5.1: Escaneos con la imagen de cráneos

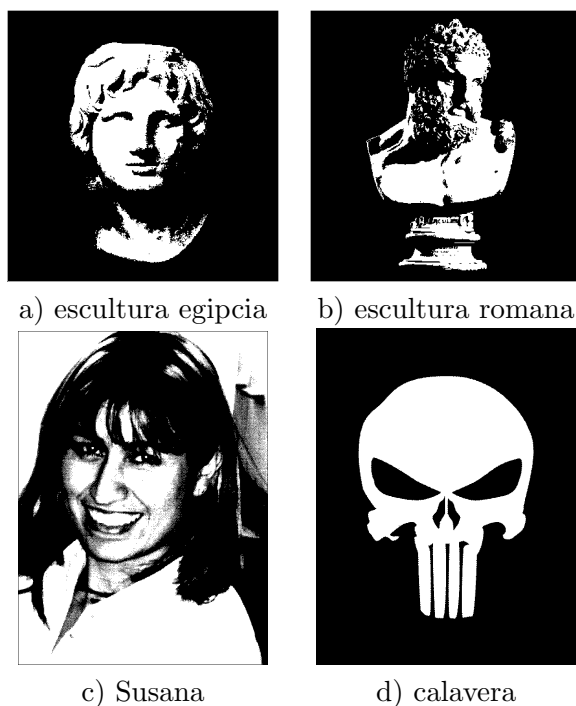


Figura 5.2: Algunas de las imágenes binarias usadas para determinar la distribución del ruido en medios de adquisición.

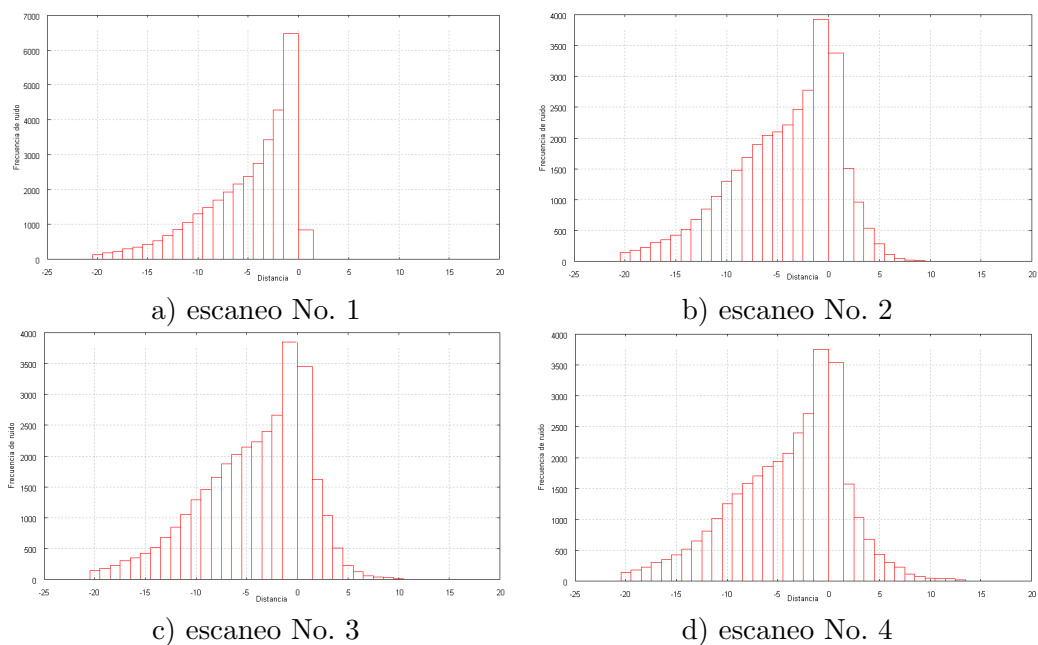


Figura 5.3: Distribución de ruido por número de escaneos basados en la TRD del inciso a de la figura 5.2.

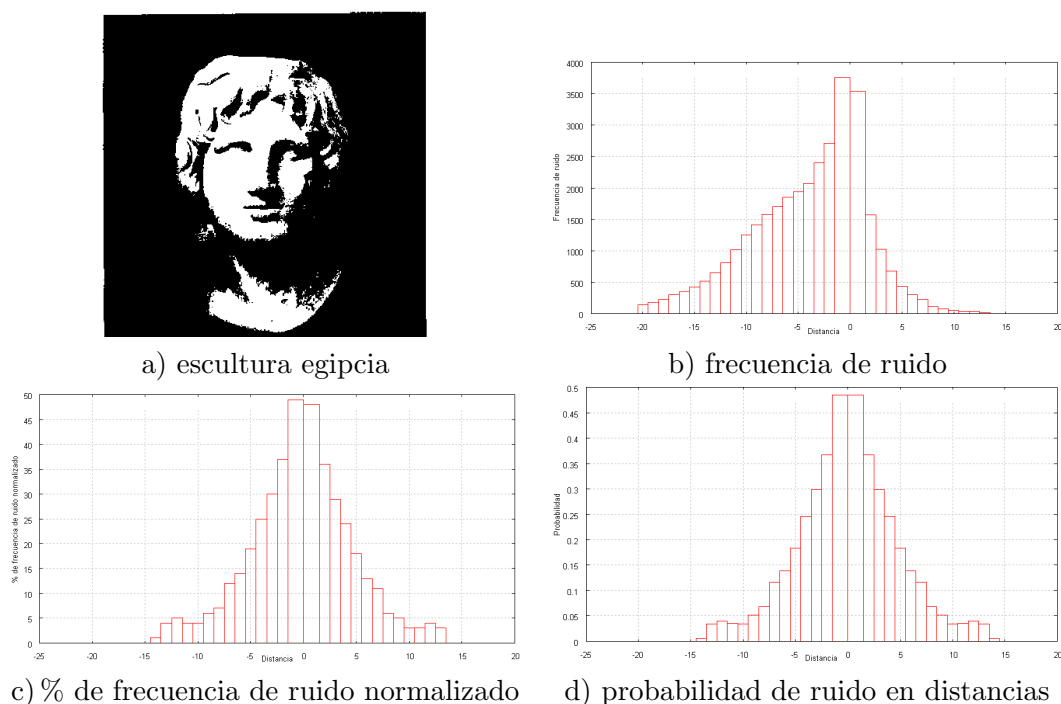


Figura 5.4: Distribución del ruido en la imagen de la escultura egipcia después de 4 escaneos en HP.

El resultado de aplicar el algoritmo anterior, se muestra en los histogramas (uno por cada escaneo en HP) de distribución de ruido en función a la TRD de la figura 5.3 de la imagen inciso “a” de la figura 5.2. Los histogramas en el eje de las x (distancias) muestran escalas positivas y negativas, donde los valores positivos, representan las distancias de la región y los valores negativos representan las distancias del complemento. El eje de las y representa la frecuencia de los pixeles que fueron afectados con ruido adquirido. Estos histogramas destacan, lo que anteriormente ya se había concluido, que el ruido crece proporcionalmente y que se distribuye por los bordes según se incrementen el número de escaneos. Según la distribución de los histogramas, se observa que el ruido afecta mayormente distancias negativas, pero no es así; si se observa detalladamente la figura en cuestión, se puede destacar que existen más pixeles negros que forman el complemento que los pixeles blancos que forman la región, lo que hace que la frecuencia de ruido se vea en mayor cantidad de ruido aditivo que de ruido sustractivo. Los histogramas mostrados (incisos “b”) de las figuras 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11, no están normalizados, es decir, están en proporción numérica al área que afectó el ruido, por eso las frecuencias de las distancias negativas son mayores que las frecuencias de las distancias positivas, por ende hay sesgo al lado izquierdo del 0; para mostrar una distribución uniforme de las distancias positivas y negativas se realiza una normalización de las frecuencias basada en la TRD; las frecuencias de las distancias al ser sumadas, como resultado, generan el área del conjunto; ahora bien, dado que se contabilizan también las frecuencias de las distancias del complemento

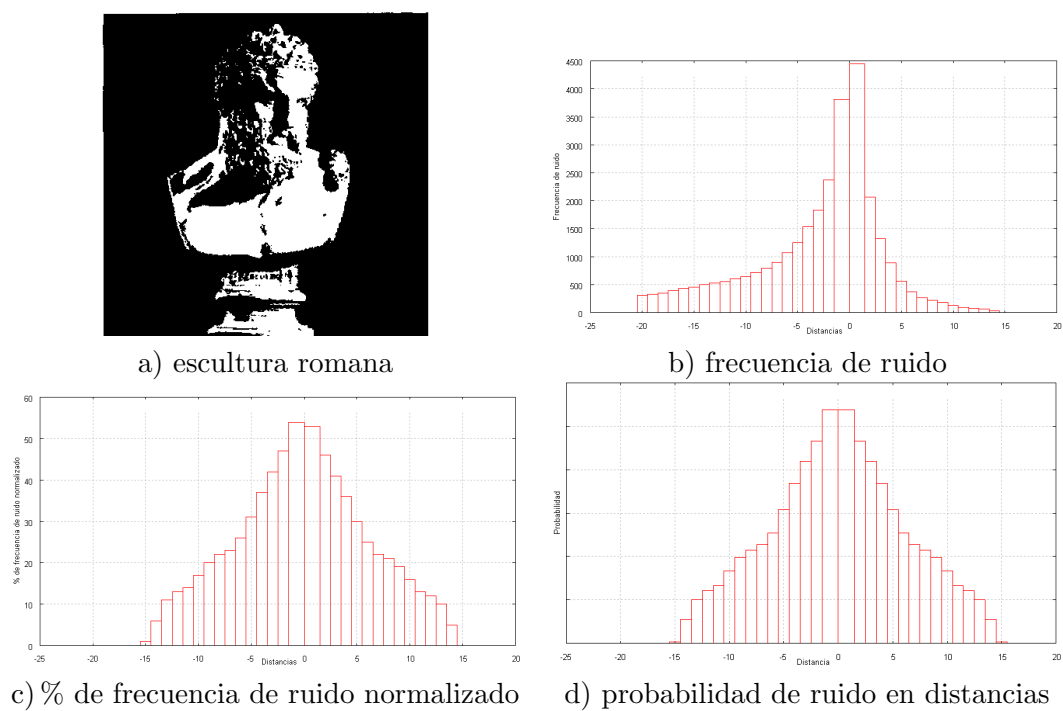


Figura 5.5: Distribución del ruido en la imagen de escultura romana después de 4 escaneos en HP.

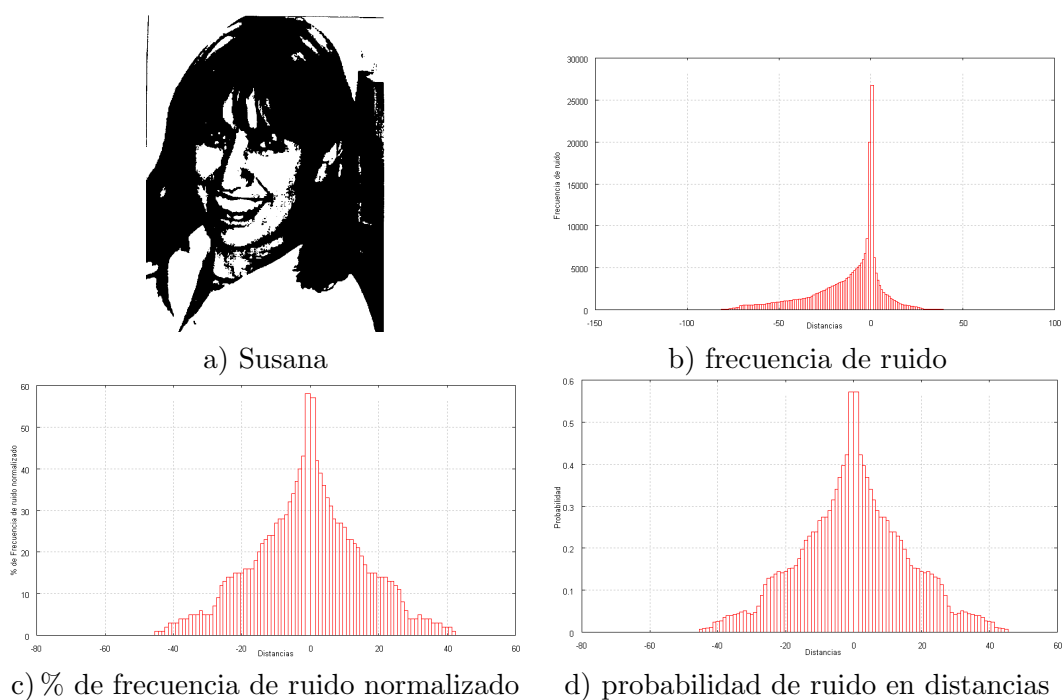


Figura 5.6: Distribución del ruido en la imagen de Susana después de 4 escaneos en HP.

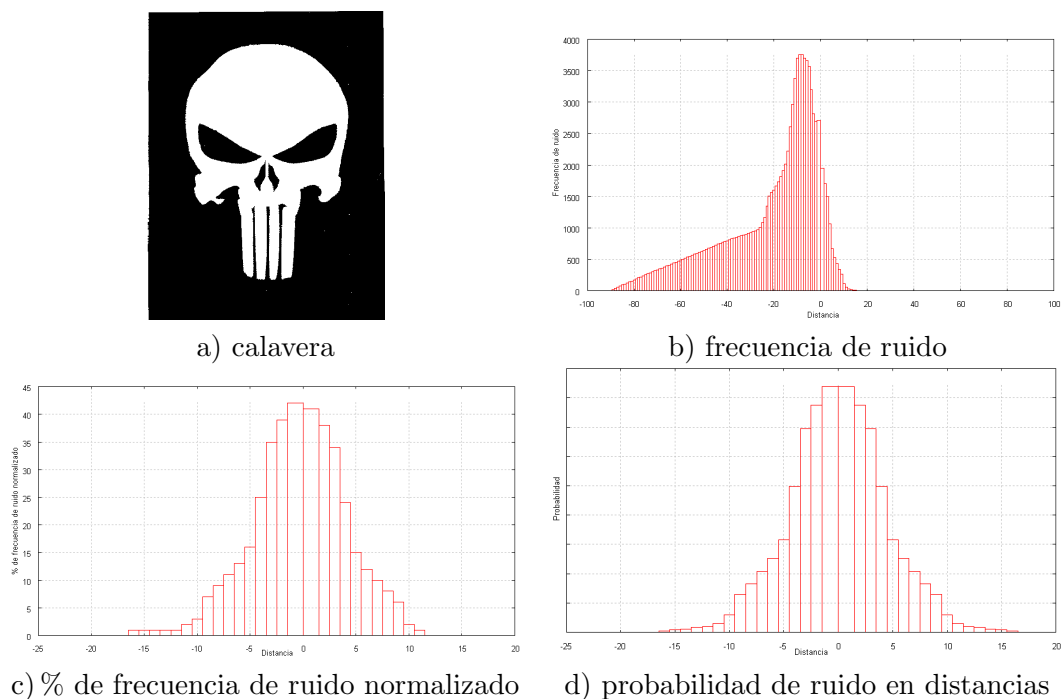


Figura 5.7: Distribución del ruido en la imagen de la calavera después de 4 escaneos en HP.

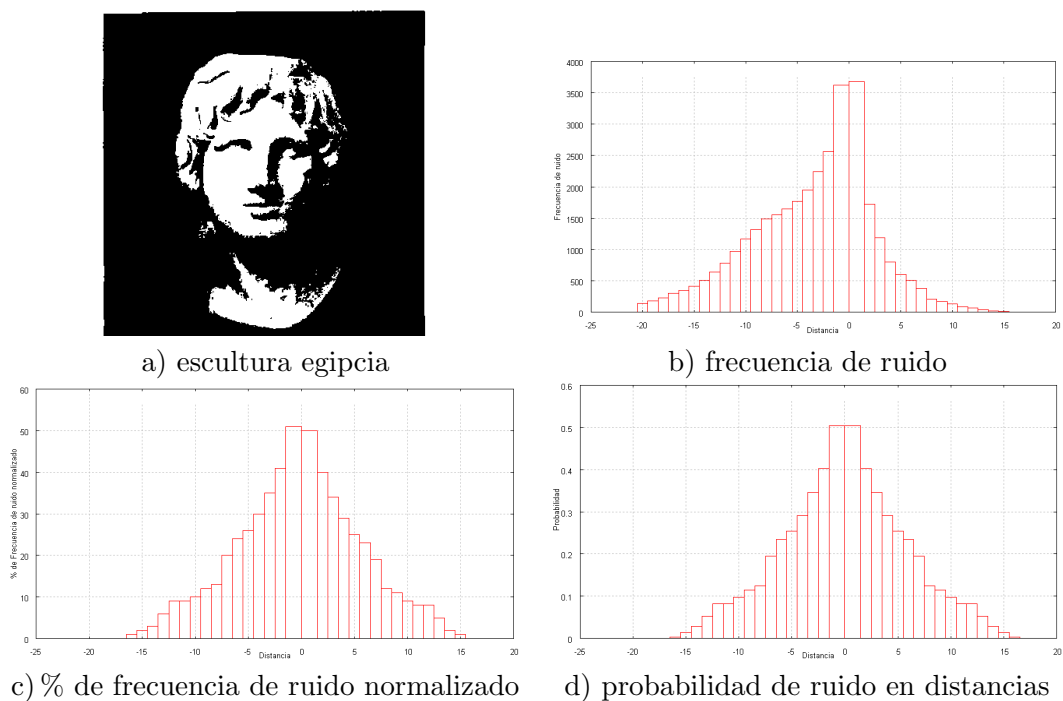


Figura 5.8: Distribución del ruido en la imagen de la escultura egipcia después de 4 escaneos en LM.

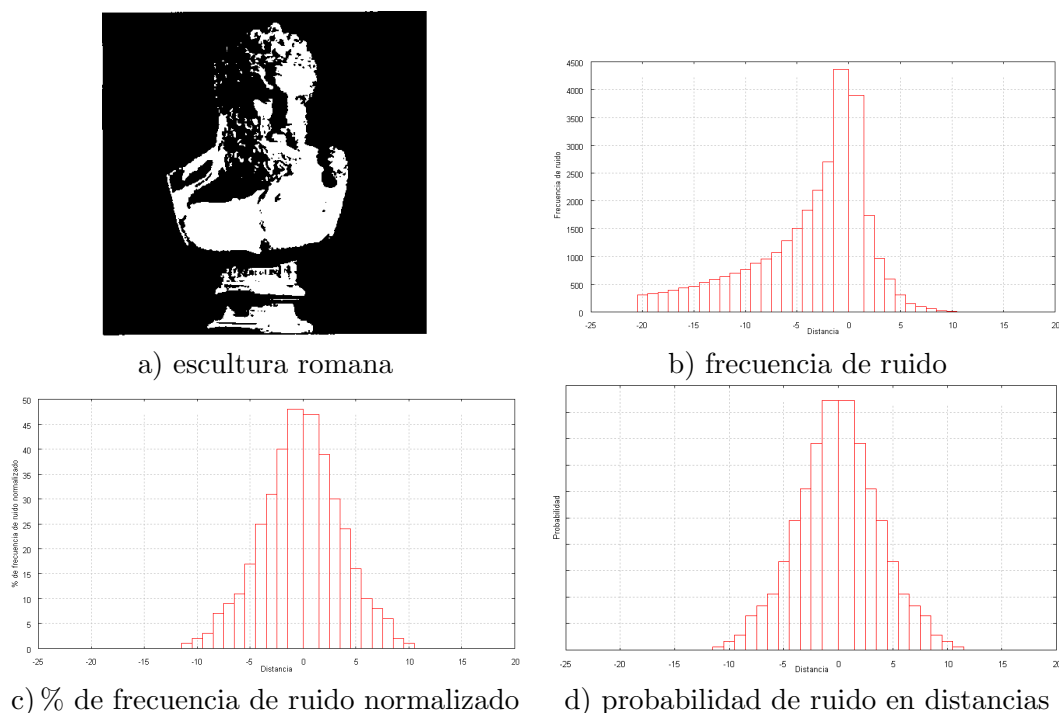


Figura 5.9: Distribución del ruido en la imagen de la escultura romana después de 4 escaneos en LM.

por separado, se obtiene el área del complemento; con una regla de tres se obtienen el porcentaje que ocupan las frecuencias de las distancias en el área tanto del conjunto como del complemento, como consecuencia directa se puede mostrar una distribución más uniforme de las distancias positivas y negativas en función al área que le corresponde al conjunto y al complemento dentro de la imagen. La distribución de distancias normalizadas obtenida con el criterio anterior se puede observar en los incisos “c” de las figuras 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11.

El histograma del inciso “c” de la figura 5.4 muestra la distribución de probabilidad de ruido que afecta esas distancias en particular para esa imagen, por lo que se concluye que *las distribuciones de probabilidad de ruido para imágenes binarias se presentan de manera similar en las distancias cercanas al 0 y que conforme se alejen las distancias del 0 el ruido disminuye notablemente*; esta conclusión es confirmada por los histogramas de las figuras 5.5, 5.6, 5.7. Las imágenes presentadas hasta el momento han sido generadas por el escáner HP; ahora bien, en el escáner LM las imágenes binarias generadas tienen un comportamiento similar a las del escáner HP, como lo indica la tabla B.1. Las figuras 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11 destacan que las distribuciones del ruido de las imágenes, obtenidas por LM, son muy parecidas a las de HP. Al comparar las distribuciones del ruido de una imagen generadas por HP con las distribuciones de la misma imagen generada por LM se observará que hay algunas diferencias en las distancias afectadas por el ruido, esto tiene sentido, dado que son diferentes en cuanto a: sensores, colocación de la hoja impresa en la cama del escáner, ajustes en los ppp del

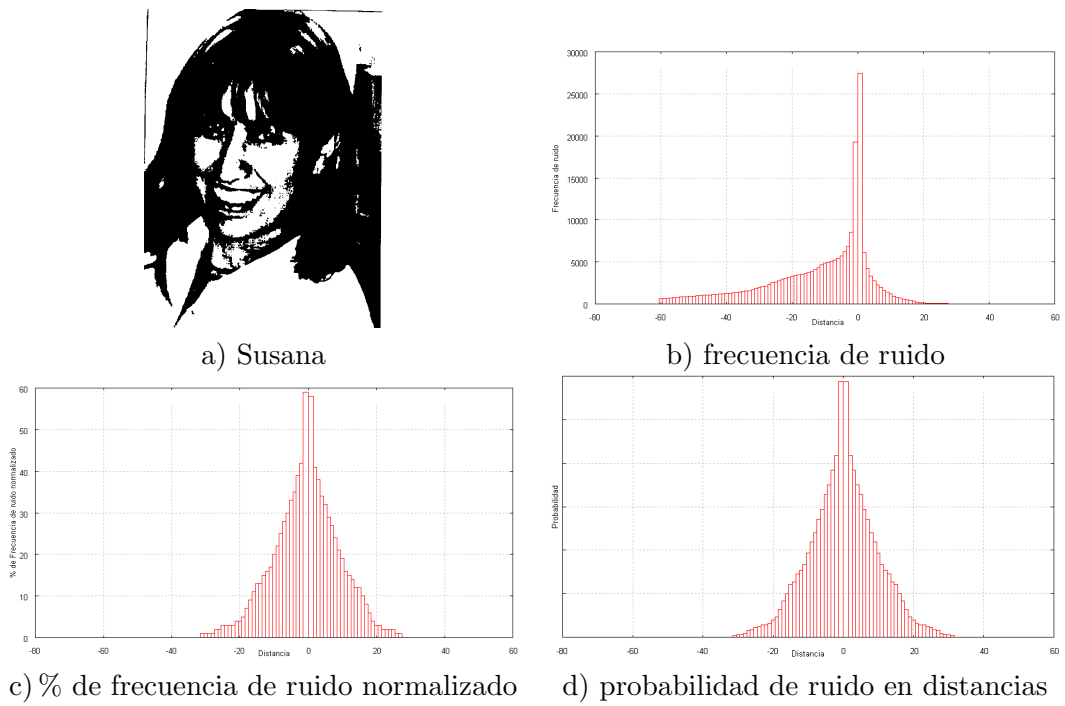


Figura 5.10: Distribución del ruido en la imagen de Susana después de 4 escaneos en LM.

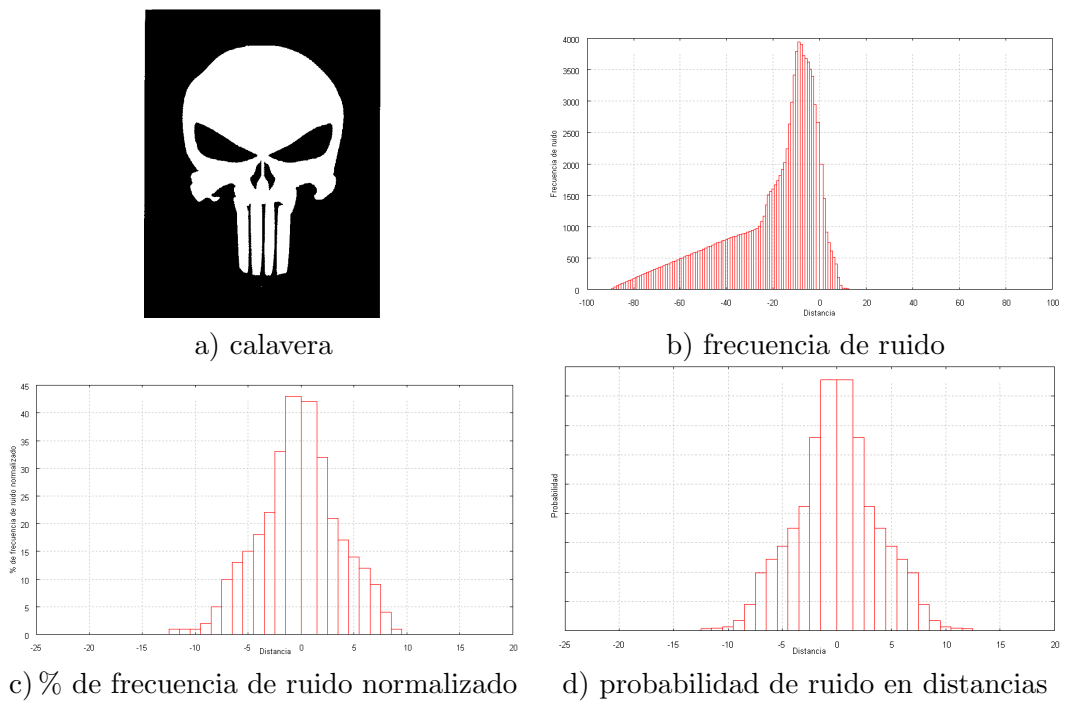


Figura 5.11: Distribución del ruido en la imagen de la calavera después de 4 escaneos en LM.

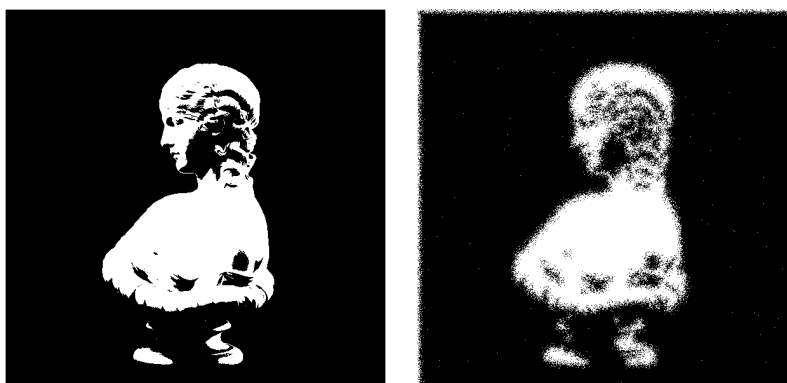


Figura 5.12: Resultado después de aplicar el algoritmo que simula la generación de ruido en los bordes; con 15 % de ruido

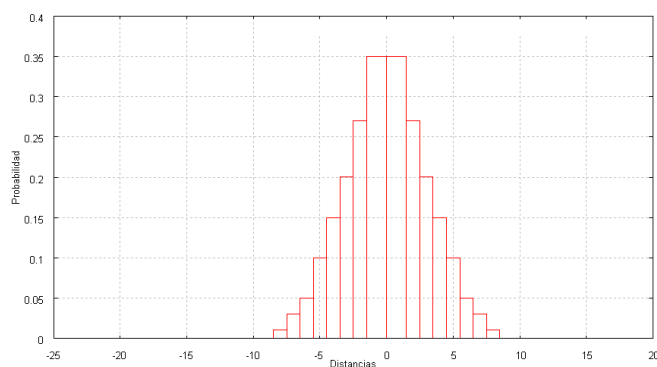


Figura 5.13: Distribución de probabilidad de ruido simulado en imágenes binarias

escáner, a luz ambiental e inclusive a variación de la energía eléctrica; lo destacable es que las diferencias en porcentaje de ruido adquirido son mínimas y que el ruido sigue comportándose de la misma manera, es decir, es mezclado, crece y se distribuye estructuralmente en los bordes.

Ruido de adquisición simulado basándose en de la Transformada Rápida de Distancia

El resultado de aplicar el algoritmo descrito en la sección 4.1.1 del capítulo 4 se muestra en la figura 5.12; al comparar la imagen del inciso “e” de la figura 5.1 con la imagen del inciso “d” de la figura 5.12, se puede observar que ambas imágenes están afectadas por ruido en los bordes; además, la figura 5.13 muestra una distribución similar a la del histograma del inciso “a” de la figura 5.3, por tal razón, se concluye que este algoritmo simula correctamente la distribución del ruido en los medios de adquisición sobre imágenes binarias.

5.1.2. Distribución en imágenes de tonos de gris

Esta sección mostrará la distribución del ruido en imágenes en tonos de gris cuando son digitalizadas a través de los medios de adquisición. Para determinar la distribución del ruido en imágenes en tonos de gris, se realizó el siguiente procedimiento:

1. Imprimir la imagen original; la imagen original está en tono de gris.
2. Digitalizar a través de un escáner la impresión de la imagen obtenida del paso anterior .
3. Comparar la imagen original con la escaneada en el paso anterior y obtener el valor máximo y el valor mínimo de variación que hubo en la comparación. El valor máximo y el valor mínimo de variación se obtiene con el algoritmo 5.1 que se muestra a continuación:

Algoritmo 5.1: Algoritmo que obtiene la distribución de ruido adquirido en imágenes en tonos de gris

```

1  max = min = 0;
2  for y = 0 to AltoDeImagen do
3      for x = 0 to AnchoDeImagen do
4          col1 = imagenOriginal → GetPixel(x, y);
5          col2 = imagenEscaneada → GetPixel(x, y);
6          dif = col1 - col2;
7          if dif < 0 then
8              dif = abs(dif);
9              if min = 0 then
10                 | min = dif;
11             end
12         end
13         else
14             if dif > 0 then
15                 if max ; 0 then
16                     | max = dif;
17                 end
18             end
19         end
20     end
21 end

```

4. Se repiten los pasos 1 al 3 cinco veces

El procedimiento anterior encuentra, de cada imagen en todo el proceso, la variación mínima y máxima que tienen los pixeles al ser comparados; es decir, que cada pixel de la imagen original es comparado con el pixel de la imagen escaneada en la

misma posición, si la diferencia es negativa (variable *min*), indica que el ruido adquirido es aditivo y si la diferencia es positiva (variable *max*), indica que el ruido es sustractivo; este criterio permite ver al pixel en tono de gris de la imagen original como el origen en la recta, es decir el 0 y la variación, diferencia entre el valor del pixel en tono de gris -en la misma posición- de la imagen original y la escaneada, indica que se ha movido positiva o negativamente en la recta. Como esta comparación es pixel a pixel es necesario obtener el mínimo y el máximo absolutos de todas las variaciones entre las imágenes en cuestión. Este criterio es importante porque arroja información útil para formar kernels en el modelo de las memorias asociativas en álgebra *min* y *max*. Este proceso fue realizado hasta 5 veces, dado que las imágenes resultantes en tono de gris al imprimirse y escanearse repetidas veces, tienden a saturarse de ruido rápidamente guardando muy poca relación visual con la imagen original.

En la figura 5.14 se muestran algunas de las imágenes en tono de gris que fueron usadas durante el proceso para determinar cómo se distribuye el ruido adquirido; las características son las siguientes:

- a). 294 pixeles de ancho x 294 pixeles de alto con 96 ppp de resolución;
- b). 450 pixeles de ancho x 390 pixeles de alto con 96 ppp de resolución;
- c). 322 pixeles de ancho x 325 pixeles de alto con 110 ppp de resolución;
- d). 500 pixeles de ancho x 500 pixeles de alto con 72 ppp de resolución.

Las tablas B.2 y B.3 del apéndice B, muestran los resultados obtenidos al aplicar el proceso anteriormente descrito para 20 imágenes y para los escáner HP y LM. En estas mismas tablas, se puede observar que la variable *max* de las diferentes columnas tiene una variación que no es tan abrupta como la variable *min*. Las imágenes de la figura 5.15 confirman los valores de las tablas, además, proporcionan información relevante, por ejemplo, al igual que en la adquisición de las imágenes binarias donde el ruido mezclado se distribuye en los bordes, en las imágenes en tonos de gris sucede lo mismo, *el ruido mezclado afecta el 100% de los tonos de gris de la imagen, dado que el nivel de gris como tal es el borde. Una particularidad que tiene la adquisición de imágenes en tono de gris es: que los tonos oscuros se abrillanten y los colores brillantes se oscurezcan; también, se destaca que los colores que tienden al blanco, aunque son afectados por el ruido, su degradación es menor (ruido sustractivo) con respecto a los colores que tienden a negro dado que estos cambian rápidamente a colores grises muy claros o a blancos inclusive (ruido aditivo)*. Para observar visualmente qué tanto se genera de ruido aditivo y de ruido sustractivo en los medios de adquisición, se procedió a hacer la diferencia entre la imagen original y la imagen escaneada, mostrando dicha diferencia en una imagen binaria; el criterio para generar la imagen binaria fue: si la diferencia en esa coordenada es negativa, significa que existe ruido aditivo y se le asigna el color negro, ahora bien, si la diferencia es positiva, significa que el ruido es sustractivo y se le asigna el color blanco, ver figura 5.16.

En la figura 5.17, se puede observar que una imagen en tonos de gris puede ser vista como una sábana tridimensional o una superficie.

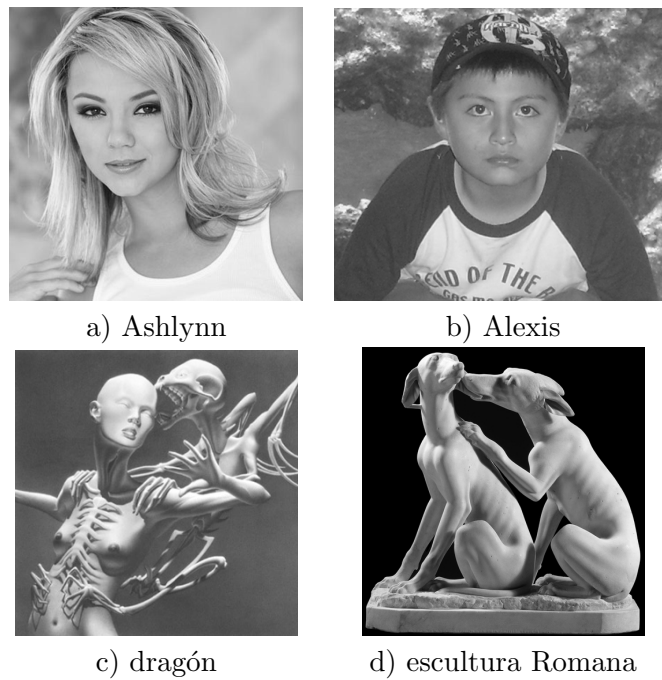


Figura 5.14: Algunas de las imágenes en tono de gris usadas para determinar la distribución del ruido en medios de adquisición.

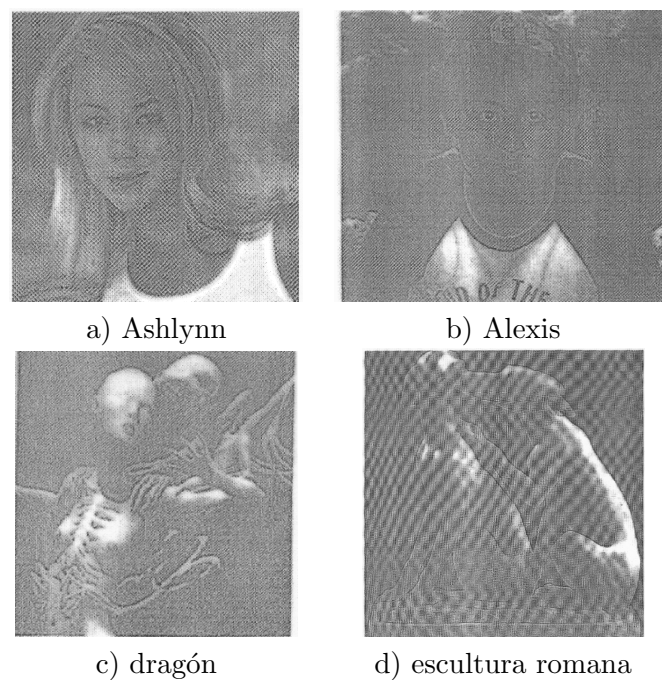


Figura 5.15: Apariencia de las imágenes en tono de gris de la figura 5.14 después de 5 escaneos.

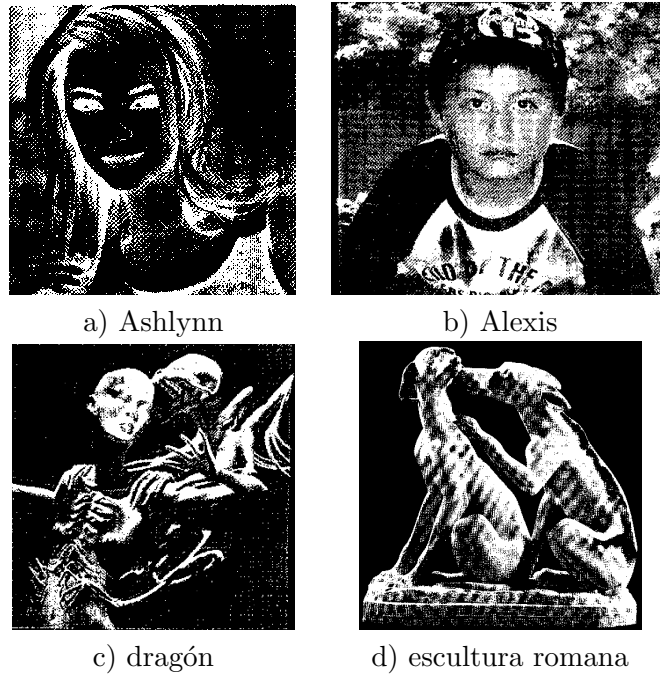


Figura 5.16: Imágenes binarias que muestran visualmente la cantidad de ruido aditivo (color negro) y de ruido sustractivo (color blanco).

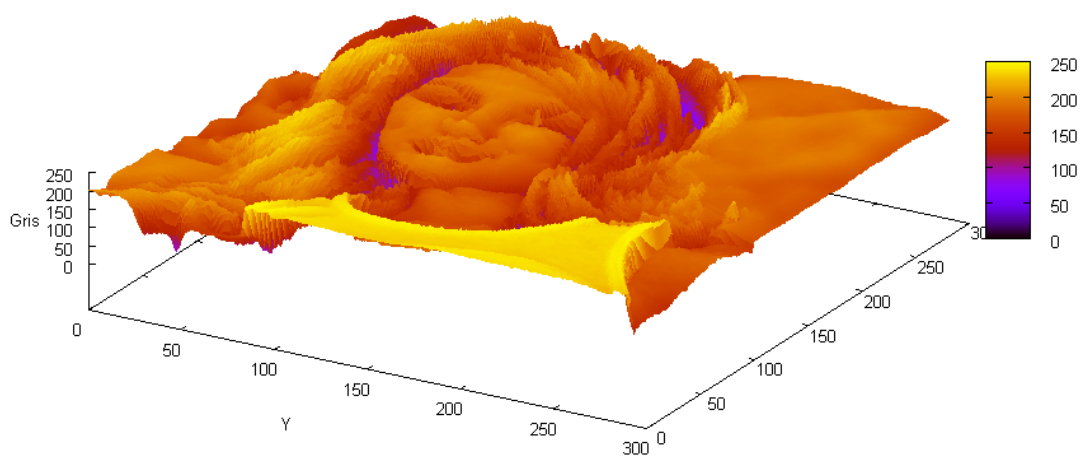


Figura 5.17: Imagen en tonos de gris de Ashlynn vista como una sábana tridimensional

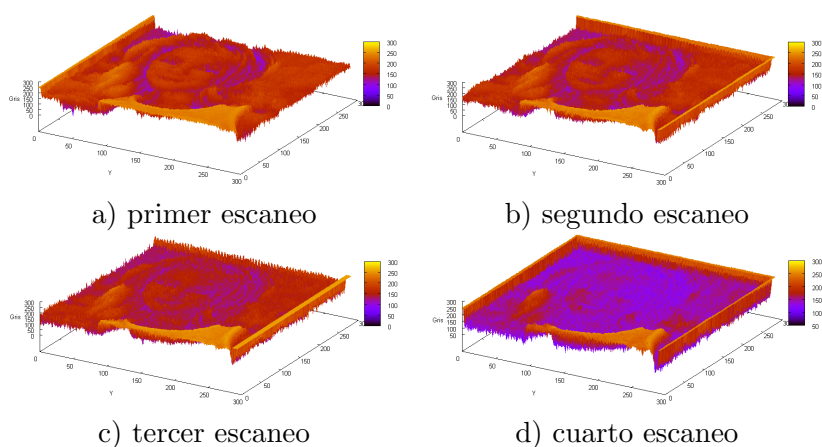


Figura 5.18: Distribución real del ruido en los medios de adquisición en imágenes en tonos de gris.

Las sábanas de la figura 5.18 muestran que el ruido erosiona lentamente los picos entre un escaneo y otro y (aunque no se alcanza a detectar en las imágenes de este figura) dilata los valles con mayor rapidez de tal forma que la superficie se torna difusa. El hecho de que los picos sean erosionados lentamente indica que los escáner afectan en menor grado los tonos de gris claros.

Al inicio de esta sección se comentó que el valor del tono de gris será visto como el origen de la recta y si hubo ruido sustractivo indica que el valor del tono de gris disminuyó, es decir, se movió al lado derecho (positivamente) del 0 en la recta, pero si hubo ruido aditivo, el tono de gris aumentó, por lo tanto se movió al lado izquierdo (negativamente) del 0; esto indica que *el ruido de adquisición en las imágenes en tono de gris se presenta en los bordes, donde el borde es el valor del tono de gris original; esto, también, indica que el ruido adquirido en imágenes en tono de gris es mezclado.*

De acuerdo con las figuras 5.19, 5.20 y 5.21, se puede observar que el ruido conforme se realizan más escaneos, la distribución de éste se amplía hacia las orillas y normalmente lo hace con mayor énfasis en la derecha, es decir, que los dispositivos de adquisición tienen un offset en ese sentido, por lo que hay sesgo en la distribución hacia el lado derecho del borde, lo que implica que el ruido que más se presenta es el sustractivo. Otra cosa importante que muestran estas gráficas e imágenes, es lo que se comentó en la adquisición de las imágenes binarias y sucede en las imágenes en tonos de gris, que el ruido crece estructuradamente y se distribuye por los bordes. Ahora bien, la figura 5.22 destaca que *los escáneres son diferentes al generar ruido de adquisición, que aunque tienen una distribución similar, cada escáner tiene su propia distribución de probabilidad de ruido en las imágenes en tono de gris, esta conclusión es importante dado que el ruido en los medios de adquisición nunca será igual, sin embargo, sí puede ser modelado en cuanto a distribución por los bordes, pero no geométricamente en este momento.*

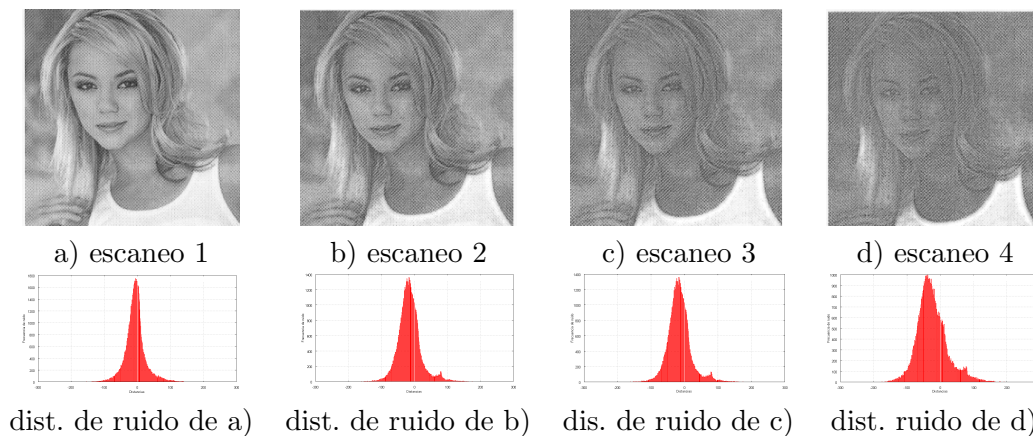


Figura 5.19: Distribución real de ruido de adquisición en la imagen de Ashlynn donde la mayor concentración de éste es cercana a la distancia 0.

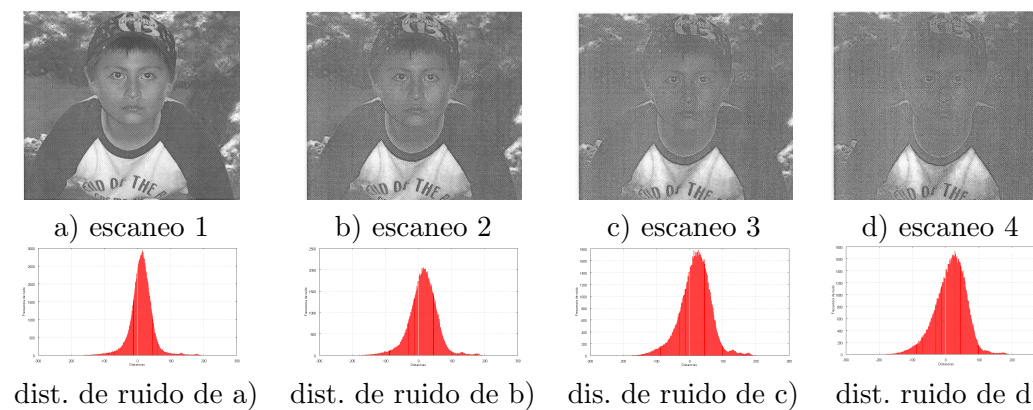


Figura 5.20: Distribución real del ruido en la imagen de Alexis donde la mayor concentración de la distribución de éste es cercana a la distancia 0.

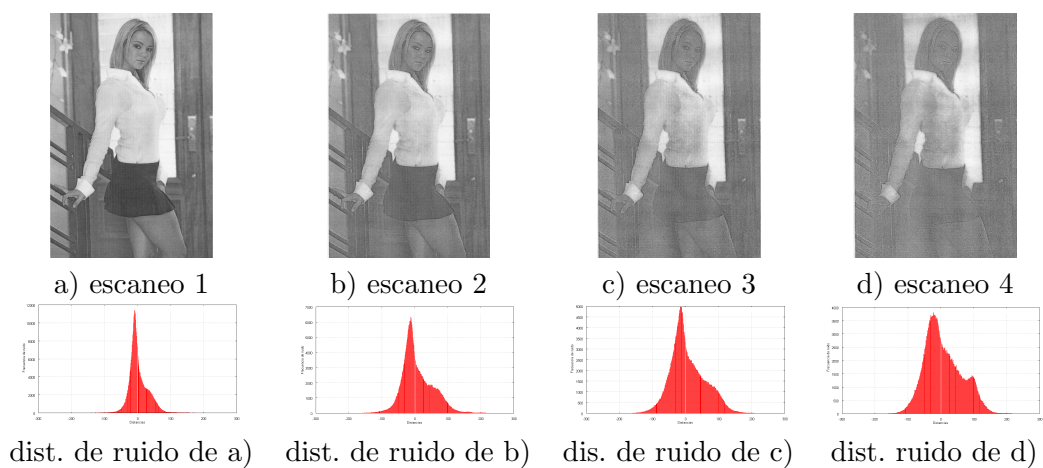


Figura 5.21: Distribución real del ruido en la imagen de Ashlynn, de cuerpo completo, donde la mayor concentración de la distribución de éste es cercana a la distancia 0.

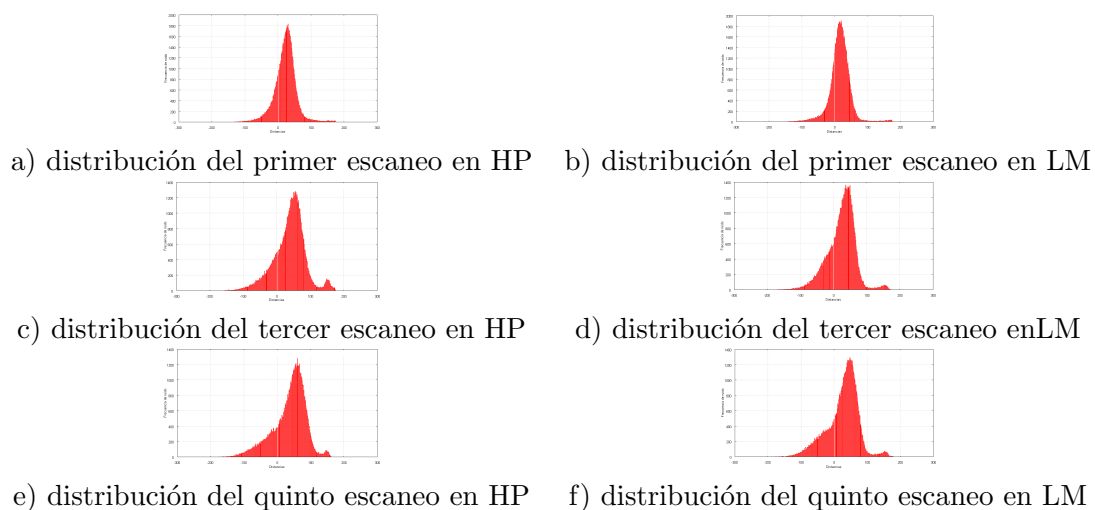


Figura 5.22: Comparativa de distribución real del ruido en HP con LM de la imagen de dragón.

5.2. Kernel con condiciones suficientes

La construcción del kernel con condiciones suficientes para la recuperación de patrones, está en función a la probabilidad de que el ruido se distribuya alrededor de los bordes, es decir, qué tan probable es que el ruido se acerca por la izquierda o se aleje por la derecha de la distancia 0. Para el caso de las imágenes en tono de gris el ruido aditivo (valores negativos dentro de la distribución) es el conjunto de valores mayores al tono de gris de la imagen y el ruido sustractivo (valores positivos dentro de la distribución) es el conjunto de valores menores al tono de gris. En las imágenes en tonos de gris sucede lo mismo que en las imágenes binarias, las distancias negativas afectadas por el ruido (ruido aditivo) son los valores de distancia del complemento y las distancias positivas, afectadas por el ruido (ruido sustractivo), son las distancias de la región de la imagen.

La tabla 5.1 muestra la distribución de probabilidad en que el ruido afecta de la distancia -16 a la 16 en imágenes binarias de tamaño de entre 420×420 y 600×800 . Se concluyó en esta distribución, dado que al realizar la media estadística, de todas las distancias involucradas en las distribuciones de probabilidades normalizadas de las imágenes usadas para demostrar la distribución del ruido, dio como resultado las distancias -16 a 16 . El promedio de distancias obtenido se derivó de la comparación realizada con el algoritmo descrito en la sección 4.1.1.

El ruido de adquisición crece y se distribuye proporcionalmente de acuerdo al tamaño de la imagen; por ejemplo, en imágenes escaladas, el ruido se presenta y se distribuye de la misma forma pero en escalas diferentes, guardando una relación de crecimiento y distribución. Para confirmar esto, se experimentó con imágenes de tamaño de 120×120 que son escala de las imágenes usadas en la sección 5.1.1; los resultados generados, basándose en el procedimiento de esta misma sección, se muestran en la tabla 5.2 y gráficamente en la figura 5.23. Para simular este comportamiento, el algoritmo 5.2 genera una distribución de ruido aproximada a la distribución de la tabla 5.2, tomando como base la tabla 5.1. El algoritmo calcula que la imagen de 120×120 está escalada en un 72% con respecto a la original que es de 420×420 . También, calculó que la relación de 33 distancias posibles (de la distancia -16 a la 16 incluyendo la 0) a ser afectadas por el ruido es 7 distancias en la nueva distribución incluyendo a la 0; finalmente, el algoritmo sugiere que las distancias: $-11, -6, -1, 1, 6, 11$ de la tabla 5.1 son las que se aproximan a las distancias $-3, -2, -1, -1, -2, -3$ de la tabla 5.2. Este algoritmo es aplicable para cualquier imagen binaria que sea en escala menor a las de estos experimentos.

Para la elección del kernel en las imágenes binarias se tomaron las distancias -3 a 3 porque se usaron imágenes de 120×120 con las probabilidades distribución de ruido de las distancias $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ de la tabla 5.2. La figura 5.24 en su renglón 1, muestra diferentes imágenes binarias usadas para la construcción del kernel; las dos imágenes de la izquierda en el renglón 2 son las TRD del complemento de las imágenes binarias.

Algoritmo 5.2: Algoritmo que genera la distribución de probabilidad de ruido en imágenes binarias escaladas

```

1 porcentajeDeEscala =
  round(tamañoImagenEscalada / tamañoImagenOriginal);
2 //son 33 distancias en la distribución;
3 distanciasEscaladas = round(33 * porcentajeDeEscala);
4 relacionEntreDistancias = 33 - distanciasEscaladas;
5 totalDeNuevasDistancias = trunc(relacionEntreDistancias/2);
6 incrementoDeDistancias = round(relacionEntreDistancias/2);
7 nuevaDistribucionEnDistancia(-1) = DistribucionEnDistanciaOriginal(1);
8 nuevaDistribucionEnDistancia(0) = DistribucionEnDistanciaOriginal(0);
9 nuevaDistribucionEnDistancia(1) = DistribucionEnDistanciaOriginal(1);
10 j = 1;
11 for i = 2 to totalDeNuevasDistancias - 1 do
12   nuevaDistribucionEnDistancia(i) =
     DistribucionEnDistanciaOriginal(j + incrementoDeDistancias);
13   nuevaDistribucionEnDistancia(-i) =
     DistribucionEnDistanciaOriginal(j + incrementoDeDistancias);
14   j = j + incrementoDeDistancias;
15   i = i + 1;
16 end

```

Para la elección del kernel con condiciones suficientes para la recuperación de patrones en las imágenes en tono de gris, se creó una tabla de distribución de probabilidades de ruido que afectará las distancias cercanas a la distancia 0. La tabla fue creada promediando todas las distribuciones de ruido de las comparaciones entre las imágenes usadas en la sección 5.1.2, con sus respectivas imágenes del escaneo número 2; las distribuciones fueron obtenidas por el algoritmo descrito en la sección 4.1.1 del capítulo 4. De acuerdo a la figura 5.25 da la impresión que el ruido de la imagen escaneada no se parece al ruido simulado de la imagen del inciso *b*; sin embargo, al observar las distribuciones de ruido en ambas imágenes se destaca que ambas tienen una distribución similar e inclusive, el offset hacia la derecha que genera el dispositivo electrónico, es similar, la diferencia estriba en que los dispositivos de adquisición del escáner agregan un tipo de textura en el ruido (ruido geométrico), la simulación de éste queda fuera del alcance de este trabajo de tesis. La figura 5.24 en su renglón 1, las dos imágenes de la derecha, muestra dos imágenes en tono de gris usadas para la construcción del kernel; el renglón 2, en las dos imágenes de la derecha, muestra la apariencia del kernel obtenido por el algoritmo descrito en la sección 4.1.1.

Finalmente, *las tablas de distribuciones 5.1 (donde la frecuencia absoluta está considerada por el número de pixel afectados en esa distancia entre el total de pixeles que conforman toda esa distancia)*, 5.3 y 5.4 son de suma importancia dado que proporcionan una forma ingeniosa de modelar el ruido real de adquisición en imágenes binarias y en tono de gris, modelado que no existía.

Tabla 5.1: Tabla de distribución absoluta y relativa donde el ruido de adquisición afecta a imágenes binarias.

Distancia	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Distancia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Absoluta
-16	0.008671	0.001462	1	0.083704	0.496576
-15	0.023641	0.003985	2	0.067346	0.399533
-14	0.034549	0.005824	3	0.057630	0.341890
-13	0.062222	0.010488	4	0.050575	0.300036
-12	0.093160	0.015703	5	0.042176	0.250210
-11	0.116809	0.019690	6	0.040142	0.238140
-10	0.124807	0.021038	7	0.034619	0.205380
-9	0.130464	0.021991	8	0.023627	0.140165
-8	0.140165	0.023627	9	0.021991	0.130464
-7	0.205380	0.034619	10	0.021038	0.124807
-6	0.238140	0.040142	11	0.019690	0.116809
-5	0.250210	0.042176	12	0.015703	0.093160
-4	0.300036	0.050575	13	0.010488	0.062222
-3	0.341890	0.057630	14	0.005824	0.034549
-2	0.399533	0.067346	15	0.003985	0.023641
-1	0.496576	0.083704	16	0.001462	0.008671
0	0	0			

La construcción del kernel es una consecuencia directa de las distancias poco probables que el ruido afecte, tomando como base las tablas mencionadas en el párrafo anterior. Para el caso binario de patrones con los que se probará el nuevo modelo de memorias heteroasociativas basadas en álgebra min y max son imágenes de 50×50 , 80×80 y 120×120 y las distancias afectadas por el ruido van de, en el caso de las de 50×50 la distancia -2 a la 2 y de las otras imágenes de la -3 hasta 3 ; para el caso de las imágenes en tonos de gris que serán patrones para el nuevo modelo de memorias heteroasociativas van de una distancia de -30 a 30 que también son imágenes de 50×50 , 80×80 y 120×120 . La figura 5.24 muestra kernels generados con estos criterios.

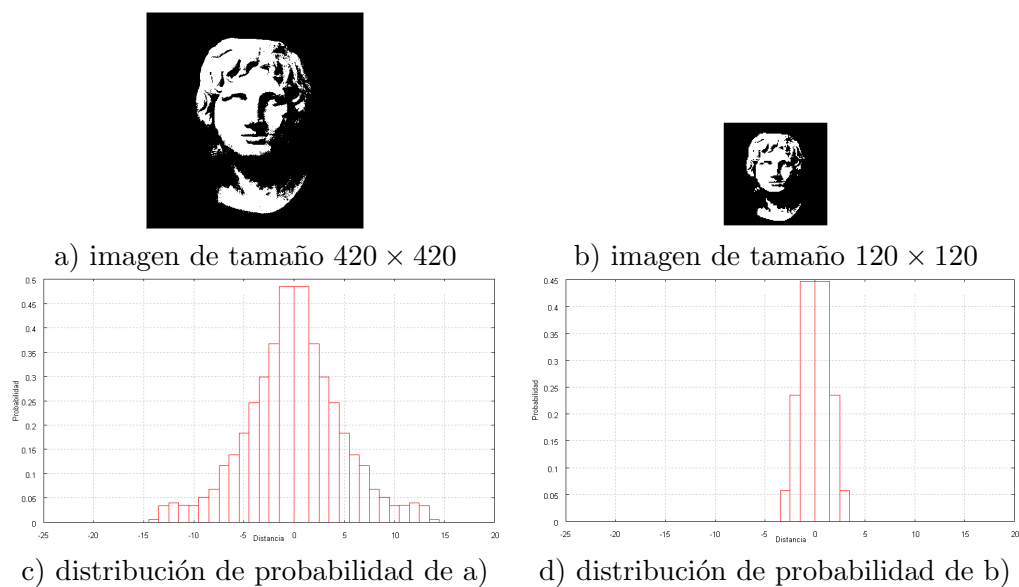


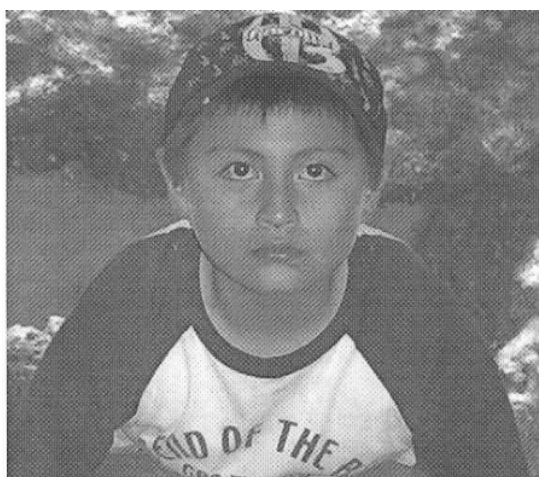
Figura 5.23: Distribuciones de ruido de la misma imagen con diferentes tamaños.

Tabla 5.2: Tabla de distribución de frecuencias absolutas y relativas donde el ruido de adquisición afecta a imágenes binarias.

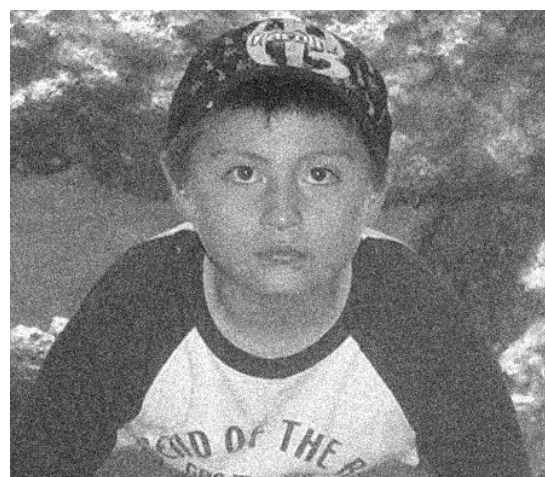
Distancia	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
-3	0.056645	0.03837
-2	0.234586	0.158903
-1	0.446907	0.302725
0	0	0
1	0.446907	0.302725
2	0.234586	0.158903
3	0.056645	0.03837



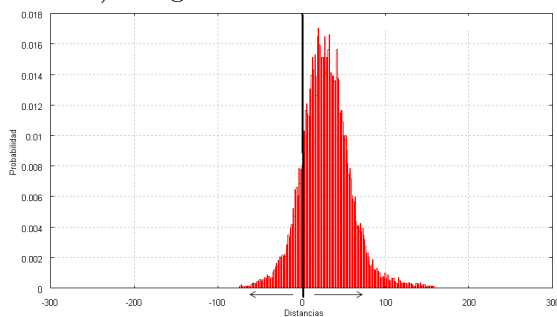
Figura 5.24: Imágenes (renglón 1) y sus kernels (renglón 2).



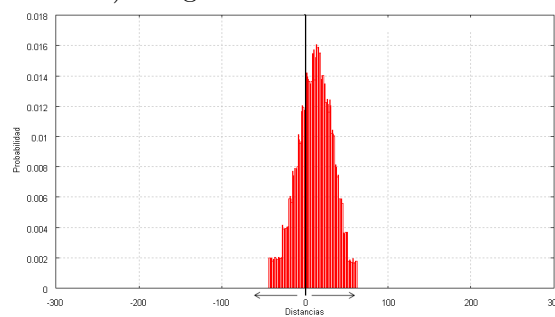
a) Imagen con ruido de escáner



b) Imagen con ruido simulado



c) Distribución de probabilidad de a)



d) Distribución de probabilidad de b)

Figura 5.25: Comparación de distribuciones de ruido entre imagen escaneada e imagen con ruido simulado.

Tabla 5.3: Tabla A de distribución de probabilidades de ruido de adquisición en imágenes en tonos de gris.

Distancia	Probabilidad	Distancia	Probabilidad
-37	0.001909	-2	0.015368
-35	0.001726	-1	0.013755
-32	0.001869	1	0.011687
-30	0.001863	2	0.015145
-29	0.001880	3	0.016274
-28	0.001966	4	0.013789
-27	0.003915	5	0.015561
-26	0.001869	6	0.015584
-25	0.003932	8	0.016120
-24	0.004000	9	0.013989
-23	0.001863	10	0.015521
-22	0.005783	11	0.015726
-21	0.005789	12	0.016046
-20	0.006239	13	0.015419
-19	0.007658	14	0.015179
-18	0.005385	15	0.011897
-17	0.003920	16	0.013880
-16	0.006160	17	0.012296
-15	0.005749	18	0.015875
-14	0.007635	19	0.012017
-13	0.002023	20	0.017704
-12	0.008063	21	0.015436
-11	0.005886	22	0.015801
-10	0.009516	23	0.013362
-9	0.009390	24	0.015516
-8	0.010188	25	0.010467
-7	0.009453	26	0.011943
-6	0.013852	27	0.018137
-5	0.011687	28	0.013709
-4	0.014085	29	0.010752
-3	0.015595	30	0.011989

Tabla 5.4: Tabla *B* de distribución de probabilidades de ruido adquisición en imágenes en tonos de gris.

Distancia	Probabilidad	Distancia	Probabilidad
31	0.010370	49	0.003510
32	0.012558	50	0.003966
33	0.013966	51	0.003624
34	0.010217	52	0.005795
35	0.013362	53	0.003493
36	0.010131	54	0.000034
37	0.008080	54	0.000034
38	0.011088	54	0.000034
39	0.009442	56	0.003322
40	0.009692	57	0.001852
41	0.005818	58	0.001949
42	0.005766	59	0.001772
43	0.003852	60	0.000017
44	0.007464	61	0.000040
45	0.003726	62	0.001829
46	0.005692	63	0.001715
47	0.005191	64	0.001664
48	0.005293	65	0.000011

5.3. Nuevo modelo de memorias heteroasociativas basadas en álgebra min y max

En esta sección se muestran los resultados de los experimentos realizados para mostrar la eficacia del nuevo modelo de memorias asociativas en álgebra min y max. Los experimentos fueron realizados en una Laptop Dell XPS M1530 con procesador Intel Centrino con 3 Gigabytes de RAM. Las imágenes usadas para el aprendizaje y la recuperación de las memorias fueron tanto binarias como en tonos de gris. El tamaño de las imágenes fueron de 50×50 , 80×80 y de 120×120 , las imágenes de 120 son imágenes del mundo real. Para estos experimentos se contaron con 6 conjuntos fundamentales.

El proceso de aprendizaje y recuperación de patrones consistió en aprender, en primera instancia, todo el conjunto fundamental con un kernel formado a partir de la distancia i , una vez aprendido, se escogió un patrón a la vez para que fuera recuperado 1000 veces, generando como resultado el porcentaje de efectividad en la recuperación completa de patrones. El proceso de 1000 recuperaciones se realizó para todos los patrones del conjunto fundamental. Además, el proceso de aprendizaje y recuperación se realizó para todos los conjuntos fundamentales.

La figura 5.26 muestra los conjuntos fundamentales 1 y 2 usados para la recuperación de patrones afectados con ruido mezclado en el nuevo modelo de memoria heteroasociativa min y para el modelo de kernel, propuesto por Ritter, Sussner y Díaz-de-León, en imágenes de 50×50 ; la figura 5.27 muestra los conjuntos fundamentales 3 y 4 que son imágenes de 80×80 , así como la apariencia del ruido de adquisición simulado en algunos patrones. La figura 5.28 muestra los conjuntos fundamentales 5 y 6, estos conjuntos son imágenes de patrones tomados de la vida real. Todos los patrones fundamentales usados en los 6 conjuntos cumplen con las condiciones establecidas por las memorias asociativas en álgebra min y max para garantizar el aprendizaje y recuperación de éstos.

Las distancias para crear los kernels con condiciones suficientes para la recuperación de patrones fueron tomadas por las distribuciones de ruido en las tablas 5.2, 5.3 y 5.4, asignado:

- desde la distancia 1 hasta la 2 en las patrones de imágenes binarias de 50×50 , dado que el ruido en imágenes de este tamaño afecta hasta la distancia 2;
- la distancia 1 a la 3 para los patrones de imágenes binarias de 80×80 y 120×120 , porque el ruido afecta hasta la distancia 3;
- de la distancia 10 hasta la 30 para imágenes en tonos de gris dado que el ruido en estas imágenes afecta hasta la distancia 30.

El teorema 4.19 asegura que $E(d) \geq 1 - \sum_d^{\infty} P_r(p|\tau(p) = i)$ para $d > 0$ donde $E(d)$ es la probabilidad de éxito en la recuperación perfecta de patrones alterados con ruido mezclado. Lo que implica que se tomará una distancia d de alguna distribución

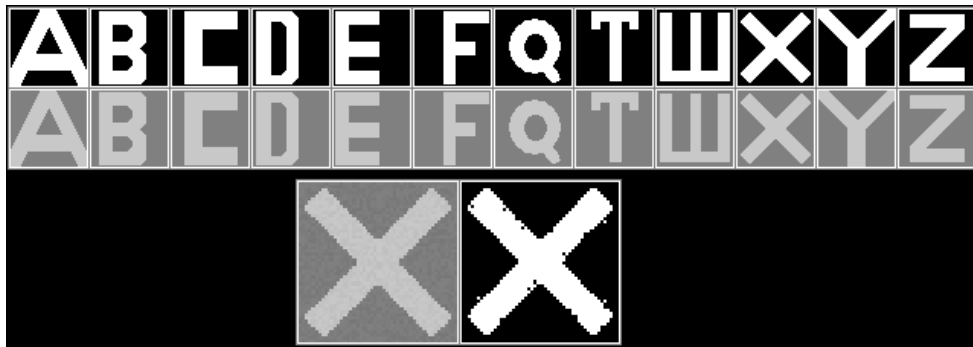


Figura 5.26: Conjuntos fundamentales para imágenes binarias y en tonos de gris cuyo tamaño es de 50×50 . Además de mostrar la apariencia de ruido de adquisición simulado.

de ruido contenida en alguna de las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 si el patrón es binario o es en tonos de gris.

Para las imágenes binarias se escogen las distancias 1, 2 y 3 cuyas probabilidades de que el nuevo modelo de memoria heteroasociativa min falle son: para $d = 1$ es 0.302725, $d = 2$ es 0.158903 y $d = 3$ es 0.03837, lo que implica que la probabilidad de éxito de recuperaciones completas para el nuevo modelo son: para $d = 1$ es 69.72%, para $d = 2$ es 84.10% y para $d = 3$ es 96.16%. En el caso de imágenes en tonos de gris, la probabilidad de que el nuevo modelo de memoria heteroasociativa min recupere de manera completa para los patrones es: para $d = 10$ es de 71.33%, para $d = 20$ es de 85.71% y para $d = 30$ es de 100%. Como se puede observar en las tablas 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10, todas las recuperaciones completas de los patrones cumplen con lo que el teorema 4.19 especifica, de tal manera que se puede concluir que el nuevo modelo sí recupera los patrones afectados con ruido mezclado de acuerdo a lo esperado. En las tablas mencionadas anteriormente se puede observar que el modelo original de kernel recupera al 100% todos los patrones si éste es escogido adecuadamente, el kernel usado para el modelo original se obtuvo con la TRD y la distribución real del ruido de adquisición, en las tablas 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10 se puede observar que la distancia para el kernel del modelo original es mayor en una distancia que al del nuevo modelo, esto es relevante, dado que el kernel en el modelo original no debe ser tocado por el ruido y en el nuevo modelo, el kernel, puede contener ruido sustractivo. Se destaca, además, en estas tablas, que el nuevo modelo recupera en forma completa los patrones bajo las mismas condiciones que el modelo de kernel original.

En resumen, el nuevo modelo de memorias asociativas esta compuesto por dos partes:

1. La construcción del kernel, con condiciones suficientes para la recuperación de patrones, se basa en las distribuciones de probabilidades de las tablas 5.1, 5.3 y 5.4; para el caso binario, una vez obtenido la distancia d se construye el kernel con el complemento de la TRD comenzando a dibujar con color blanco en todas

Tabla 5.5: porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 1 (imágenes binarias de 50x50) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.

Patrón	Modelo de Kernel		Sin ruido	Nuevo modelo	
	Sin ruido	$d = 3$		$d = 1$	$d = 2$
A	100 %	100 %	100 %	77.00 %	100 %
B	100 %	100 %	100 %	70.10 %	100 %
C	100 %	100 %	100 %	93.00 %	100 %
D	100 %	100 %	100 %	74.20 %	100 %
E	100 %	100 %	100 %	78.00 %	100 %
F	100 %	100 %	100 %	79.10 %	100 %
Q	100 %	100 %	100 %	71.70 %	100 %
T	100 %	100 %	100 %	79.00 %	100 %
W	100 %	100 %	100 %	71.20 %	100 %
X	100 %	100 %	100 %	70.00 %	100 %
Y	100 %	100 %	100 %	70.10 %	100 %
Z	100 %	100 %	100 %	69.80 %	100 %

Tabla 5.6: porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 2 (imágenes en tonos de gris de 50x50) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.

Patrón	Modelo de Kernel		Sin ruido	Nuevo modelo	
	Sin ruido	$d = 31$		$d = 20$	$d = 30$
A	100 %	100 %	100 %	86.10 %	100 %
B	100 %	100 %	100 %	87.00 %	100 %
C	100 %	100 %	100 %	92.20 %	100 %
D	100 %	100 %	100 %	90.10 %	100 %
E	100 %	100 %	100 %	86.30 %	100 %
F	100 %	100 %	100 %	87.20 %	100 %
Q	100 %	100 %	100 %	86.50 %	100 %
T	100 %	100 %	100 %	88.10 %	100 %
W	100 %	100 %	100 %	86.20 %	100 %
X	100 %	100 %	100 %	89.50 %	100 %
Y	100 %	100 %	100 %	91.30 %	100 %
Z	100 %	100 %	100 %	86.00 %	100 %

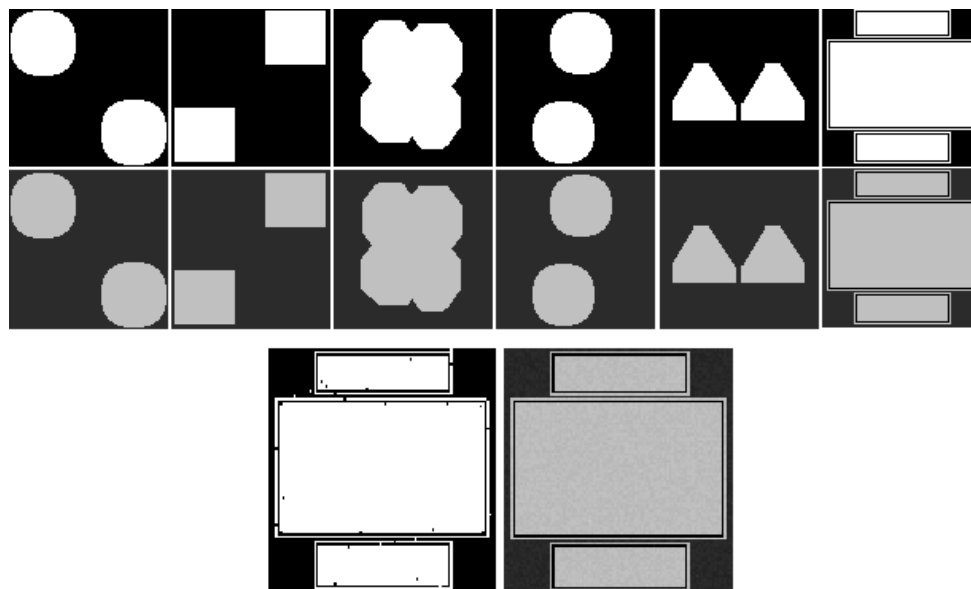


Figura 5.27: Conjuntos fundamentales para imágenes binarias y en tonos de gris cuyo tamaño es de 80x80. Además de mostrar la apariencia de ruido de adquisición simulado.

Tabla 5.7: porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 3 (imágenes binarias de 80x80) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteroasociativa min.

Patrón	Modelo de Kernel			Nuevo modelo		
	Sin ruido	$d = 4$	Sin ruido	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
1	100 %	100 %	100 %	78.10 %	97.10 %	100 %
2	100 %	100 %	100 %	75.20 %	95.60 %	100 %
3	100 %	100 %	100 %	77.10 %	97.10 %	100 %
4	100 %	100 %	100 %	78.40 %	97.30 %	100 %
5	100 %	100 %	100 %	69.90 %	98.20 %	100 %
6	100 %	100 %	100 %	80.00 %	99.00 %	100 %

Tabla 5.8: porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 4 (imágenes en tonos de gris de 80x80) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteroasociativa min.

Patrón	Modelo de Kernel			Nuevo modelo		
	Sin ruido	$d = 31$	Sin ruido	$d = 10$	$d = 20$	$d = 30$
1	100 %	100 %	100 %	77.60 %	89.00 %	100 %
2	100 %	100 %	100 %	79.10 %	89.20 %	100 %
3	100 %	100 %	100 %	75.20 %	87.10 %	100 %
4	100 %	100 %	100 %	80.00 %	91.00 %	100 %
5	100 %	100 %	100 %	78.10 %	90.10 %	100 %
6	100 %	100 %	100 %	82.90 %	92.20 %	100 %



Figura 5.28: Conjuntos fundamentales para imágenes binarias y en tonos de gris cuyo tamaño es de 120x120.

Tabla 5.9: porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 5 (imágenes binarias de 120x120) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.

Patrón	Modelo de Kernel			Nuevo modelo		
	Sin ruido	$d = 4$	Sin ruido	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
1	100 %	100 %	100 %	79.20 %	96.10 %	100 %
2	100 %	100 %	100 %	77.10 %	96.00 %	100 %
3	100 %	100 %	100 %	81.90 %	98.10 %	100 %

Tabla 5.10: porcentaje de recuperaciones completas para el conjunto fundamental 6 (imágenes en tonos de gris de 120x120) con el modelo de kernel y el nuevo modelo de memorias heteorasociativa min.

Patrón	Modelo de Kernel			Nuevo modelo		
	Sin ruido	$d = 31$	Sin ruido	$d = 10$	$d = 20$	$d = 30$
1	100 %	100 %	100 %	78.40 %	91.50 %	100 %
2	100 %	100 %	100 %	77.80 %	89.50 %	100 %
3	100 %	100 %	100 %	78.20 %	90.90 %	100 %

las distancias mayores o iguales a d , al realizar este proceso se está incluyendo casi en su totalidad el ruido mezclado que está distribuido por los bordes, viéndose ahora el ruido mezclado como ruido sustractivo.

2. Se hace uso del modelo de la memoria heteroasociativa min (lo que aplica tanto a las memorias morfológicas como las memorias $\alpha\beta$ y a cualquier memoria asociativa basada en álgebra min y max).

Al convertir el ruido mezclado en ruido sustractivo por medio del kernel, se obtienen dos ventajas importantes, la primera es que el ruido mezclado, es decir el ruido de adquisición, ya no es necesario tratarlo con el modelo tradicional de kernel descrito en [21] [22], lo que implica que no se hará uso de las memorias M y W simultáneamente. El uso del modelo de kernel tradicional implica aprender 2 veces con memorias diferentes, además de trabajar en la modalidad autoasociativa y heteroasociativa, a parte de hacer dos recuperaciones. La segunda ventaja es la reducción a la mitad de tiempo computacional.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se presentarán las principales conclusiones que se derivaron del presente trabajo de tesis. Además, se dará una perspectiva de los trabajos que pueden continuarse o bien crearse como consecuencia de esta investigación.

6.1. Conclusiones

1. *El ruido de adquisición en una imagen binaria se presenta, crece y se distribuye estructuradamente donde hay cambios significativos de gradiente, además de ser ruido mezclado.*
2. *Entre más alejado esté un pixel de su borde, es decir de la distancia 1, la probabilidad que el ruido lo afecte es baja, pero si éste es de borde o cercano al borde la probabilidad de que sea afectado por el ruido es muy alta.*
3. *Una imagen en tonos de gris puede ser vista como una sábana tridimensional o una superficie, donde el valor de tono de gris representa la distancia 1.*
4. *El ruido adquirido por las imágenes en tono de gris es mezclado y afecta el 100% de los tonos de gris haciendo que los tonos oscuros se abrillanten y los colores brillantes se oscurezcan.*
5. *Cada escáner generan una distribución de ruido que es diferente al de otro escáner, aunque la distribución de ruido producida por los escáners son muy similares; es decir, cada escáner tiene su propia distribución de probabilidad de ruido. Sin embargo, estas diferencias no impiden que el ruido de adquisición puede modelarse y tratarse de manera correcta en el reconocimiento de patrones.*
6. *Las tablas de distribuciones 5.1, 5.3 y 5.4 son de suma importancia dado que proporcionan una forma ingeniosa de modelar el ruido real de adquisición en imágenes binarias y en tono de gris, modelo que no existía.*
7. *Mediante el nuevo modelo de memoria heteroasociativa W se obtienen dos ventajas importantes que son:*

- a) *El ruido mezclado, es decir, el ruido de adquisición es visto como ruido sustractivo, por lo tanto, ya no es necesario tratarlo con el modelo tradicional de kernel, lo que implicaba hacer uso de las memorias M y W simultáneamente para el aprendizaje y la recuperación.*
- b) *El permitir que el kernel pueda estar afectado con cierto porcentaje de ruido, cosa que no se permite en el modelo original, genera la opción de determinar qué tanto se está dispuesto a aceptar falsos positivos o falsos negativos en la recuperación de patrones, dando la posibilidad de determinar costo/beneficio para tomas de decisiones.*

6.2. Trabajos futuros

1. Obtención de kernels para memorias asociativas en álgebra min y max robustas a ruido mezclado con operaciones k-estadísticas.
2. Definición y tratamiento para que cualquier conjunto de patrones cumpla con las condiciones necesarias y suficientes de aprendizaje y recuperación en la familia de memorias asociativas en álgebra min y max.
3. Modelado del ruido geométrico producido por dispositivos de adquisición.
4. Desarrollo de modelo genérico aplicable a la familia de memorias asociativas en álgebra min y max con notación funcional.
5. Extensión de la función de probabilidad desarrollada en este trabajo de tesis a diferentes memorias asociativas y clasificadores.
6. Realizar estudio comparativo experimental de la distribución del ruido generado por los medios de adquisición y los medios de transmisión con un número considerable de sensores de adquisición y de medios de transmisión bajo condiciones favorables para que el ruido aparezca.
7. Desarrollo de modelo genérico de memorias heteroasociativas max robustas al ruido mezclado.

Apéndice A

Condiciones de convergencia para las memorias asociativas min robustas al ruido sustractivo

Las memorias en asociativas W quedan demostradas a través de los teoremas y corolarios que a continuación se muestran:

$$W = W^1 \wedge W^2 \wedge \dots \wedge W^k = \bigwedge_{\xi=1}^k (y^\xi \nabla (-x^\xi)^t) \quad (\text{A.1})$$

donde

$$W^\xi = y^\xi \nabla (-x^\xi)^t \quad y \quad w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^\xi - x_j^\xi) \quad (\text{A.2})$$

Teorema A.1 $W \nabla x^\xi = y^\xi \forall \xi = 1, \dots, k$ si y sólo si para cada índice renglón $i = 1, \dots, m$ existen columnas índices $j_\xi^i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$w_{ij_\xi^i} = y_i^\xi - x_{j_\xi^i}^\xi \quad \forall \xi = 1, \dots, k \quad (\text{A.3})$$

Demostración. Suponga que $W \nabla x^\xi = y^\xi \forall \xi = 1, \dots, k$. Sean $i \in \{1, \dots, m\}$ arbitrarios. Se necesita mostrar que existe la columna $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $w_{ij_0^i} = y_i^\gamma - x_{j_0}^\gamma$. Supóngase lo contrario, que $w_{ij} \neq y_i^\gamma - x_j^\gamma$ para todo $j = 1, \dots, n$ donde W es el mínimo de las matrices $y^\xi \times (-x^\xi)^t$ donde $\xi = 1, \dots, k$, se tiene que $y^\gamma \times (-x^\gamma)^t \geq W$. Por eso, la hipótesis anterior es equivalente a la declaración $y_i^\gamma - x_j^\gamma > w_{ij} \forall j = 1, \dots, n$. Pero ahora aparece una contradicción a la hipótesis debido a la siguiente consideración:

$$y_i^\gamma = (w \nabla x^\gamma)_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^\gamma) > \bigvee_{j=1}^n ([y_i^\gamma - x_j^\gamma] + x_j^\gamma) = y_i^\gamma \quad (\text{A.4})$$

A fin de demostrar lo contrario, note que $y^\xi \times (-x^\xi)^t = W^\xi \geq W \forall \xi = 1, \dots, k$. Por lo tanto, $W^\xi \nabla x^\xi \geq W \nabla x^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$, pero

$$W^\xi \nabla x^\xi = \begin{pmatrix} \bigvee_{i=1}^n (y_1^\xi - x_i^\xi + x_i^\xi) \\ \vdots \\ \bigvee_{i=1}^n (y_m^\xi - x_i^\xi + x_i^\xi) \end{pmatrix} = y^\xi \quad (\text{A.5})$$

para todo $\xi = 1, \dots, k$, por lo tanto $y^\xi \geq W \nabla x^\xi \forall \xi = 1, \dots, k$. A fin de mostrar que se tiene la igualdad, se muestra que también se tiene $W \nabla x^\xi \geq y^\xi \forall \xi = 1, \dots, k$.

Tómese nuevamente de manera arbitraria índices $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\gamma \in \{1, \dots, k\}$ y evalúese $W \nabla x^\gamma$ en el índice i

$$(W \nabla x^\gamma)_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^\gamma) \geq w_{ij^\gamma} + x_{j^\gamma}^\gamma = (y_i^\gamma - x_{j^\gamma}^\gamma) + x_{j^\gamma}^\gamma = y_i^\gamma \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto $W \nabla x^\gamma \geq y^\gamma$, cambiando γ arbitrariamente. ■

Corolario A.2 $W \nabla x^\xi = y^\xi \forall \xi = 1, \dots, k$ si y sólo si para cada renglón índice $i = 1, \dots, m$ existen columnas índices $j_\gamma^i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$x_{j_\gamma^i}^\gamma = \bigvee_{\xi=1}^k (x_{j_\gamma^i}^\xi - y_i^\xi) + y_i^\gamma \quad (\text{A.7})$$

Demostración. De acuerdo con el teorema A.1. $W \nabla x^\xi \forall \xi = 1, \dots, k$ si y sólo si para cada renglón índice $i = 1, \dots, m$ y cada $\gamma \in \{1, \dots, k\}$ existe al menos una columna índice $j_\gamma^i \in \{1, \dots, n\}$ tal que :

$$y_i^\gamma - x_{j_\gamma^i}^\gamma = w_{ij_\gamma^i} = \bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^\xi - x_{j_\gamma^i}^\xi) \quad (\text{A.8})$$

esta ecuación se mantiene si y sólo si

$$x_{j_\gamma^i}^\gamma - y_i^\gamma = -w_{ij_\gamma^i} = \bigvee_{\xi=1}^k (x_{j_\gamma^i}^\xi - y_i^\xi) \quad (\text{A.9})$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$x_{j_\gamma^i}^\gamma = \bigvee_{\xi=1}^k (x_{j_\gamma^i}^\xi - y_i^\xi) + y_i^\gamma \quad (\text{A.10})$$

■

Teorema A.3 Sea $\tilde{x}^\gamma \forall \gamma = 1, \dots, k$ la versión distorsionada del patrón x^γ . Se cumple que $W \nabla \tilde{x}^\gamma = y^\gamma$ si y sólo si

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq x_j^\gamma \vee \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{\xi \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{A.11})$$

y para cada renglón índice $i \in \{1, \dots, m\}$ existe una columna índice $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^\gamma = x_{j_i}^\gamma \vee \left(\bigvee_{\xi \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_{j_i}^\xi] \right) \quad (\text{A.12})$$

Demostración. Suponga que \tilde{x}^γ denota la versión distorsionada de x^γ y que $\forall \gamma = 1, \dots, k$, $W \nabla \tilde{x}^\gamma = y^\gamma$. Entonces:

$$y_i^\gamma = (W \nabla \tilde{x}^\gamma)_i = \bigvee_{l=1}^n (w_{il} + \tilde{x}_l^\gamma) \geq w_{ij} + \tilde{x}_j^\gamma \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^\gamma &\leq y_i^\gamma - w_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, \dots, n & (\text{A.14}) \\ \Leftrightarrow \tilde{x}_j^\gamma &\leq \bigwedge_{i=1}^m (y_i^\gamma - w_{ij}) \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \tilde{x}_j^\gamma &\leq \bigwedge_{i=1}^m [y_i^\gamma - \bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^\xi - x_j^\xi)] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \tilde{x}_j^\gamma &\leq \bigwedge_{i=1}^m [y_i^\gamma + \bigvee_{\xi=1}^k (x_j^\xi - y_i^\xi)] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \tilde{x}_j^\gamma &\leq \bigwedge_{i=1}^m [y_i^\gamma + \bigvee_{\xi \neq \gamma} (x_j^\xi - y_i^\xi) \vee (x_j^\gamma - y_i^\gamma)] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \tilde{x}_j^\gamma &\leq \bigwedge_{i=1}^m [\bigvee_{\xi \neq \gamma} (y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi) \vee x_j^\gamma] \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \tilde{x}_j^\gamma &\leq x_j^\gamma \vee \bigwedge_{i=1}^m [\bigvee_{\xi \neq \gamma} (y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi)] \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Esto muestra que la inecuación obtenida en A.14 ha sido satisfactoria. Lo que continua es

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq x_j^\gamma \vee \left[\bigvee_{\xi \neq \gamma} (y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi) \right] \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ y } \forall i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.15})$$

Supóngase que el conjunto obtenido en A.15 no contiene la equivalencia para $i = 1, \dots, m$; es decir, se asume que existen índices de renglón $i \in \{1, \dots, m\}$ tales que

$$\tilde{x}_j^\mu < x_j^\gamma \vee \left[\bigvee_{\xi \neq \gamma} (y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi) \right] \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{A.16})$$

entonces

$$\begin{aligned}
 (W \nabla \tilde{x}^\gamma)_i &= \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + \tilde{x}_j^\gamma) & (A.17) \\
 &< \bigvee_{j=1}^n \left[w_{ij} + x_j^\gamma \vee \left(\bigvee_{\xi \neq 1} [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi] \right) \right] \\
 &= \bigvee_{j=1}^n \left[w_{ij} + \left(\bigvee_{\xi=1}^k [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi] \right) \right] \\
 &= \bigvee_{j=1}^n [w_{ij} + y_i^\gamma - \bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^\xi - x_j^\xi)] \\
 &= \bigvee_{j=1}^n [w_{ij} + y_i^\gamma - w_{ij}] \\
 &= y_i^\gamma.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(W \nabla \tilde{x}^\gamma)_i < y_i^\gamma$ lo cual contradice la hipótesis de que $W \nabla \tilde{x}^\gamma = y^\gamma$. Esto indica que por cada renglón índice debe existir una columna índice de j_i satisfaciendo A.12.

Ahora se probará el inverso. Suponga que

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq x_j^\gamma \vee \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{\xi \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (A.18)$$

para la primera parte de la demostración, la inecuación es verdadera si y sólo si

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq y_i^\gamma - w_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, \dots, n \quad (A.19)$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$w_{ij} + \tilde{x}_j^\gamma \leq y_i^\gamma \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ y } \forall i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + \tilde{x}_j^\gamma) \leq y_i^\gamma \quad \forall i = 1, \dots, m & (A.20) \\
 &\Leftrightarrow (W_{XY} \nabla \tilde{X})_i \leq y_i^\gamma \quad \forall i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

esto implica que $W_{XY} \nabla \tilde{x}_\gamma \leq y_\gamma \quad \forall \gamma = 1, \dots, k$ por lo tanto, si se muestra que $W_{XY} \nabla \tilde{x}^\gamma \geq y_\gamma \quad \forall \gamma = 1, \dots, k$, entonces se tendrá que $W_{XY} \nabla \tilde{x}^\gamma = y^\gamma \quad \forall \gamma$. Sea $\gamma \in \{1, \dots, k\}$ e $i \in \{1, \dots, m\}$ escogidos arbitrariamente. Entonces

$$\begin{aligned}
 (W_{XY} \nabla \tilde{x}^\gamma)_i &= \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + \tilde{x}_j^\gamma) & (A.21) \\
 &\geq w_{ij_i} + \tilde{x}_{j_i}^\gamma \\
 &= w_{ij_i} + \left(x_{j_i}^\gamma \vee \bigvee_{\xi \neq 1} [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_{j_i}^\xi] \right) \\
 &= w_{ij_i} + \bigvee_{\xi=1}^k [y_i^\gamma - y_i^\xi + x_{j_i}^\xi] \\
 &= w_{ij_i} + y_i^\gamma - \bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^\xi - x_{j_i}^\xi) \\
 &= w_{ij_i} + y_i^\gamma - w_{ij_i} \\
 &= y_i^\gamma
 \end{aligned}$$

Esto muestra que $W_{XY} \nabla \tilde{x}^\gamma \geq y^\gamma$. ■

Apéndice B

Tablas de variaciones en la adquisición de datos entre escáners

Este apéndice presenta las variaciones existentes entre la imagen original y sus cinco imágenes escaneadas, destacando el máximo valor alcanzado por el ruido (ruido aditivo) así como el valor mínimo (ruido sustractivo).

Tabla B.1: Porcentaje de variación entre imágenes por número de escaneos e impresiones de las 25 imágenes binarias obtenidas por los escáners **HP** y **LM**.

	HP			LM		
	5	10	15	5	10	15
1	13 %	19 %	26 %	12 %	18 %	26 %
2	11 %	17 %	25 %	12 %	19 %	27 %
3	11 %	18 %	25 %	11 %	19 %	24 %
4	12 %	17 %	24 %	12 %	16 %	23 %
5	13 %	18 %	27 %	13 %	18 %	27 %
6	10 %	17 %	24 %	9 %	15 %	23 %
7	13 %	20 %	28 %	14 %	22 %	27 %
8	12 %	19 %	27 %	12 %	21 %	28 %
9	13 %	18 %	25 %	12 %	18 %	26 %
10	11 %	18 %	25 %	10 %	16 %	23 %
10	11 %	17 %	25 %	12 %	18 %	27 %
11	11 %	19 %	25 %	11 %	19 %	24 %
12	13 %	20 %	29 %	12 %	19 %	27 %
13	12 %	21 %	29 %	13 %	21 %	27 %
14	10 %	18 %	26 %	10 %	17 %	25 %
15	12 %	19 %	27 %	11 %	20 %	26 %
16	13 %	21 %	29 %	14 %	21 %	28 %
17	10 %	17 %	24 %	9 %	17 %	25 %
18	11 %	19 %	26 %	11 %	19 %	27 %
19	15 %	22 %	29 %	14 %	23 %	28 %
20	13 %	19 %	27 %	13 %	19 %	26 %
21	13 %	21 %	28 %	11 %	20 %	26 %
22	11 %	20 %	26 %	11 %	20 %	26 %
23	12 %	20 %	29 %	11 %	20 %	30 %
24	13 %	21 %	28 %	13 %	20 %	28 %
25	9 %	19 %	26 %	10 %	18 %	28 %

Tabla B.2: Máximos y mínimos de variación entre imágenes por número de escaneos e impresiones de 20 imágenes en tonos de gris en HP

	1		2		3		4		5	
	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min
1	160	50	170	201	167	182	184	205	190	205
2	195	238	194	219	197	245	198	193	203	244
3	177	197	183	197	185	192	187	189	184	198
4	185	255	200	255	192	255	185	255	206	255
5	153	157	174	198	172	189	178	201	201	202
6	135	173	164	152	165	179	167	190	182	208
7	201	217	209	221	218	228	226	231	229	242
8	181	230	190	245	192	255	201	255	204	255
9	160	181	171	197	179	208	185	216	189	222
10	171	217	189	222	192	231	206	239	209	255
11	155	190	183	173	186	198	185	208	200	219
12	181	197	196	200	207	209	216	219	223	231
13	161	147	172	150	186	175	201	199	214	215
14	162	184	171	199	175	207	186	215	200	220
15	176	215	187	225	194	230	208	236	217	249
16	159	151	169	203	165	185	179	202	192	208
17	199	233	197	229	200	240	204	222	206	249
18	177	190	181	197	186	191	189	191	192	181
19	186	251	201	255	192	255	194	255	208	255
20	163	168	185	188	192	201	195	206	201	213

Tabla B.3: Máximos y mínimos de variación entre imágenes por número de escaneos e impresiones de 20 imágenes en tonos de gris en LM

	1		2		3		4		5	
	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min
1	161	152	168	201	169	187	184	210	189	207
2	195	229	196	211	198	234	199	212	202	234
3	177	197	182	199	186	205	190	209	184	213
4	189	255	200	255	198	255	187	255	205	255
5	157	157	179	196	178	192	181	197	199	200
6	135	172	165	151	165	181	169	188	183	202
7	199	214	207	221	219	229	221	229	218	239
8	181	231	183	235	191	245	201	253	206	255
9	157	182	163	197	175	207	185	211	192	223
10	171	215	191	219	192	227	207	231	208	235
11	153	191	173	169	189	191	187	209	202	211
12	183	192	199	201	206	211	212	211	219	228
13	161	148	171	152	181	170	198	199	208	211
14	160	181	173	191	180	202	185	211	202	219
15	177	211	187	219	191	228	203	226	213	238
16	161	150	167	199	165	195	177	202	192	210
17	199	222	196	221	201	238	205	219	209	251
18	177	191	183	205	187	217	189	226	199	238
19	183	247	199	250	195	255	197	255	203	255
20	162	169	182	193	196	207	195	208	203	217

Tabla B.4: Promedios de máximos y mínimos mostrados en las tablas B.2 y B.3.

	(HP)	max	min	(LM)	max	min
1		174	189		174	191
2		197	228		198	224
3		183	195		184	204
4		194	255		196	255
5		176	190		147	184
6		163	181		163	179
7		217	228		213	226
8		194	248		192	244
9		177	205		174	204
10		194	233		194	225
11		182	198		181	194
12		205	211		204	209
13		187	178		184	176
14		179	205		180	201
15		196	231		194	224
16		173	190		172	191
17		201	235		202	230
18		194	248		187	215
19		151	254		196	252
20		187	195		188	199
Promedio		186	215		186	212

Bibliografía

- [1] Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. (1969). Non-holographic associative memory, *Nature*, *222*, 960-962.
- [2] Amari, S. (1972). Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements, *IEEE Transactions on Computers*, *C-21*, *11*, 1197-1206.
- [3] Anderson, J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory, *Mathematical Biosciences*, *14*, 197-220.
- [4] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers*, *C-21*, *4*, 353-359.
- [5] Nakano, K. (1972). Associatron-A model of associative memory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, *SMC-2*, *3*, 380-388.
- [6] Kohonen, T. & Ruohonen, M. (1973). Representation of associated data by matrix operators, *IEEE Transactions on Computers*, *C-22*, 701-702.
- [7] Kohonen, T. (1974). An adaptive associative memory principle, *IEEE Transactions on Computers*, *C-24*, *4*, 444-445.
- [8] Little, W. & Shaw, G. (1975). A statistical theory of short and long term memory, *Behavioral Biology*, *14*, 115-133.
- [9] Anderson, J. A., Silverstein, J., Ritz, S. & Jones, R. (1977). Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model, *Psychological Review*, *84*, 413-451.
- [10] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics*, *26*, 175-185.
- [11] Hopfield, J.J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *79*, 2554-2558.
- [12] Hopfield, J.J. (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *81*, 3088-3092.

- [13] Austin, J. (1987). ADAM: A Distributed Associative Memory for Scene Analysis, In *Proceedings of First International Conference on Neural Networks*, (pp. 285-295). San Diego: Ed. M Caudhill and C Butler.
- [14] Kanerva, P. (1988). *Sparse Distributed Memory*, Cambridge: MIT Press.
- [15] Kolen, J. F., & Pollack, J. B. (1991). Multiassociative memory, *The Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 785-789.
- [16] Buhmann, J. (1995). Oscillatory associative memories, In M. Arbib (Ed.), *Handbook of Brain Theory & Neural Networks*, (pp. 691-694). Cambridge: MIT Press.
- [17] Kinser, J. M. (1995). Fast analog associative memory, *Proceedings of the SPIE*, 2568, 290-293.
- [18] Bandyopadhyay, S. & Datta, A. K. (1996). A novel neural hetero-associative memory model for pattern recognition, *Pattern Recognition*, 29, 5, 789-795.
- [19] Aleksander, I. & Morton, H. B. (1997). Weightless and other memory-based networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.5:1-C1.5:15). New York: Oxford.
- [20] Austin, J., Buckle, S., Kennedy, J., Moulds, A., Pack, R. & Turner, A. (1997). The cellular neural network associative processor, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 284-306). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [21] Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 281-293.
- [22] Ritter, G. X., Diaz-de-Leon, J. L. & Sussner, P. (1999). Morphological bidirectional associative memories, *Neural Networks*, 12, 851-867.
- [23] Yáñez-Márquez, C. (2002). *Memorias Asociativas Basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios*, Tesis doctoral, CIC-IPN, México.
- [24] Kennedy, J. V., Austin, J. & Cass, B. (1995). A hardware implementation of a binary neural image processor, *Proceedings of the IEE Conference on Image Processing and its Applications*, Edinburgh, UK.
- [25] Krikelis, A. & Weems, C. C. (1997). Associative Processing and Processors, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 2-9). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [26] Stright, J. R., Coffield, P. C. & Brooks, G. W. (1998). Analog VLSI implementation of a morphological associative memory, *Proceedings of the SPIE*, 3452-03, 14-22.
- [27] Chen, C. & Honavar, V. (1995). A neural architecture for content as well as address-based storage and recall: theory and applications, Iowa State University Technical Report TR95-03.

- [28] Graham, B. & Willshaw, D. (1995). Improving recall from an associative memory, *Biological Cybernetics*, 72, 337-346.
- [29] Imada, A. & Araki K. (1995). Genetic algorithm enlarges the capacity of associative memory. In L.J.Eshelman(Ed.), *Proceedings of 6th International Conference on Genetic Algorithms*, (pp 413-420). San Francisco: Morgan Kaufmann.
- [30] Adeodato P. J. L. & Taylor J. G. (1996). Autoassociative memory with high storage capacity, In C. von der Malsburg, W. von Seelen, J. C. Vorbrueggen & B. Sendhoff (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, 1112, (pp. 29-34),. Bochum, Germany: ICANN'96.
- [31] Storkey, A. J. (1997). Increasing the capacity of a Hopfield network without sacrificing functionality, *International Conference on Artificial Neural Networks*, 451-456.
- [32] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks* (11), 5, 869-876.
- [33] Jagota, A., Narasimhan, G. & Regan, K. W. (1998). Information Capacity of Binary Weights Associative Memories, *Neurocomputing*, 19(1-3), 35-38.
- [34] Salgado-Ramírez, J. C. (2005). *Estudio estadístico comparativo entre Memorias Asociativas Clásicas, Memorias Morfológicas y Memorias Alfa-Beta para el caso binario*, Tesis de maestría, CIC-IPN, México.
- [35] (November 2, 2006). *Minutes of P1658 Standards Committee Meeting in Albuquerque, New Mexico USA*
- [36] Díaz-De-León, J. L. & Yañez, C. (CIC-IPN, 2003) *Introducción a la morfología matemática de conjuntos*, 207-208
- [37] Vaseghi Saeed V. (2000) *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*, Second Ed., Wiley. 29 43 y 47
- [38] Wayne Tomasi (1996) *Sistemas de comunicaciones electrónicas*, Prentice Hall.
- [39] Abundis, O. (2004) *Estudio de la recepción óptima de la señal informativa en presencia de ruido blanco y una seal de interferencia*, Tesis de maestría, IPN, México.
- [40] *Geophysics*, VOL.63 No. 4(July-August 1998)
- [41] Pitas, I. (2000). *Digital Image Processing Algorithms and Applications*, J. Wiley Sons, Inc.
- [42] Cynthia Dwork, Krishnaram Kenthapadi, Frank McSherry, Ilya Mironov, and Moni Naor Mironov1, and Moni Naor Our Data, *Ourselves: Privacy via Distributed Noise Generation*
- [43] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.

-
- [44] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik*, 1, 1, 36-45.
- [45] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik*, 1, 3, 117-124.
- [46] Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.
- [47] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Foundations of Research*, Cambridge: MIT Press.
- [48] Kohonen, T. (1989). *Self-Organization and Associative Memory*, Berlin: Springer-Verlag.
- [49] Juárez-López, S. (2004) *Esqueletos morfológicos en el plano discreto*, Tesis de maestría, CINVESTAV, México.
- [50] Diaz-de-Leon, J. L. (1996) *Combinación lineal de espacios métricos en \mathbb{Z}^2* , Tesis de doctorado, CINVESTAV, México.
- [51] González & Woods (2001) *Digital Image Processing*, Prentice Hall.
- [52] P. Sussner (1998) *in: Proceedings of the International ICSC/IFAC Symposium on Neural Computation, Vienna*
- [53] María Elena Cruz Meza (2007) *Aprendizaje y recuperación de imágenes en color mediante memorias asociativas Alfa-Beta*, Tesis de maestría, CIC-IPN.
- [54] María Elena Acevedo Mosqueda (2006) *Memorias Asociativas Bidireccionales Alfa-Beta*, Tesis de doctorado, CIC-IPN.
- [55] Humberto Sossa, Ricardo Barrón and José L. Oropeza (2004) *Real-Valued Pattern Recall by Associative Memory*, Advances in Artificial Intelligence - Iberamia, Lecture Notes in Computer Science, Volume 3315/2004, 646-655.