



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN**

**Diseño de algoritmos computacionales de control y  
estimación por visión basados en Modos Deslizantes de  
Alto Orden y Redes Neuronales Recurrentes en tiempo  
Discreto**

TESIS

Para obtener el grado de  
**Doctorado en Ciencias  
de la Computación**

P R E S E N T A:

**M. en I. Iván de Jesús Salgado Ramos**

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Oscar Camacho Nieto  
Dr. Jorge Isaac Chairez Oria



MÉXICO D.F. JUNIO 2015



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 12:00 horas del día 26 del mes de mayo de 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

**Centro de Investigación en Computación**

para examinar la tesis titulada:

**“Diseño de algoritmos computacionales de control y estimación por visión basados en modos deslizantes de alto orden y redes neuronales recurrentes en tiempo discreto”**

Presentada por el alumno:

**SALGADO**

**RAMOS**

**IVÁN DE JESÚS**

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre(s)

Con registro:

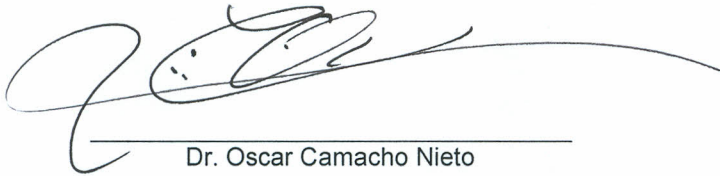
B	1	1	0	8	8	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

  
Dr. Oscar Camacho Nieto

  
Dr. Jorge Isaac Chairez Oria

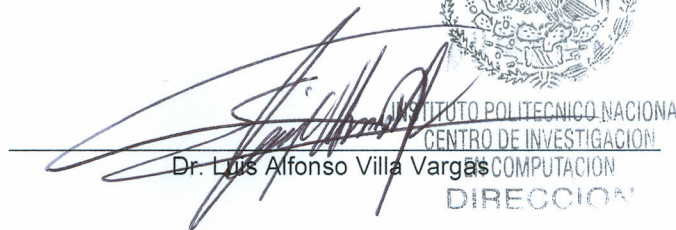
  
Dr. Olexsiy Pogrebnyak

  
Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez

  
Dr. Cornelio Yañez Márquez

  
Dr. Amadeo José Argüelles Cruz

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
Dr. Luis Alfonso Villa Vargas



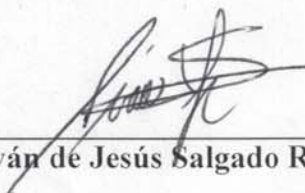


**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México, D.F. el día 20 del mes de mayo del año 2015, el (la) que suscribe **Iván de Jesús Salgado Ramos**, alumno(a) del Programa de **Doctorado en Ciencias de la Computación**, con número de registro **B110889**, adscrito(a) al **Centro de Investigación en Computación**, manifiesto(a) que es el (la) autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Oscar Camacho Nieto y Dr. Jorge Isaac Chairez Oria** y cede los derechos del trabajo titulado **“Diseño de algoritmos computacionales de control y estimación por visión basados en Modos Deslizantes de Alto Orden y Redes Neuronales Recurrentes en tiempo Discreto”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del (de la) autor(a) y/o director(es) del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones **oscarc@cic.ipn.mx** e **ijesusr@gmail.com**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
\_\_\_\_\_  
**Iván de Jesús Salgado Ramos**

## Resumen

El control por visión ha generado diversos resultados que involucran la aplicación simultánea de algoritmos computacionales de visión artificial y técnicas formales de control. Entre los primeros, se pueden mencionar los métodos de estéreo visión y las técnicas de segmentación de objetos. Por otro lado, los algoritmos de control robusto y adaptable han tenido éxito en resolver el problema de seguimiento de trayectorias para los robots móviles.

Las redes neuronales artificiales constituyen un ejemplo de los algoritmos adaptable tanto en control como en visión, que permiten aproximar funciones no lineales de las cuáles se desconoce su estructura matemática. Esta teoría ha evolucionado de tal forma que han surgido las denominadas redes neuronales recurrentes. Estas incluyen en su estructura una retroalimentación de los estados de la red, que las dota de estabilidad y mejores capacidades de aproximación. Sin embargo, esta clase de redes carece de la capacidad para insensibilizarse ante la presencia de perturbaciones, es decir no son robustas. Por otro lado, una técnica de control robusto ampliamente conocida son los llamados modos deslizantes, los cuales permiten la estimación y el control de sistemas cuya dinámica es parcialmente conocida y además se encuentran afectados por perturbaciones acopladas a la entrada de control.

De igual forma, existen resultados donde las dos técnicas anteriormente descritas han sido fusionadas, permitiendo obtener versiones adaptables de algoritmos derivados de la teoría de modos deslizantes. En particular, existen soluciones que involucran algoritmos especiales dentro de los modos deslizantes, como el super-twisting y el twisting, los cuales, son parte de los llamados modos deslizantes de segundo orden. Este tipo de algoritmos de control son ampliamente utilizados en la estabilización o seguimiento de trayectoria de sistemas de segundo orden (mecánicos, electromecánicos, entre otros) inciertos.

Si bien, en el control de robots móviles existen resultados que conjuntan técnicas de visión y modos deslizantes o redes neuronales recurrentes para regular el movimiento de robots de tipo diferencial o tipo bicicleta, estos aún asumen la aplicación en forma continua del controlador, sin tomar en cuenta los detalles de su implementación en sistemas dedicados.

Adicionalmente, los controladores de Twisting o Super-Twisting fueron originalmente desarrollados en un marco de referencia continuo y su implementación en dispositivos digitales ha estado limitada, ya que requiere la programación de los algoritmos de integración que permitan una solución continua aproximada de dichos controladores.

En esta tesis se plantea el desarrollo de algoritmos de control que conjuntan la teoría de redes neuronales recurrentes y modos deslizantes de segundo orden en el marco de

referencia discreto. Este tipo de algoritmos mixtos, reducen el consumo energético que necesita el control para lograr cumplir las tareas de estimación o control para estabilizar los estados del robot móvil o lograr la resolución del problema de seguimiento de trayectorias.

En el desarrollo del presente trabajo, a partir de los resultados de las pruebas matemáticas que corroboran el funcionamiento de los algoritmos de estimación/control propuestos, se pueden seleccionar las diferentes ganancias de los estimadores/controladores para asegurar su convergencia a través del uso del segundo método de estabilidad de Lyapunov para sistemas discretos. Esto resulta relevante ya que, las ganancias seleccionadas se obtienen directamente del sistema discreto, lo cual facilita la transición entre la solución teórica y la implementación en dispositivos dedicados.

Finalmente, se resolvió la implementación de los estimadores/controladores anteriormente mencionados, en un robot móvil de cuatro actuadores dirigido por deslizamiento, donde su posición es obtenida por un sistema de visión automático de alta velocidad (200 Hz). Este tipo de robots tienen las características de ser robustos en su desempeño en ambientes desconocidos, ofrecer más tracción, entre otras. Esta clase de robots se eligió dado que para lograr su control, es necesario conocer su modelo dinámico y resolver el problema de la actuación independiente de sus ruedas. Por estas razones, los resultados en este problema, no son tan vastos como los que existen para el control de robots móviles de tipo diferencial debido a que estos pueden ser controlados a nivel cinemático. Los algoritmos tanto de control como de estimación fueron satisfactoriamente implementados tanto en simulación y, en un robot móvil real, mejorando la calidad obtenida en el seguimiento de trayectorias como de estimación de estados por los controladores clásicos como el proporcional derivativo.

## Abstract

There exist several results in the problem of visual servoing control involving the application of computational algorithms and automatic control techniques in a simultaneous way. Among others, some algorithms based on robust and adaptive control theory has been successfully implemented solving the problem of tracking in mobile robots.

An example of an adaptive algorithm commonly used in control and vision is the artificial neural networks; these algorithms allows the approximation of nonlinear functions with unknown dynamics. The theory of artificial neural networks has evolved into the so-called recurrent neural networks, these kind of neural networks includes the advantages of state feedback in their dynamics providing more stability and better capabilities for approximation. However, the recurrent neural networks are not robust to external perturbations. On the other hand, the sliding mode theory, a robust nonlinear control technique has resolved the problem of nonlinear state estimation and control when the system has parametric uncertainties and disturbances in the control channel.

The last techniques has been joined together obtaining adaptive versions of many algorithms based on the sliding mode theory. In particular, there are some solutions involving two remarkable results inside the sliding mode theory, that is, the super-twisting and twisting algorithms. These two approaches belongs to the so-called second order sliding modes and they have been implemented in the estimation, stabilization or tracking of second order nonlinear uncertain systems such as mechanical systems, electromechanical systems, among others.

It is well known that in the control of mobile robots there some approaches that applied visual techniques with sliding modes or recurrent neural network to solve the tracking task of differential driven or bicycle-like mobile robots. Unfortunately, these results assume a continuous structure for the controller, without taking into account its implementation in embedded systems.

Additionally, the twisting and super-twisting controllers were originally developed in the continuous time framework. Thus, their implementation in digital devices are not well developed because the integration algorithms are needed in order to find an approximated solution for the controllers.

In this thesis, the estimation and tracking problems are discussed in terms of new control strategies that involve the theory of second order sliding modes and recurrent neural networks in the discrete time framework. This kind of mixed

algorithms reduce power consumption by the controller required to stabilize the mobile robot or to achieve the tracking task.

The stability proofs were obtained by means of the second stability method of Lyapunov. This approach allows the free parameters selection of each algorithm ensuring the convergence of the proposed estimators and controllers. This is an interesting proposal because the gain selection is a direct consequence of the applications of discrete methods in contrast of Euler discretization where the gains are defined first in continuous time.

Finally, the state estimators and controllers developed in this thesis, were successfully implemented in a skid-steered mobile robot, where its position is obtained from an automatic control vision with a sampled frequency of 200 Hz. The SSMR was selected because they are more robust in outdoor navigation and offer more traction in rough terrains, among other characteristics. Moreover, there are few applications because the kind of dynamic controller that is needed for the SSMR, in comparison with the kinematic controller commonly applied in classical mobile robots as differential one or bicycle-like. In the SSMR the controller must be designed independently for each actuator in each wheel. The state estimation and controller algorithms designed in this work were compared with classical PD controllers.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>16</b>
1.1. Antecedentes de control por visión para robots móviles . . . . .	17
1.2. Justificación . . . . .	20
1.3. Objetivos . . . . .	21
1.3.1. Objetivo general . . . . .	21
1.3.2. Objetivos particulares . . . . .	21
1.4. Contribuciones de este trabajo de tesis . . . . .	22
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	23
1.6. Notación . . . . .	24
<b>2. Control y estimación por modos deslizantes</b>	<b>26</b>
2.1. Control por modos deslizantes de primer orden . . . . .	27
2.1.1. Concepto de superficie de deslizamiento, modo deslizante y control por modos deslizantes . . . . .	28
2.2. Modos deslizantes de segundo orden . . . . .	32
2.3. Modos deslizantes en tiempo discreto . . . . .	35
2.4. Modos deslizantes de segundo orden en tiempo discreto . . . . .	37
2.4.1. Algoritmo de super-twisting en tiempo discreto . . . . .	38
2.4.2. Estimador de estados basado en el algoritmo de super-twisting para tiem- po discreto . . . . .	40
2.4.3. Control por modos deslizantes discretos de segundo orden . . . . .	45



<b>3. Identificación, estimación y control por redes neuronales recurrentes</b>	<b>49</b>
3.1. Identificación y control por redes neuronales recurrentes	50
3.1.1. Aproximación por redes neuronales recurrentes	51
3.1.2. Sistema objetivo	52
3.1.3. Identificador por RNR	53
3.1.4. Planteamiento del problema	53
3.1.5. Ley de adaptación de los pesos	54
3.1.6. Resultado principal de identificación y control	55
3.2. Estimación de estados por redes neuronales recurrentes y modos deslizantes	56
3.2.1. Clase de sistemas no lineales	57
3.2.2. Representación del sistema incierto basado en redes neuronales recurrentes	57
3.2.3. Observador por RNR en tiempo discreto	58
3.2.4. Planteamiento del problema	59
3.2.5. Ley de adaptación de los pesos	60
3.2.6. Resultado de estimación por RNR y MDSO	61
<b>4. Control por visión de robots móviles</b>	<b>62</b>
4.1. Tipos de navegación	62
4.1.1. Navegación en interiores	63
4.1.2. Navegación en exteriores (ON, Outdoor Navigation)	64
4.2. Robots tipo SSMR	65
4.3. Modelo dinámico del robot móvil SSMR	66
4.3.1. Modelo cinemático	66
4.3.2. Modelo Dinámico	73
4.4. Estrategia de control para el SSMR	77
4.4.1. Linearización completa por retroalimentación de estados	78
4.4.2. Estrategia de control tipo backstepping basado en modos deslizantes de segundo orden	79
4.4.3. Estrategia de control por el algoritmo de super-twisting en tiempo discreto	80

<b>5. Resultados Numéricos</b>	<b>82</b>
5.1. Resultados numéricos: estimación y control por algoritmos discretos basados en modos deslizantes . . . . .	83
5.1.1. Resultados de convergencia del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto . . . . .	83
5.1.2. AST como diferenciador discreto . . . . .	83
5.1.3. Estimador discreto de estados basado en el AST: péndulo simple . . . . .	87
5.1.4. Control por modos deslizantes de segundo orden: aplicación a un motor de corriente directa . . . . .	89
5.2. Control por modos deslizantes de segundo orden: aplicación al SSMR . . . . .	94
5.2.1. Control por backstepping . . . . .	94
5.2.2. Control por super-twisting . . . . .	97
5.3. Resultados numéricos: identificación, estimación y control por redes neuronales recurrentes y modos deslizantes . . . . .	100
5.4. Resultados de la estimación de estados por RNR y el AST . . . . .	106
<b>6. Resultados experimentales</b>	<b>109</b>
6.1. Tipo de SSMR . . . . .	109
6.1.1. Instrumentación . . . . .	111
6.1.2. Sensado de la posición . . . . .	113
6.2. Diferenciador en tiempo real . . . . .	113
<b>7. Conclusiones</b>	<b>120</b>
7.1. Trabajo a futuro . . . . .	121
7.2. Publicaciones . . . . .	122
7.2.1. Publicaciones en congreso . . . . .	122
7.2.2. Publicaciones en revistas . . . . .	122
<b>Anexos</b>	<b>131</b>
<b>A. Prueba de teoremas matemáticos</b>	<b>132</b>
A.1. Prueba del teorema 1 . . . . .	132

A.2. Prueba del teorema 2 . . . . .	134
A.3. Prueba del teorema 3 . . . . .	137
<b>B. Publicaciones en revistas IJCR</b>	<b>143</b>

# Índice de figuras

2-1. Trayectoria de un modo deslizante de segundo orden [1] . . . . .	33
2-2. Trayectorias del algoritmo de twisting [1] . . . . .	34
2-3. Trayectorias del algoritmo super-twisting [1] . . . . .	35
4-1. SMRR en el marco de referencia inercial [2] . . . . .	67
4-2. Diagrama de cuerpo libre [2] . . . . .	68
4-3. Velocidades presentes en una llanta del robot . . . . .	69
4-4. Velocidades en las llantas . . . . .	70
4-5. Fuerzas que actúan en cada una de las llantas del SSMR . . . . .	73
5-1. Trayectorias del primer estado del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto	84
5-2. Trayectorias del segundo estado del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto	84
5-3. Trayectorias de la función de Lyapunov . . . . .	85
5-4. Estimación de la derivada del primer componente de la salida disponible dada por la ecuación (4.43). a) Posición medida, y b) Velocidad estimada . . . . .	86
5-5. Estimación de la derivada del primer componente de la salida disponible dada por la ecuación (4.43). a) Posición medida, y b) Velocidad estimada . . . . .	86
5-6. Comparación de la trayectoria seguida por el SSMR de acuerdo a la ecuación (4.43). a) Trayectoria medida, y b) Velocidad real del SSMR contra velocidad estimada . . . . .	87
5-7. Péndulo simple implementado en las simulaciones . . . . .	88
5-8. Comparación del proceso de estimación de la posición por medio del AST y de un estimador tipo Luenberger . . . . .	89

5-9. Estimación de la velocidad del péndulo simple . . . . .	90
5-10. Índice de desempeño representado por la norma $\ e_k\ _2$ para los dos estimadores de estados . . . . .	90
5-11. Diagrama a bloques del controlador propuesto . . . . .	91
5-12. Control del motor de corriente directa por el AST como controlador a) Velocidad del eje del motor y b) Corriente en el motor . . . . .	93
5-13. Índice de desempeño, a) Acción de control en (2.16) y b) Acercamiento a las trayectorias de la superficie de deslizamiento . . . . .	93
5-14. Seguimiento de trayectoria del SSMR en a) plano X y b) plano Y. . . . .	95
5-15. Trayectoria del robot móvil en el plano X-Y. En esta figura se muestra la señal de referencia junto con una comparación del control propuesto y un control clásico por retroalimentación de estados. . . . .	96
5-16. Norma Euclídeana del error de seguimiento . . . . .	96
5-17. Señales de control para la aceleración de la rueda izquierda y derecha. . . . .	97
5-18. Seguimiento de trayectoria del SSMR en a) plano X y b) plano Y. . . . .	98
5-19. Trayectoria del robot móvil en el plano X-Y. En esta figura se muestra la señal de referencia junto con una comparación del control propuesto y un control clásico por retroalimentación de estados. . . . .	99
5-20. a) Norma euclídeana del error y b) Superficie de deslizamiento . . . . .	99
5-21. Señales de control de la velocidad angular requerida por el SSMR, a) Velocidad llantas lado izquierdo, b) Velocidad llantas lado derecho . . . . .	100
5-22. Proceso de identificación de $x_1(k)$ con la RNR . . . . .	101
5-23. Proceso de identificación de $x_2(k)$ con la RNR . . . . .	102
5-24. Índice de desempeño representado por $\ \tilde{x}(k)\ _2$ . . . . .	102
5-25. Seguimiento de trayectoria de $x_1(k)$ a $x_1^*(k)$ por la ley de control en (3.20) . . . .	103
5-26. Seguimiento de trayectoria de $x_2(k)$ a $x_2^*(k)$ por la ley de control (3.20) . . . .	104
5-27. Acercamiento a las trayectorias de $x_1^*(k)$ y $x_1(k)$ . . . . .	104
5-28. Acercamiento a las trayectorias de $x_2(k)$ y $x_2^*(k)$ . . . . .	105
5-29. Índice de desempeño definido como $\ \delta(k)\ _2$ para el seguimiento de trayectoria . .	105

5-30. Estimación de estados del péndulo simple a) Estimación de la posición b) Estimación de la velocidad . . . . .	107
5-31. Acercamiento a las trayectorias de la velocidad . . . . .	107
5-32. Índice de desempeño de la RNR con el AST y del puro AST como diferenciador .	108
6-1. Robot móvil Dagu Wild Thumper 4WD all-Terrain . . . . .	110
6-2. Medidas del DAGU. La escala que se muestra en la figura se da en milímetros . .	110
6-3. Motorreductor 75:1 . . . . .	110
6-4. Conexión de los motores y las llantas del DAGU . . . . .	111
6-5. Diagrama electrónico de conexiones para la etapa de potencia. . . . .	111
6-6. Diagrama electrónico de conexiones para etapa de aislamiento. . . . .	112
6-7. Tarjeta de control Cerebot MX7ck . . . . .	113
6-8. Imagen del SSMR totalmente instrumentado dentro del área de trabajo . . . . .	114
6-9. Cámaras <i>Optitrack</i> usadas para el sensado de la posición . . . . .	114
6-10. Sistema de obtención de la posición del SSMR . . . . .	115
6-11. Estimación de la posición del SSMR en el plano Y . . . . .	116
6-12. Error de estimación por el AST en la reconstrucción de la derivada . . . . .	116
6-13. Comparación de los resultados obtenidos al calcular la derivada de la posición del robot en Y, a) por el método de Euler, b) por el AST . . . . .	117
6-14. Estimación de la posición del SSMR en el plano X . . . . .	118
6-15. Error de estimación por el AST en la reconstrucción de la derivada . . . . .	118
6-16. Comparación de los resultados obtenidos al calcular la derivada de la posición del robot en X, a) por el método de Euler, b) por el AST . . . . .	119
6-17. Comparación entre la trayectoria real del SSMR y la señal obtenida por el AST.	119



# Capítulo 1

## Introducción

El desarrollo de nuevas técnicas de control de robots móviles constituye un atractivo campo de investigación multidisciplinario, que conjunta las áreas de electrónica, mecánica, control automático y ciencias de la computación. Actualmente, muchos de los problemas de control de robots móviles están orientados a reducir el costo que representa el sensado, en la mayoría de los casos de posición y velocidad, donde el uso de acelerómetros o giroscopios constituye la principal herramienta para conocer las variables dinámicas del robot. En el área de computación, generalmente se omite el uso del modelo dinámico que describe el comportamiento del robot, dado que el uso del modelo cinético simplifica el desarrollo de métodos de control para seguimiento de trayectorias.

Por otro lado, los algoritmos computacionales para evaluar la posición relativa del robot móvil, se basan principalmente en el conocimiento del entorno donde se desarrolla el movimiento del robot, lo cuál limita su aplicación en terrenos desconocidos. Para éstos fines, el uso de cámaras para la obtención de la posición, la velocidad y tener una idea del entorno donde realiza las maniobras el robot, es la principal herramienta en el control por visión (visual servoing control por su definición en inglés, VSC) [3], [4]. Sin embargo, los algoritmos de procesamiento de video requieren un alto costo computacional.

Recientemente, se han incorporado al VSC, técnicas clásicas de control que requieren del modelo matemático que describe la dinámica del robot móvil. Éstas técnicas permiten sustituir el uso de acelerómetros y giroscopios por algoritmos de estimación de estados [5], los cuáles deben trabajar de manera precisa a pesar de las perturbaciones o incertidumbres en la descrip-



ción del mismo modelo. En estas aplicaciones, la información de la cámara es utilizada para conocer la posición del robot dentro de un entorno delimitado y con base en esta, obtener su velocidad a partir del estimador. Esto permite reducir la instrumentación que el robot requiere para desarrollar su tarea, lo cuál tiene como consecuencia el incremento de la vida útil del sistema de alimentación energética, la reducción de costos en el funcionamiento del robot y la simplificación del hardware requerido por el sistema dedicado que se utiliza para calcular el controlador.

## 1.1. Antecedentes de control por visión para robots móviles

En las últimas décadas, el desarrollo de nuevas tecnologías con amplio poder de procesamiento digital, ha traído como consecuencia la creación de nuevos algoritmos y aplicaciones en el control por visión para robots móviles (VSC, visual servoing control). Los primeros avances en estas técnicas de control fueron aplicados, casi en su totalidad a robots manipuladores. No obstante, con el paso del tiempo, los avances en el control de robots móviles han sido significativos, logrando reducir el costo de instrumentación requerido para implementar un estimador de estados o un controlador automático [6], [7]. En [6], se presentan las bases del VSC, desde su clasificación dependiendo del posicionamiento de los sensores visuales hasta las ventajas y desventajas que conlleva aplicar un control basado en visión. De igual forma, se detallan las primeras técnicas de control usadas para este fin. Recientemente, con la misma finalidad, en [7] se presenta un tutorial que describe las técnicas de control más usadas en el VSC, se dan las bases matemáticas y los requerimientos para su implementación. Éstas técnicas incluyen geometría epipolar para la resolución del cálculo de elementos geométricos a partir de imágenes, estimación de parámetros en tres dimensiones (3D) y desarrollo de algoritmos basados en control óptimo, robusto y adaptable para la planeación y seguimiento de trayectorias.

Los primeros resultados implementados de VSC en robots móviles se pueden observar en [8]. En este trabajo, una cámara sirve como sensor para obtener los parámetros de posición y velocidad del robot móvil, y posteriormente, a partir de esa información, aplicar un control proporcional integral (PI) en lazo cerrado, para realizar un seguimiento de trayectoria. En [9], se da un resumen de los avances que se han presentado en el VSC. Incluso, se consideran los

casos de estudio abiertos en este campo con el punto de vista de diferentes autores. Se describe el uso de técnicas de control como la lógica difusa, las redes neuronales artificiales (RNA) y controladores proporcional integral derivativos (PID) clásicos.

Algunas técnicas de geometría epipolar para el manejo de un robot móvil con restricciones no holonómicas son aplicadas en [10]. Los resultados, principalmente descritos en [6], [7], [4], [9] constituyen una vasta fuente de información para plantear las bases de la presente propuesta. En resumen, las técnicas teóricas descritas anteriormente, prueban la convergencia asintótica del error de seguimiento de los diferentes esquemas de control aplicados en el VSC en términos del segundo método de estabilidad de Lyapunov [11], [12]. En general, los resultados mejor logrados se han obtenido mezclando técnicas de control y procesamiento de imágenes muy eficientes.

Otras técnicas de control, como la de *backstepping* [13] y modos deslizantes (MD) han sido estudiadas en el diseño de control de robots móviles [3], [14]. Los MD son una herramienta de control cuyas características principales son robustez y convergencia en tiempo finito. Los principios matemáticos de esta teoría, desde su concepto básico hasta sus aplicaciones se han descrito en [15] y [16]. Dentro de los esquemas de control por MD, se encuentran los denominados modos deslizantes de primer orden (MDPO), cuya principal desventaja es el fenómeno conocido como *chattering* por su definición en inglés [17], [18], el cual consiste en oscilaciones de alta frecuencia que se presentan en la operación de los actuadores, situación que no se puede aceptar tan fácilmente en robots móviles, debido a las implicaciones de movimiento y precisión de sus actuadores.

Para sobrellevar la desventaja del *chattering*, los denominados modos deslizantes de orden superior, descritos en [19], disminuyen el *chattering* y mantienen las propiedades principales que se observan en la aplicación de los MD de primer orden [20]. Dentro de los algoritmos por modos deslizantes de segundo orden, se destaca el algoritmo de super-twisting (AST) por sus características y aplicaciones. Descrito para sistemas en tiempo continuo, dicho algoritmo puede ser usado para control [21], diferenciación de señales [22] y como estimador de estados [23], [24].

En el dominio discreto, el concepto de MD difiere en gran medida de su contraparte continua. Los resultados que se han obtenido hasta el momento en tiempo discreto, no se comparan con los avances existentes en la teoría de MD en tiempo continuo. Propiamente, la definición de MD en tiempo discreto es descrita en [25]. En [26], [27], [28] se describen diferentes condiciones

de existencia y convergencia para MD en tiempo discreto. La discretización del AST como observador se estudia en [23].

En el ámbito de la robótica móvil, los MD son aplicados como controladores en [29], [5], entre otras. A diferencia de los resultados anteriores, en los artículos mencionados se emplean técnicas de imagen para obtener la posición y la velocidad del robot móvil.

La teoría de MD muestra capacidades sobresalientes en el control de sistemas mecánicos. Sin embargo, se necesita del conocimiento del modelo matemático o al menos de sus valores límites (cotas superior e inferior de la función que describe al sistema) para poder implementarlos. Otras técnicas de modelado y control no paramétrico son atractivas para resolver el desconocimiento total o parcial del modelo matemático de un sistema. Entre otras, destacan las llamadas redes neuronales artificiales (RNA), que son una técnica de aproximación no paramétrica, que ha sido aplicada en el campo del reconocimiento de patrones y control adaptable. Las RNA permiten la reconstrucción de funciones no lineales sin necesidad de conocer su estructura matemática exacta [30], [31]. Los fundamentos matemáticos de esta teoría, así como el concepto de redes neuronales estáticas y redes neuronales recurrentes pueden ser estudiados en [30]. Otro tipo de redes neuronales, llamadas diferenciales se describen en [31]. En este compendio, las leyes de aprendizaje para ajustar los pesos de la red neuronal, son obtenidas en términos del segundo método de estabilidad de Lyapunov. La aplicación de RN y MD en los problemas de control y estimación se estudian en [32]. En el caso de aplicaciones de robótica móvil, algunos resultados complementarios pueden ser encontrados en [33].

Un aspecto a notar, son los escasos resultados que se pueden encontrar con respecto a la teoría de MD y RN para sistemas en tiempo discreto, incluyendo aquellos destinados a la estimación y control de robots móviles. Como se ha venido discutiendo, uno de los principales problemas en el VSC es el desconocimiento de la dinámica del robot. Para tiempo continuo, la aplicación del algoritmo denominado *super-twisting* (AST) puede resolver este problema si se desea obtener su posición y velocidad. Es entonces factible, el considerar que la misma condición pueda ser extendida al caso discreto.

## 1.2. Justificación

Los algoritmos computacionales para control de robots móviles es un área de investigación en constante desarrollo, se puede enfocar desde el punto de vista de control y el punto de vista de técnicas de cómputo no convencional como son redes neuronales, memorias asociativas, entre otras. El uso de cámaras como sensores, puede reducir el costo de implementación de dispositivos ya que necesitan menos transductores electrónicos como es el caso de acelerómetros y giroscopios. Sin embargo, el costo computacional se ve incrementado por el procesamiento que se le tiene que hacer al video que funge como sensor en los robots móviles. A pesar de estas desventajas, las investigaciones realizadas muestran avances significativos para incursionar en el campo con nuevos algoritmos de control, complejos en su definición pero sencillos en su programación.

Dentro de estos algoritmos de control, destacan los basados en MD, los cuales constituyen una teoría de control robusto que ha sido efectiva en el control de sistemas mecánicos y electro-mecánicos, consecuencia de la estructura discontinua que poseen. Las ventajas y desventajas del control por MD de primer orden han sido mencionadas anteriormente. Por estos motivos, la presente tesis se centra en el estudio de la aplicación de los denominados MD de alto orden en sistemas lógicos programables. Las aplicaciones de MD en el control de robots móviles y robots manipuladores son variadas.

Algunos de estos desarrollos incluyen, la visión como sensado de la posición y velocidad, además de requerir del conocimiento del modelo matemático que gobierna la dinámica del robot. Las características que presentan los MD como son robustez paramétrica, los hacen ideales para tratar con sistemas cuyas dimensiones o masas son desconocidas u obedecen a una dinámica acotada. Dentro de estos algoritmos sobresale el AST, un algoritmo de MD de segundo orden que puede fungir como controlador, como estimador o como diferenciador. Este controlador ha sido implementado en diversas aplicaciones. No obstante, es necesario el uso de costosas tarjetas de adquisición para su implementación dada la naturaleza continua de su estructura.

La desventaja de la estructura continua que presenta el AST, puede ser resuelta si se propone un algoritmo discreto basado en el AST continuo, si las características que presenta en tiempo continuo son preservadas en tiempo discreto, el algoritmo podría mostrar resultados significativos en el control de robots móviles implementado dichos algoritmos en sistemas com-

putacionales dedicados. La implementación del AST en dispositivos lógicos programables es directa si éste se encuentra en tiempo discreto, puesto que su estructura se da en ecuaciones en diferencias y no en ecuaciones diferenciales que necesitarían de la programación de un algoritmo de integración. Finalmente, para sobrellevar la necesidad del conocimiento del modelo matemático se propone la aplicación de redes neuronales recurrentes (RNR) como algoritmos de aproximación de funciones. De esta forma el desarrollo de un algoritmo de estimación por MD y RNR puede constituir una primera solución para la estimación de posición y velocidad partiendo de un sensado por visión. Al mismo tiempo, la implementación simultánea de ambas técnicas podrá tener consecuencias en el ahorro de energía para mover el robot móvil y en el ajuste de ganancias que pueda reducir los efectos de movimientos indeseados del robot.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Desarrollar algoritmos de estimación y control automático para resolver el problema de seguimiento de trayectorias en robots móviles del tipo dirigidos por deslizamiento por visión, basados en una estructura por modos deslizantes de alto orden en tiempo discreto y redes neuronales recurrentes.

### **1.3.2. Objetivos particulares**

- Diseñar un controlador basado en el algoritmo de super-twisting para sistemas discretos, probando su convergencia por el segundo método de estabilidad de Lyapunov para sistemas discretos y su correspondiente simulación en lenguajes computacionales como Matlab<sup>®</sup>.
- Implementar el algoritmo de super-twisting en tiempo discreto como un estimador de estados, estructura que será reforzada por una red neuronal recurrente en tiempo discreto asumiendo el desconocimiento de la dinámica de la planta.
- Realizar las simulaciones pertinentes del estimador de estados a partir de los resultados generados en las pruebas de convergencia.

- Generar las variables medibles de un robot móvil mediante el uso de una cámara como sensor *satélite* que permita obtener la posición del robot en un medio conocido y delimitado.
- Implementar el algoritmo de super-twisting en tiempo discreto como un controlador de estados, realizar las simulaciones pertinentes y obtener las condiciones de convergencia.
- Realizar las simulaciones en lazo cerrado para el controlador y el estimador de estados aplicadas a un robot móvil controlado por deslizamiento.
- Evaluar las ventajas del funcionamiento de los algoritmos de control desarrollados a partir de la comparación con métodos clásicos de control del mismo tipo de robots móviles.

## 1.4. Contribuciones de este trabajo de tesis

Los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden *twisting* y *super-twisting* fueron desarrollados para sistemas en tiempo continuo [19], [22]. En esta tesis, se presentan los correspondientes algoritmos para sistemas en tiempo discreto basados en una discretización tipo Euler [34]. Se presentan las pruebas matemáticas de convergencia en tiempo discreto bajo el esquema del segundo método de estabilidad Lyapunov. En particular, para el algoritmo de *super-twisting* se tienen tres casos fundamentales: el AST como diferenciador, como controlador y como observador.

En relación a las RNA, se introduce una nueva ley de aprendizaje basada en funciones de Lyapunov controladas para una estructura de identificador de una RNR para sistemas discretos. Una vez que se tienen los estados identificados, se propone una nueva ley de control bajo el concepto de modos cuasi-deslizantes (quasi sliding modes, QSM). La prueba de convergencia se obtiene por el segundo método de estabilidad de Lyapunov.

Para sistemas de segundo orden, se agrega a la estructura del derivador por el AST una RNR para compensar la dinámica desconocida del modelo matemático. Se obtienen las leyes de aprendizaje en diferencias para este modelo de observador.

## 1.5. Estructura de la tesis

El resto del documento está estructurado de la siguiente manera: al final del presente capítulo se da un resumen de la notación matemática que será empleada a través de todo el documento. El segundo capítulo titulado Control y estimación por MD en su primera sección, da una introducción al control y estimación por modos deslizantes, se incorporan los conceptos básicos de esta teoría y de los llamados modos deslizantes de primer orden. Posteriormente, se introduce el concepto de orden en los MD y por ende, la definición de los llamados modos deslizantes de segundo orden en tiempo continuo. Se describen a detalle la estructura y parámetros de los denominados controladores *twisting en su versión discreta*. En la tercera sección del segundo capítulo se dan los conceptos básicos del control por modos deslizantes en tiempo discreto, sus condiciones de convergencia y su estabilidad. Posteriormente, se aborda el problema en tiempo discreto de los modos deslizantes de segundo orden. Se presentan los resultados obtenidos de convergencia para el algoritmo discreto de super-twisting implementado mediante una discretización tipo Euler, las pruebas de estabilidad son obtenidas en términos del segundo método de Lyapunov para tres casos particulares; el AST como estimador de estados, como controlador tanto para el caso escalar como para el caso vectorial y como diferenciador de primer orden.

El capítulo 3 aborda la teoría de redes neuronales recurrentes en tiempo discreto. La primera sección de ese capítulo proporciona los fundamentos de esta teoría, partiendo del concepto básico de una red neuronal, hasta los diferentes métodos de aprendizaje para redes estáticas y dinámicas. En la segunda sección, se introduce la propuesta de identificador de estados discretos con redes neuronales recurrentes. Posteriormente, el problema de estimación de estados para sistemas mecánicos con desconocimiento parcial o total de la planta es abordado empleando el AST.

En el capítulo 4 se aborda propiamente el control por visión de robots móviles. Los resultados parciales que se describen, se relacionan al planteamiento del modelo matemático a utilizar para el robot. En este capítulo, se presenta una descripción de las transformaciones necesarias realizadas al modelo mecánico del robot de tal forma que los algoritmos de estimación y control desarrollados en capítulos pasados puedan ser implementados.

En el capítulo 5 se dan los resultados numéricos obtenidos. Los algoritmos de control y estimación fueron aplicados en ciertos modelos de diferentes sistemas mecánicos con el fin de

entender su comportamiento en diferentes sistemas no lineales. Lo anterior permite obtener una noción de como modificar cada uno de sus parámetros de tal manera que realicen de forma adecuada las tareas para las que fueron implementados. Los modelos de prueba utilizados son: el péndulo de Furuta [35], un motor de corriente directa y el oscilador de Lorentz. Posteriormente, se prueban los controladores en el control de un robot móvil de tipo dirigido por deslizamiento.

En el capítulo 6 se describe el robot móvil utilizado, su instrumentación y las pruebas de funcionamiento con los algoritmos desarrollados. En el capítulo 7 se dan las conclusiones obtenidas y el trabajo a futuro que se puede realizar considerando los resultados obtenidos. Las pruebas de los teoremas planteados en los capítulos 2 y 3 se pueden revisar en la sección de Apéndices al final del documento. En la segunda sección del apéndice se incluyen las pruebas de los trabajos publicados en congresos a los que se han sometido los resultados planteados en esta tesis así como los comprobantes de los artículos que se han enviado o aceptado en revistas indexadas (JCR).

## 1.6. Notación

- Si  $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , es una matriz con elementos reales,  $S > 0$  implica que la matriz  $S$  es positiva definida; esta relación puede ser establecida en términos del criterio de Sylvester [36].
- Si  $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , es una matriz con elementos reales,  $S < 0$  implica que la matriz  $S$  es negativa definida; esta relación puede ser establecida en términos del criterio de Sylvester [36].
- $\|\cdot\|_S^2$  es la norma euclidiana ponderada con  $S = S^T > 0$ ,  $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ . Por esta definición,  $\|\xi(k)\|_{\Lambda_\xi}^2 := \xi^T(k) \Lambda_\xi \xi(k)$ . La norma Euclidiana ponderada será usada a lo largo del presente documento.
- $\|\cdot\|$  significa la norma euclidiana. Es decir, si  $V$  es un vector y  $V \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\|V\|$  se define como  $\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$  donde  $v_i$  con  $i = 1 : n$ , son los elementos del vector  $V$ .
- $\|\cdot\|_F$  se define como la norma matricial de Frobenius. Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$   $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}$
- El operador traza  $\text{tr}$  se define como la suma de los elementos de la diagonal de la matriz  $A$ .





## Capítulo 2

# Control y estimación por modos deslizantes

El control de sistemas dinámicos en presencia de incertidumbres es uno de los principales problemas a estudiar en la teoría de control moderno. En la formulación de cualquier problema de control siempre se encuentra una discrepancia entre la dinámica de la planta y el modelo matemático que la describe. Estas discrepancias generalmente están asociadas a perturbaciones, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas. El diseño de leyes de control en lazo cerrado que permitan un comportamiento adecuado de la planta en presencia de este tipo de perturbaciones/incertidumbres representa un problema abierto en la ingeniería de control. A pesar del extenso y exitoso desarrollo de técnicas de control robusto o adaptable [37], control  $H_\infty$  [11] y control por backstepping [11], el control por modos deslizantes (MD) probablemente sigue siendo, la técnica más exitosa para lidiar con incertidumbres/perturbaciones acotadas y dinámicas no modeladas [16], [15].

Históricamente, los MD fueron propuestos como un caso especial de los sistemas de estructura variable. El control por MD fue desarrollado a finales de 1950 en la ex-Unión Soviética. La idea del control por modos deslizantes (CMD) está basado en el diseño de una función denominada *variable de deslizamiento*. En cuanto la función de deslizamiento sea igual a cero, está definirá el plano de deslizamiento (superficie de deslizamiento en el caso escalar). El diseño adecuado de la función de deslizamiento permite un comportamiento ideóneo del sistema en

lazo cerrado cuando las trayectorias del sistema pertenecen al plano de deslizamiento. La idea del CMD, consiste en dirigir las trayectorias del sistema al plano de deslizamiento; y posteriormente mantener el movimiento del sistema en ese plano. Las principales características que se pueden explotar en esta teoría son: robustez contra incertidumbres/perturbaciones acopladas al control y convergencia en tiempo finito.

## 2.1. Control por modos deslizantes de primer orden

El problema a abordar en la presente tesis, considera el control de una estructura mecánica de  $n$  grados de libertad, basados en las ecuaciones de Euler-Lagrange [38]. Todo sistema mecánico tiene una representación en el espacio de estados dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) + f(x_1, x_2, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  es el vector de posiciones,  $x_2 \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades,  $u \in \mathbb{R}^n$  es la señal de control a diseñar en el caso denominado completamente actuado, la función  $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  describe la dinámica del sistema y puede incluir algunos términos de perturbación como la fricción seca entre otras [38]. La función  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  se considera acotada, esto es,  $\|f(\cdot, \cdot, \cdot)\| \leq L$ , con  $L$  un escalar positivo y finito. Sin pérdida de generalidad se considera en este estudio el caso escalar ( $n = 1$ ). Entonces, el problema a analizar radica en encontrar un diseño adecuado de retroalimentación de estados  $u = u(x_1, x_2)$  que lleve las variables de estado al origen:  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (x_1, x_2) = 0$ . Este problema podría parecer simple, sin embargo, el diseño del control representa un reto por la presencia de la función desconocida  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ . Por ejemplo considere una retroalimentación de estados lineal

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad k_1 > 0, k_2 > 0\tag{2.2}$$

Esta ley de control puede llevar los estados de forma asintótica a un dominio acotado para  $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$ . Un problema inherente a este tipo de retroalimentación es la necesidad de conocer todo el vector de estados  $(x_1(t), x_2(t))$ , es decir, la posición y la velocidad de cada grado de libertad del sistema dinámico. La medición de la velocidad, puede ser obtenida mediante

un estimador de estados, en el caso que no se cuente con ella a partir de sensores adecuados. Para robots móviles, este requerimiento se cumple a través del uso de acelerómetros, lo que constituye un alto costo en el área de instrumentación, lo que a su vez también complica el diseño mecánico del robot bajo estudio.

### 2.1.1. Concepto de superficie de deslizamiento, modo deslizante y control por modos deslizantes

Se desea introducir un compensador dinámico con un comportamiento deseado para el sistema (2.1). Un buen candidato para estas dinámicas es seleccionado en forma de una ecuación diferencial lineal con coeficientes invariantes en tiempo

$$\dot{x}_1(t) + cx_1(t) = 0, \quad c > 0 \quad (2.3)$$

Teniendo en mente que  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ , la solución general de (2.3) y su derivada esta dada por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) e^{-ct} \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -cx_1(0) e^{-ct} \end{aligned} \quad (2.4)$$

converge al origen asintóticamente. El efecto de la función desconocida  $f(x_1, x_2, t)$  no se observa en la dinámica de (2.4). Por lo tanto, el primer problema a resolver radica en como confinar las trayectorias del sistema (2.1) en las trayectorias del sistema (2.3).

El primer paso consiste en introducir una variable en el espacio de estados del sistema (2.1)

$$\sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1, \quad c > 0 \quad (2.5)$$

Para poder obtener convergencia asintótica de las variavles de estado  $x_1$  y  $x_2$  al origen, ésto es  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (x_1, x_2) = 0$ , con una tasa de convergencia como en (2.4). De hecho, en presencia de la función incierta  $f(x_1, x_2, t)$ , se deben forzar las variables  $x_1, x_2$  para que la variable  $\sigma$  en (2.5) alcance al origen en tiempo finito mediante la señal de control  $u$ . Si se toma la derivada

de (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x_1(t), x_2(t)) &= \dot{x}_2(t) + c\dot{x}_1(t), \quad \sigma(0) = \sigma_0 \\ &= cx_2(t) + u(t) + f(x_1, x_2, t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Basados en la técnica definida por el segundo método de estabilidad de Lyapunov, se define la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2\tag{2.7}$$

Si se desea obtener convergencia global asintótica en el punto de equilibrio  $\sigma = 0$  de la ecuación (2.6), las siguientes condiciones se deben satisfacer

**a)**  $V(\sigma) \geq 0 \forall \sigma$  y  $V(0) \triangleq 0$

**b)**  $\dot{V}(t) < 0$

**c)**  $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V(\sigma) = \infty$

De hecho, de acuerdo a la expresión (2.6), la condición dada en el punto b) se satisface. Sin embargo, si se requiere llevar las trayectorias de  $\sigma$  al origen en tiempo finito, la condición en b) tiene que ser modificada a

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t)^{1/2}, \quad \alpha > 0\tag{2.8}$$

Resolviendo la ecuación diferencial en (2.8) en el intervalo  $0 \leq \tau \leq t$ , la siguiente ecuación es obtenida

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0)\tag{2.9}$$

Consecuentemente, la función  $V(t)$  llega a cero en un tiempo finito  $t_r$  acotado por

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}\tag{2.10}$$

Por lo tanto, el control  $u$  tiene que ser diseñado para satisfacer la ecuación (2.8) y de esta forma llevar las trayectorias de la variable  $\sigma$  al origen en tiempo finito y mantenerlas sobre la superficie para tiempos mayores que  $t > t_r$ .

Tomando la derivada de la función de Lyapunov propuesta en (2.7) y con la dinámica de  $\sigma$  dada en (2.6), se obtiene

$$\dot{V}(t) = \sigma(t) \dot{\sigma}(t) = \sigma(t) (cx_2(t) + u(t) + f(x_1, x_2, t)) \quad (2.11)$$

Si tomamos la señal de control como  $u = -cx_2 + v$  y la sustituimos en la ecuación (2.11) se obtiene

$$\dot{V}(t) = \sigma(t) f(x_1(t), x_2(t), t) + \sigma(t) v(t) \leq |\sigma(t)| L + \sigma(t) v(t) \quad (2.12)$$

Si se selecciona  $v$  como  $v = -\rho \overline{\text{sign}}(\sigma)$  con

$$\overline{\text{sign}}(z) := \begin{cases} 1 & \text{if } z > 0 \\ \in [-1, 1] & \text{if } z = 0 \\ -1 & \text{if } z < 0 \end{cases}$$

y se sustituye en (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq |\sigma(t)| L - \rho \sigma(t) \overline{\text{sign}}(\sigma(t)) \\ &= |\sigma(t)| L - \rho |\sigma(t)| \\ &= |\sigma(t)| (L - \rho) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Tomando en cuenta la condición (2.9), la ecuación (2.8) puede ser rescrita como

$$\dot{V}(t) \leq \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma(t)| \quad (2.14)$$

Combinando los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.13) y (2.14) se obtiene

$$\dot{V} \leq |\sigma(t)| (L - \rho) = \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma(t)| \quad (2.15)$$

con la ganancia  $\rho$  seleccionada como

$$\rho = L - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

Consecuentemente, la ley de control que lleva  $\sigma$  al origen en tiempo finito es

$$u(t) = -cx(t)_2 - \overline{\rho \text{sign}}(\sigma(t)) \quad (2.16)$$

Bajo este control, y debido a la naturaleza discontinua de la función  $\overline{\text{sign}}$ , es necesario utilizar una definición particular para interpretar el sentido de las soluciones de la ecuación diferencial (2.1). En este caso, se eligió emplear el sentido de Filippov para la existencia de la solución antes mencionada [39]. El procedimiento anterior es aplicado para el diseño de un control por modos deslizantes de primer orden. Las siguientes definiciones surgen de este ejemplo introductorio

**Definición 1** *La variable en (2.5) es llamada la variable de deslizamiento*

**Definición 2** *Las ecuaciones en (2.3) y (2.5) se pueden reescribir como*

$$\sigma(t) = x_2(t) + cx_1(t) = 0, \quad c > 0 \quad (2.17)$$

*y corresponde a una línea recta en el espacio de estados del sistema (2.1) para el caso de dos dimensiones y es llamada superficie de deslizamiento. Cumplir la condición de alcance o existencia en (2.8) implica que las trayectorias del sistema (2.1)  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  sean llevadas a la superficie de deslizamiento (2.5) y permanezcan en ella para tiempos posteriores a  $t_r$ , con  $t_r$  definido en (2.10).*

**Definición 3** *El control  $u(t) = u(x_1(t), x_2(t))$  en (2.16) que lleva las variables de estado  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  a la superficie de deslizamiento (2.17) en tiempo finito  $t_r$  definido en (2.10), y lo mantiene en la superficie para  $t > t_r$  en presencia de perturbaciones/incertidumbres acotadas es llamado control por modos deslizantes (SMC) y el movimiento del sistema (2.1) sobre (2.17) es llamado un modo deslizante ideal.*

### Propiedades de la dinámica del sistema bajo un control por modos deslizantes

1. El diseño de un CMD se reduce a dos tareas independientes de orden reducido. La primera tarea consiste en el diseño de la superficie deslizante de primer orden dada en la ecuación (2.17). La segunda tarea consiste en el diseño del control  $u(t)$  que lleve la variable de deslizamiento (2.6) al origen en tiempo finito

2. La dinámica del sistema descrito en (2.1) es de segundo orden, mientras que su dinámica compensada en el modo deslizante es de primer orden, el cual coincide con la dimensión de la función de control.
3. La dinámica del sistema (2.1) en el modo deslizante no depende de las perturbaciones o incertidumbres en la función  $f(x_1(t), x_2(t), t)$ . Por lo tanto el CMD es robusto a perturbaciones e incertidumbres paramétricas acopladas.
4. El control descrito en (2.16) tiene una componente de alta frecuencia (idealmente infinita) que trae como consecuencia el fenómeno denominado *chattering*. Adicionalmente, la superficie de deslizamiento tiene que tener grado relativo 1 [20], [11] con respecto a la señal de control, es decir, la variable de deslizamiento  $\sigma(t)$  tiene que ser derivada una sola vez, para que la señal de control aparezca explícitamente.

## 2.2. Modos deslizantes de segundo orden

Las desventajas mencionadas en el punto 4 de la sección anterior pueden ser solucionadas mediante el uso de una función suave en lugar de la función discontinua (2.16), por ejemplo, una función saturación

$$v(\sigma) \cong \frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)| + \epsilon}$$

donde  $\epsilon$  es una constante escalar positiva de valor pequeño. No obstante, esta función de control suave no alcanza una convergencia en tiempo finito en presencia de perturbaciones/incertidumbres acotadas. La variable de deslizamiento y las variables de estado no convergen al origen, sino que convergen a un dominio en la vecindad del origen acotado y dependiente del valor de la constante  $\epsilon$ .

Otro problema presente en el control por modos deslizantes de primer orden es el grado relativo del sistema con la variable de deslizamiento, este inconveniente no puede ser solucionado por el CMD de primer orden. Los modos deslizantes de alto orden (MDAO) pueden lidiar con éstas desventajas.

Considere un sistema dinámico con una función suave de salida  $\sigma$ , sea el sistema estabilizado por una retroalimentación discontinua. Las derivadas de la superficie,  $\dot{\sigma}$ ,  $\ddot{\sigma}$ , ...,  $\sigma^{(r-1)}$



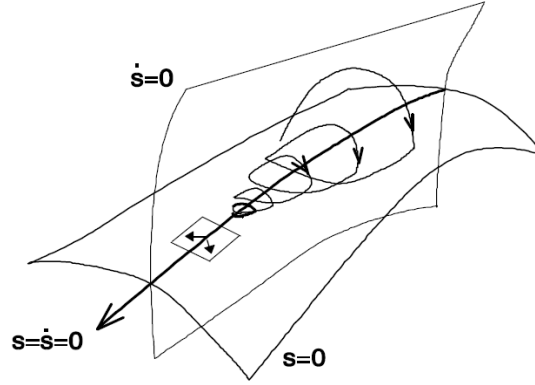


Figura 2-1: Trayectoria de un modo deslizante de segundo orden [1]

son funciones continuas de las variables de estado del sistema no lineal retroalimentado, y el conjunto

$$\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (2.18)$$

es no vacío y se compone de las trayectorias en el sentido de Filippov [39]. El movimiento en el conjunto  $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$  se denomina un modo deslizante de orden  $r$  [20]. La  $r$ -ésima derivada de la función  $\sigma$  es discontinua.

Para el caso de que el grado relativo sea dos ( $r = 2$ ), el movimiento que satisface la ecuación (2.18) para la restricción se define por

$$\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0 \quad (2.19)$$

La evolución en el tiempo de este movimiento se describe en la figura (2-1). Las propiedades específicas del control por modos deslizantes de segundo orden son:

1. Convergencia en tiempo finito al origen de la variable de deslizamiento y su derivada en presencia de perturbaciones/incertidumbres y
2. La habilidad de implementar computacionalmente algoritmos por modos deslizantes de segundo orden para estabilizar un sistema con una precisión del periodo de muestreo al cuadrado.

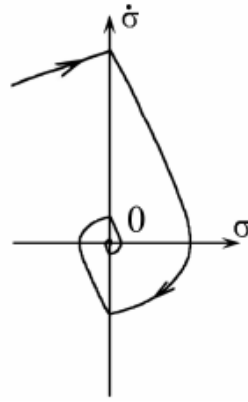


Figura 2-2: Trayectorias del algoritmo de twisting [1]

### Controlador twisting

El controlador twisting es históricamente el primer controlador por modos deslizantes de segundo orden propuesto [20]. Está descrito por la siguiente ecuación

$$u(t) = - (r_1 \overline{\text{sign}}(\sigma(t)) + r_2 \overline{\text{sign}}(\dot{\sigma}(t))), \quad r_1, r_2 > 0 \quad (2.20)$$

Las trayectorias del controlador twisting se muestran en la figura (2-2).

### Controlador super-twisting

En general, los controladores por modos deslizantes de segundo orden requieren la medición en tiempo real de la variable de deslizamiento  $\dot{\sigma}$ . Es decir, si se desea alcanzar la condición de convergencia dada en (2.19), las mediciones de  $\sigma$  y  $\dot{\sigma}$  son requeridas. El controlador denominado super-twisting puede ser implementado en lugar de un modo deslizante de primer orden con la misma información disponible. El controlador por super-twisting (AST) está dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} u(t) &= -\lambda |\sigma(t)|^{1/2} \overline{\text{sign}}(\sigma(t)) + u_1(t) \\ \dot{u}_1(t) &= -\alpha \overline{\text{sign}}(\sigma(t)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Las trayectorias del controlador dado en la ecuación (2.21) se describen en la figura (2-3).

La aplicación del algoritmo de super-twisting no solo se remite al control [22], también

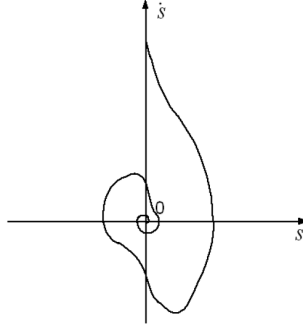


Figura 2-3: Trayectorias del algoritmo super-twisting [1]

puede ser implementado como estimador de estados [23] ó como un diferenciador de primer orden robusto y exacto (DRE) [40]. Su análisis de estabilidad puede ser revisado en [19] por el método de curvas mayorantes y en [41] basado en funciones de Lyapunov.

**Diferenciador de primer orden** Si la variable de deslizamiento  $\sigma$  tiene orden relativo 2 con respecto a la señal de control, es necesario tener la medición de  $\dot{\sigma}$  si se quiere implementar un controlador por modos deslizantes. Para esta tarea, el algoritmo mostrado en la ecuación (2.21) puede ser modificado para ser aplicado como un DRE. Así, sea  $d(t)$  la función a derivar. Se desea obtener la condición  $z_1(t) - d(t) = 0$  en tiempo finito con lo que se puede asegurar que  $v(t)$  coincide con la derivada de  $z_1(t)$ . El AST empleado para dicha tarea esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= v(t) \\ v(t) &= z_2(t) - \lambda_1 |z_1(t) - d(t)|^{1/2} \overline{\text{sign}}(z_1(t) - d(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= -\lambda_2 \overline{\text{sign}}(z_1(t) - d(t)) \end{aligned}$$

Una condición suficiente para obtener convergencia en tiempo finito de la superficie  $z_1(t) - d(t)$  es seleccionar  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  [41]. En la ecuación anterior  $v(t)$  es la salida del diferenciador.

### 2.3. Modos deslizantes en tiempo discreto

La teoría de modos deslizantes ha demostrado hasta ahora, características para ser consideradas como una herramienta potencial en la estimación y control de sistemas no lineales.

Actualmente, el avance en el desarrollo de procesadores digitales brinda la capacidad de resolver algoritmos complejos de programación en un tiempo aceptable en comparación con los tiempos de operación de muchos sistemas reales. Por este motivo, es importante trasladar las capacidades de los modos deslizantes de alto orden en tiempo continuo de manera que puedan ser implementados en dispositivos programables para tratar sistemas en tiempo discreto. Las estrategias de control en tiempo discreto con modos deslizantes se pueden analizar en dos vertientes, la primera se basa en el análisis de la discretización de los esquemas de estimación y control existentes en tiempo continuo; la segunda consiste en proponer una ley de control en un régimen denominado modos cuasi-deslizantes (QSM).

En tiempo continuo, la condición de existencia del modo deslizantes es definida como  $\dot{s}(t) s(t) < 0$ , sin embargo, en tiempo discreto esta condición ya no es válida [25]. El problema de modos deslizantes discretos fue considerado como una forma equivalente de la condición de existencia de su contraparte continua. Es decir

$$(s(k+1) - s(k)) s(k) < 0 \quad (2.22)$$

En [28], el concepto de QSM fue introducido por primera vez. El movimiento descrito por un QSM satisface las siguientes condiciones

1. Partiendo de un estado inicial, las trayectorias se mueven monotónicamente al plano de deslizamiento y lo cruzan en tiempo finito.
2. Una vez que las trayectorias del sistema cruzan por primera vez el plano de deslizamiento, éste lo vuelve a cruzar en cada periodo de muestreo resultando en un movimiento de *zigzag* alrededor del plano de deslizamiento.
3. El tamaño de cada *zigzagueo* no se incrementa, y por lo tanto la trayectoria permanece en una banda específica.

La condición (2.22) no es suficiente para establecer un comportamiento de QSM, en [42], una nueva condición suficiente se define como

$$|s(k+1)| < |s(k)| \quad (2.23)$$

la condición anterior se puede descomponer en las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}(s(k+1) - s(k)) \operatorname{sign}(s(k)) &< 0 \\ (s(k+1) + s(k)) \operatorname{sign}(s(k)) &> 0\end{aligned}$$

La función  $\operatorname{sign}(\varkappa)$  está definida como

$$\operatorname{sign}(\varkappa) := \begin{cases} -1 & \text{if } \varkappa < 0 \\ 0 & \text{if } \varkappa = 0 \\ 1 & \text{if } \varkappa > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

donde  $\varkappa \in \Re$  es un escalar.

En términos de funciones de Lyapunov, en [43] se deriva la condición de existencia para un QSM a partir de la siguiente ecuación definida como  $V(x(k)) = s^2(k)$ . Aplicando el segundo método de estabilidad de Lyapunov se tiene

$$\Delta V(k) = s^2(k+1) - s^2(k) = 2s(k) \Delta s(k) + \Delta s^2(k) < 0 \quad (2.25)$$

La condición (2.25) es equivalente a (2.23). Otras condiciones de existencia pueden ser consultadas en [42], [44], [45], [46] y [47].

## 2.4. Modos deslizantes de segundo orden en tiempo discreto

La idea de modos deslizantes de alto orden para sistemas discretos ha sido hasta ahora introducida en términos de algún tipo de discretización, empleando la aproximación de la derivada propuesta por Euler, diferencias finitas, entre otras [27] y [23]. Un análisis completo a partir del segundo método de Lyapunov no ha sido desarrollado. La precisión de un modo deslizante de alto orden se puede revisar en [48] y [49] para identificar las ventajas que conlleva la aplicación de estos algoritmos. Como se describió en secciones anteriores, el orden del control por MD se relaciona con el grado relativo de la superficie con respecto a la señal de control. El concepto de orden se puede estudiar en [20]. Para modos deslizantes de segundo orden, la condición (2.19)

se puede reescribir en su equivalente en tiempo discreto como

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= 0 \\ \sigma(k+1) - \sigma(k) &= 0\end{aligned}$$

### 2.4.1. Algoritmo de super-twisting en tiempo discreto

La discretización tipo Euler del AST está compuesta por las siguientes dos ecuaciones en diferencias

$$x_1(k+1) = \rho_1 x_1(k) + \tau x_2(k) - \tau k_1 |x_1(k)|^{1/2} \text{sign}(x_1(k)) \quad (2.26)$$

$$x_2(k+1) = \rho_2 x_2(k) - \tau k_2 \text{sign}(x_1(k))$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$  son los estados del algoritmo,  $|\rho_1| < 1$ ,  $|\rho_2| < 1$  proporcionan estabilidad al algoritmo al mantener los eigenvalores de la parte lineal del algoritmo dentro del círculo unitario. Las constantes  $k_1, k_2 \in \mathfrak{R}$  son las ganancias a diseñar para asegurar la convergencia de (2.26) y  $\tau$  es el periodo de muestreo. Es importante resaltar que para sistemas discretos, la función (2.24) es válida para todo el espacio de los números reales, es decir, los problemas de discontinuidad en el caso continuo no afectan el caso discreto.

Es claro que la ecuación descrita (2.26) contiene una ligera modificación de lo que sería la discretización de Euler. La ecuación (2.26) puede ser reescrita como

$$x(k+1) = Ax(k) + B(k) \text{sign}(x_1(k)) \quad (2.27)$$

donde  $A$  y  $B(k)$  están compuestas con los siguientes elementos

$$A := \begin{bmatrix} \rho_1 & \tau \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \quad B(k) := \begin{bmatrix} -\tau k_1 |x_1(k)|^{1/2} \\ -\tau k_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

### Convergencia del algoritmo de super-twisting para sistemas discretos

El resultado que describe la convergencia del AST se describe en el siguiente teorema

**Teorema 1** *Considere el sistema no lineal descrito en (2.26) correspondiente al algoritmo de super-twisting por modos deslizantes de segundo orden en tiempo discreto, si sus parámetros*

libres satisfacen las siguientes desigualdades  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  y si la siguiente desigualdad matricial

$$A^\top (P + P\Lambda P) A - (1 - \varrho) P + Q \leq 0 \quad (2.29)$$

tiene una solución positiva definida  $P \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ ,  $P = P^\top > 0$  para una matriz dada  $Q \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ ,  $Q = Q^\top > 0$ , entonces, las trayectorias del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto (2.26) convergen a una vecindad  $B_r$  centrada en el origen caracterizada por la siguiente frontera

$$r := \frac{c}{1 - \varrho} \quad (2.30)$$

con los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} 0 < \varrho < 1, \quad c := \bar{\delta}_2 + \frac{1}{4} \bar{\delta}_1^2 \|Q^{-1}\|^2, \quad \bar{\delta}_1 := \delta_1 + \tau^4 k_1^2 k_2^2 z_{12}^2 \omega_1, \\ \bar{\delta}_2 := k_2^2 \tau^2 (\tau^2 k_1^2 z_{12}^2 \omega_1^{-1} + z_{22}), \quad \delta_1 := \tau^2 k_1^2 z_{11}, \quad \omega_1 \in \mathbb{R}^+, \quad Z = [\Lambda^{-1} + P] \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^\top > 0, \quad Z, \Lambda, P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad Z := \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix}$$

**Demostración.** La prueba de éste teorema se detalla en el Apéndice 1. ■

La solución de la desigualdad matricial (2.29) puede ser encontrada si los elementos  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  son seleccionados dentro del intervalo  $(-1, 1)$ . De esta forma, la matriz  $A$  es estable, y siempre es posible encontrar solución  $P = P^\top > 0$  para una matriz  $Q = Q^\top > 0$  dada. En el siguiente lema, se muestra como obtener la solución de la desigualdad matricial bilineal (2.29) (BMI, por sus siglas en inglés) transformándola en una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés).

**Lema 1** Si se selecciona  $0 < \varrho < 1$  tal que  $\left| \frac{\lambda_{\max}\{A\}}{\sqrt{(1 - \varrho)}} \right| < 1$ , la BMI en (2.29) siempre tiene una solución positiva definida  $P = P^\top > 0$  dada por

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \tilde{A}^\top \right)^k Q_1 \tilde{A}^k \quad (2.32)$$

con  $\tilde{A} := \sqrt{\bar{\varrho}^{-1}}A$  y  $Q_1 := \bar{\varrho}^{-1}\tilde{Q}$ . Esta solución puede ser calculada por que (2.32) puede ser representada como una ecuación discreta de Lyapunov. Para un valor particular de  $P$  y  $Q$  se puede obtener exactamente el valor correspondiente de  $\varrho$ .

**Demostración.** La ecuación en (2.29) puede ser reescrita como

$$A^\top P A - (1 - \varrho)P = -Q - A^\top \bar{\Lambda} A$$

con  $\Lambda = P^{-1}\bar{\Lambda}P^{-1}$  y se convierte en

$$A^\top P A - (1 - \varrho)P \leq -\tilde{Q} \quad (2.33)$$

Como  $\bar{\varrho} := 1 - \varrho > 0$ , la ecuación (2.33) puede ser dividida por  $\bar{\varrho}$  para obtener

$$\tilde{A}^\top P \tilde{A} - P = -Q_1 \quad (2.34)$$

La ecuación en (2.34) es una ecuación discreta de Lyapunov y su solución explícita puede ser calculada mediante la ecuación (2.32) [12]. ■

El resultado del teorema 1, es la pauta para generar diferentes aplicaciones del AST en tiempo discreto, que ya han sido aplicadas para sistemas en tiempo continuo [19], [22], [23].

#### 2.4.2. Estimador de estados basado en el algoritmo de super-twisting para tiempo discreto

Considere el sistema mecánico definido por las siguientes ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \tau x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \tau f(x_1(k), x_2(k), u(k)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$  son los estados del sistema no lineal,  $u(k)$  es la entrada de control aplicado en el tiempo  $t = \tau k$ , con  $\tau \in \mathfrak{R}^+$  el tiempo de muestreo. La función  $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$  describe



la dinámica del sistema (2.35) y se considera incierta pero acotada (característica básica para trabajar con incertidumbres paramétricas en la teoría de modos deslizantes).

El AST en tiempo discreto aplicado como estimador de estados, es descrito por el siguiente par de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(k+1) &= \hat{x}_1(k) + \tau \hat{x}_2(k) - \tau k_1 |e_1(k)|^{1/2} \text{sign}(e_1(k)) - k_3 e_1(k) \\ \hat{x}_2(k+1) &= \hat{x}_2(k) + \tau \hat{f}(x_1(k), \hat{x}_2(k), u(k)) - k_2 \text{sign}(e_1(k)) - k_4 e_1(k)\end{aligned}\quad (2.36)$$

$$e_1(k) := \hat{x}_1(k) - y(k)$$

La dinámica del error de observación, tomando las ecuaciones en (2.35) y (2.36), se define como

$$\begin{aligned}e_1(k+1) &= e_1(k) + \tau e_2(k) - \tau k_1 |e_1(k)|^{1/2} \text{sign}(e_1(k)) - \tau k_3 e_1(k) \\ e_2(k+1) &= e_2(k) + \tau \hat{f}(x_1(k), x_2(k), u(k)) - k_4 e_1(k) - k_2 \text{sign}(e_1(k)) - \tau k_4 e_1(k) \\ &\quad - \tau f(x_1(k), x_2(k), u(k))\end{aligned}\quad (2.37)$$

Para una entrada acotada  $u$ , la siguiente función

$$\tilde{f}(x_1, \hat{x}_2, u) := \hat{f}(x_1, \hat{x}_2, u) - f(x_1, x_2, u)\quad (2.38)$$

permanece acotada  $|\tilde{f}(x_1, \hat{x}_2, u)| \leq f^+$  con  $f^+ \in \mathfrak{R}^+$  [23], [24]. Esta restricción es válida para todo sistema mecánico y puede ser probada en términos de pasividad [11]. La ecuación (2.37) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}e(k+1) &= \Theta e(k) + \Phi(k) \text{sign}(e_1(k)) \\ \Theta(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} 1 - k_3 & \tau \\ 0 & 1 - k_4 \end{bmatrix}, \quad \Phi(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} -\tau k_1 |e_1(k)|^{1/2} \\ -k_2 + \tau \tilde{f} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.39)$$

La ecuación dada en (2.39) tiene la forma de la ecuación (2.27). El siguiente Corolario muestra

la convergencia del error de estimación considerando el resultado obtenido en el Teorema 1

**Corolario 1** *Considere el sistema no lineal descrito en las ecuaciones (2.35), donde la señal disponible para su medición es  $x_1(k)$ , si la condición requerida para el sistema no lineal dada en (2.38) se satisface, y si las ganancias del observador (2.36) son seleccionadas de tal manera que la desigualdad matricial*

$$\Theta^\top (R + \Lambda) \Theta - (1 - \rho) R < -G \quad (2.40)$$

con  $\Theta$  definida en la ecuación (2.39) tiene una solución positiva definida  $R = R^\top > 0$  para una matriz dada  $G = G^\top > 0$  y si la ganancia  $k_2 > f^+$ , entonces, el observador (2.36) asegura la convergencia de los estados estimados  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ , a  $(x_1, x_2)$  en un régimen tipo QSM.

**Demostración.** Las ecuaciones descritas en (2.39) tiene la misma estructura que la ecuación (2.27). Por lo tanto, es suficiente con seguir la prueba de convergencia del Teorema (1) para probar el corolario. La solución completa de (2.40) puede ser obtenida en términos del Lema 1.

■

### Estimador de estados para el caso vectorial

El estimador de estados descrito por la ecuación (2.36) puede ser extendido para sistemas con más de un grado de libertad. Todo sistema mecánico puede ser representado por  $2n$  ecuaciones en diferencias descritas por

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_\alpha(k+1) \\ x_\beta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\alpha(k) + \tau x_\beta(k) \\ x_\beta(k) + \tau (f(x(k), u(k)) + \xi(k)) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

donde  $x_\alpha(k+1)$  y  $x_\beta(k+1)$  se definen como

$$x_\alpha(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + \tau x_{n+1}(k) \\ x_2(k) + \tau x_{n+2}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) + \tau x_{2n}(k) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$x_\beta(k+1) = \begin{bmatrix} x_{n+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_{2n-1}(k+1) \\ x_{2n}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1}(k) + \tau(f_1(x(k), u(k)) + \xi_1(k)) \\ \vdots \\ x_{n+1}(k) + \tau(f_{n-1}(x(k), u(k)) + \xi_{n-1}(k)) \\ x_{n+1}(k) + \tau(f_n(x(k), u(k)) + \xi_n(k)) \end{bmatrix}$$

en este caso,  $x = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}]^\top \in \mathfrak{R}^{2n}$  es el vector de estados,  $u \in \mathfrak{R}^m$  es la acción de control aplicada en el tiempo  $t = \tau k$  y pertenece al conjunto  $U^{adm}$  definido como

$$U^{adm} := \left\{ u : \|u\|^2 \leq v_0 + v_1 \|x\|_{\Lambda_u}^2 \right\} \quad (2.43)$$

Donde  $v_0, v_1$  son constantes positivas finitas. Por otro lado, la matriz  $\Lambda_u \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ . Las señales  $\xi_i(k)$  representan perturbaciones internas en los estados. El vector  $\xi(k)$  denominado, vector general de perturbaciones está compuesto como  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^\top$  y se asume acotado con cota  $\Upsilon > 0$  de la siguiente forma  $\|\xi(k)\|_{\Lambda_\xi}^2 \leq \Upsilon$ ,  $\Lambda_\xi = \Lambda_\xi^\top > 0$ . Cada par de estados, referentes a la posición y velocidad de cada elemento  $(x_{\alpha_i}, x_{\beta_i})$  con  $i = 1 : n$  puede ser tratado como una clase independiente de sistema con un vector adicional de perturbaciones acotadas. De esta manera, el observador (2.36) puede ser extendido en forma vectorial como

$$\hat{x}_\alpha(k+1) = \hat{x}_\alpha(k) - \tau\beta_1\lambda(\tilde{x}_\alpha(k))S(\tilde{x}_\alpha(k)) \quad (2.44)$$

$$\hat{x}_\beta(k+1) = \hat{x}_\beta(k) + \tau(f(x_\alpha(k), \hat{x}_\beta(k), u(k)) - \beta_2 S(\tilde{x}_\alpha(k)))$$

donde  $\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta$  son los estados estimados de  $x_\alpha, x_\beta$  respectivamente; las matrices de ganancia  $\beta_1, \beta_2$  y  $\lambda(\tilde{x}_\alpha(k))$  se definen como

$$\beta_1 = \text{diag}\{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1n}\}, \quad \beta_2 = \text{diag}\{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2n}\}$$

$$\lambda(\tilde{x}_\alpha) = \text{diag}\{|\tilde{x}_1|^{1/2}, |\tilde{x}_2|^{1/2}, \dots, |\tilde{x}_n|^{1/2}\} \quad (2.45)$$

$$S(\tilde{x}_\alpha) = [\text{sign}(\tilde{x}_1), \text{sign}(\tilde{x}_2), \dots, \text{sign}(\tilde{x}_n)]^\top$$

El error de estimación se describe como  $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$  de acuerdo a las definiciones dadas en las ecuaciones (2.41), (2.42) y (2.44) para  $i = 1 : n$ . Definiendo los vectores  $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha - \hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta = x_\beta - \hat{x}_\beta$  la dinámica del error de estimación queda descrita por la siguiente ecuación en diferencias

$$\tilde{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_\alpha(k) + \tau\tilde{x}_\beta(k) \\ \tilde{x}_\beta(k) + \tau(\tilde{f}(x(k), u(k)) + \xi(k)) \end{bmatrix} - \tau \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\tilde{x}_\alpha(k)) \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} S(\tilde{x}_\alpha(k)) \quad (2.46)$$

donde  $\tilde{f}(x(k), u(k)) := f(x(k), u(k)) - \hat{f}(\hat{x}(k), u(k))$ , al igual que en el caso escalar,  $\tilde{f}(x(k), u(k))$  se considera acotado de acuerdo a  $\|\tilde{f}(x(k), u(k))\| \leq f^+$ . Si las siguientes variables son definidas en una forma similar a la de la ecuación (2.39),  $\Theta$  y  $\Phi$  quedan definidas como

$$\Theta := \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \tau I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \Phi(k) := \tau \begin{bmatrix} \beta_1 \Lambda(\tilde{x}_\alpha(k)) \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

con  $I_{n \times n}$  definida como la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ . La dinámica del error de observación puede ser representada en la forma de la ecuación descrita en (2.39) por lo que el siguiente resultado puede ser obtenido a partir del Teorema 1:

**Lema 2** *Considere el sistema descrito por las ecuaciones (2.41), usando la versión extendida del observador de estados por el AST en tiempo discreto para caso vectorial dado por (2.44), seleccionando las ganancias  $\beta_{1i} > 0$  y  $\beta_{2i} > f_{c_i}^+$  con  $i = 1 : n$ , y si la siguiente desigualdad matricial*

$$\left( A^\top (P + PYP) A - (1 - \rho) P \right) < -Q \quad (2.48)$$

tiene una solución positiva definida  $P = P^\top > 0$  con  $\Upsilon = \Upsilon^\top > 0$ ,  $P, \Upsilon \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ , entonces, las trayectorias del observador (2.44) convergen a las trayectorias reales en un régimen de QSM.

**Demostración.** Con la definición descrita en (2.47), el error de estimación puede ser reescrito como

$$\tilde{x}(k+1) = \Theta \tilde{x}(k) + \Phi(k) S(\tilde{x}_\alpha(k)) \quad (2.49)$$

siguiendo los resultados del teorema 1, el Lema es demostrado. ■

### 2.4.3. Control por modos deslizantes discretos de segundo orden

Considere el sistema no lineal con perturbaciones acopladas descrito por

$$x(k+1) = x(k) + \tau(Ax(k) + B(u(k) + f(x, k))) \quad (2.50)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathfrak{R}^m$  es la entrada de control,  $A, B$  son matrices constantes de dimensiones apropiadas y  $f$  es una incertidumbre/perturbación en el sistema,  $\tau$  es el periodo de muestreo del sistema. Se asume que las siguientes suposiciones se cumplen:

(A1)  $rank(B) = m$

(A2) el par  $(A, B)$  es controlable

(A3) La función  $f$  se considera acotada por funciones conocidas. Dichas funciones son descritas en líneas posteriores en el punto (A3).

Si las suposiciones A1 y A2 se cumplen, es posible transformar al sistema a su forma canónica mediante la siguiente transformación lineal

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} B^\perp \\ B^+ \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} B^+ &= (B^\top B)^{-1} B^\top, \\ B^\perp B &= 0 \end{aligned}$$

El sistema en (2.50) se convierte en la forma regular

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= \eta(k) + \tau(A_{11}\eta(k) + A_{12}\xi(k)) \\ \xi(k+1) &= \xi(k) + \tau\left(A_{21}\eta(k) + A_{22}\xi(k) + u + \tilde{f}(\eta, \xi, k)\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde  $\eta \in \mathfrak{R}^{n-m}$  y  $\xi \in \mathfrak{R}^m$ . El análisis de estabilidad del controlador, sin pérdida de generalidad, puede ser descrito para el caso SISO (single-input, single-output), es decir ( $m = 1$ ). No obstante, los resultados pueden ser fácilmente extendidos al caso multi entrada (MIMO, multi-input, multi-output). Se define una superficie de deslizamiento como

$$s(k) = \xi(k) - K\eta(k) \quad (2.52)$$

Sí la dinámica del sistema (2.51) es restringida a la superficie  $s$ , se tiene el sistema en orden reducido

$$\eta(k+1) = \eta(k) + \tau((A_{11} + A_{12}K)\eta(k)) \quad (2.53)$$

con un comportamiento deseado. Puesto que el par  $(A_{11}, A_{12})$  es controlable, existe una matriz  $K$  que puede ser diseñada bajo cualquier herramienta de diseño de controladores lineales (Ackerman, LQR) [15]. Tomando  $(\eta, s)$  como nuevas variables de estado, y aplicando el controlador

$$u(k) = -\frac{1}{\tau} [(K + \tau A_{21} + \tau A_{22}K - K - K\tau A_{11} - K\tau A_{12}K)\eta(k)] \quad (2.54)$$

$$-\frac{1}{\tau} [\tau A_{22} - K\tau A_{12} - KA_{12}(k)s(k)] + \tau v(k)$$

Por lo tanto, el sistema (2.51) toma la forma

$$\eta(k+1) = \eta(k) + \tau(A_{11}\eta(k) + A_{12}\xi(k)) + A_{12}s(k) \quad (2.55)$$

$$s(k+1) = s(k) + \tau f(\eta(k), s(k) + K\eta(k), k) + \tau v(k)$$

Las perturbaciones son acotadas por una función conocida  $\zeta(x(k))$

$$|f(x, k)| \leq \zeta(x(k))$$

La estrategia de control puede ser seleccionada como un controlador super-twisting discreto,

esto es,

$$v(k+1) = -k_1 \phi_1(s(k)) + w(k) \quad (2.56)$$

$$w(k+1) = w(k) - \tau k_2 \phi_2(s(k))$$

donde

$$\phi_1(s(k)) = (s(k))^{1/2} \text{sign}(s(k)) \quad (2.57)$$

$$\phi_2(s(k)) = \text{sign}(s(k))$$

Si las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  son seleccionadas adecuadamente es posible mantener la dinámica del sistema (2.51) insensible a perturbaciones crecientes acotadas por funciones conocidas. La incertidumbre  $\tilde{f}(\eta, s + K\eta, k)$  puede ser reescrita como

$$\tilde{f}(\eta, s + K\eta, k) = g_1(\eta, s, k) + g_2(\eta, k)$$

$$g_1(\eta, s, k) := \tilde{f}(\eta, s + K\eta, k) - \tilde{f}(\eta, K\eta, k) \quad (2.58)$$

$$g_2(\eta, k) := \tilde{f}(\eta, K\eta, k)$$

con  $g_1(\eta, s, k) = 0$  cuando  $s = 0$ . Se asume que (2.58) esta acotado así como las perturbaciones  $g_1$  y  $g_2$  con sus correspondientes cotas superiores positivas.

El sistema (2.55) en lazo cerrado con el controlador basado en el AST esta descrito como

$$\eta(k+1) = \eta(k) + \tau(A_{11} + A_{12}K)\eta(k) + A_{12}s(k)$$

$$s(k+1) = s(k) - \tau(k_1 \phi_1(s(k)) - w(k) - g_1(\eta, s, k))$$

$$w(k+1) = w(k) - \tau(k_2 \phi_2(s(k)) - g_2(\eta, k))$$

definiendo  $\theta := \begin{bmatrix} \eta & s & w \end{bmatrix}^\top$  el sistema anterior puede ser descrito como

$$\theta(k+1) = A\theta(k) + B\text{sign}(s) + \Psi(k) \quad (2.59)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \tau (A_{11} + A_{12}K) & A_{12} & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau k_1 |s|^{1/2} \\ -\tau k_2 \end{bmatrix}, \quad \Psi(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(\eta, s, k) \\ g_2(\eta, k) \end{bmatrix}$$

el resultado parcial obtenido con el controlador por el AST se describe en el siguiente corolario

**Corolario 2** *Considere el sistema no lineal descrito en la ecuación (2.59), seleccionando  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$ . Adicionalmente, si la siguiente desigualdad lineal descrita*

$$\left( A^\top (P + \Lambda) A - (1 - \varrho) P \right) < -Q \quad (2.60)$$

*tiene una solución positiva definida  $P = P^\top > 0$  entonces, la dinámica del sistema no lineal en (2.59) converge en regimen QSM alrededor del origen donde*

$$\begin{aligned} \gamma_0 &:= \bar{\delta}_2 + \frac{1}{4} \bar{\delta}_1^{-2} \lambda_{\min} \left\{ (\bar{Q}^{-1})^2 \right\} \\ \bar{\delta}_1 &:= (\delta_1 + \delta_2^2 \varpi_1), \quad \bar{\delta}_2 := \delta_3 + \varpi_1^{-1} \\ \delta_1 &:= (-\tau k_1 + \varrho_1)^2 z_{22}, \quad \delta_1 := (-\tau k_2 + \varrho_2)^2 z_{33} \\ \delta_2 &:= (-\tau k_1 + \varrho_1) [(-\tau k_2 + \varrho_2) z_{23} + z_{23}] \\ \omega_1 &\in \mathbb{R}^+, \quad z_{i,j} = [\Lambda^{-1} + P]_{\substack{i=[1,3] \\ j=[1,3]}} \\ \Lambda^{-1} &= (\Lambda^{-1})^\top > 0, \quad \Lambda, P \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ 0 &< \varrho_1 < 1 \end{aligned}$$

**Demostración.** Las ecuaciones descritas en (2.59) tiene la misma estructura que la ecuación (2.27). Por lo tanto, es suficiente seguir la prueba de convergencia en el Teorema (1) para probar el Corolario. La solución completa de (2.60) puede ser obtenida en términos del Lema 1. ■



## Capítulo 3

# Identificación, estimación y control por redes neuronales recurrentes

Muchas de las técnicas para el diseño de controladores se basan en la completa descripción del modelo matemático de la planta. Sin embargo, un modelo matemático que se adapte completamente al sistema real a controlar pocas veces está disponible. Por lo tanto, las técnicas clásicas de control, incluso como los modos deslizantes, tienen que ser modificadas ligeramente para incluir un algoritmo de identificación con el objetivo de obtener progresivamente más información del sistema a controlar [37]. Una de las teorías que permite trabajar con modelos inciertos o que son parcialmente desconocidos es el control adaptable. Una revisión completa del problema de control adaptable se encuentra en [37].

Dentro de la teoría de control adaptable, se encuentran las redes neuronales artificiales (RNA). Ésta técnica computacional ha mostrado interesantes propiedades aplicadas para la identificación de funciones no lineales con incertidumbres y perturbaciones externas al sistema. [50]. Las RNA se clasifican principalmente en dos grupos, las redes neuronales estáticas (RNE) y las denominadas redes neuronales dinámicas (RND).

Las RNE abordan el problema de minimización de un índice desempeño dado. Entre estos algoritmos, el más conocido es el algoritmo de *backpropagation*, el cual se basa en una generalización de la regla del gradiente descendiente [30]. Las RND incluyen en su estructura un diseño adecuado de retroalimentación, que se traduce en una mejor capacidad de reproducir

funciones inciertas, además de mejorar el problema de estabilidad de la red [51]. Para sistemas en tiempo continuo, en [50] se describe el concepto de red neuronal diferencial basada en la idea de aplicar las funciones de Lyapunov controladas para desarrollar los algoritmos de ajuste de los parámetros de la red. Los problemas de identificación, estimación de estados y control para este tipo de redes se aborda completamente en [31]. Para el caso de sistemas en tiempo discreto, las redes neuronales recurrentes constituyen una opción para aproximar funciones no lineales inciertas [52], [53]. Entre los algoritmos dedicados al entrenamiento de las RNR se encuentra el algoritmo *backpropagation through time* [30], entrenamiento realizado por filtros de Kalman [54] y los basados en funciones de Lyapunov [55], [56], [57]. En las siguientes secciones se aborda el tema de identificación, estimación y control de sistemas no lineales inciertos en tiempo discreto basado en el segundo método de estabilidad de Lyapunov.

### 3.1. Identificación y control por redes neuronales recurrentes

Considere el siguiente sistema no-lineal discreto en tiempo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), k) + g(x)u(k) + \xi(k) \\ x(0) &= x_0 \text{ (dado)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x(k) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados del sistema no lineal en el tiempo  $t = k\tau$  donde  $\tau$  es definido como el periodo de muestreo. La función  $f(\cdot, \cdot) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  describe la dinámica del sistema no lineal,  $g \in \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times m}$  es una función no lineal asociada a la entrada exógena  $u \in \mathfrak{R}^m$  a ser diseñada y  $\xi \in \mathfrak{R}^n$  constituye una perturbación externa acotada. Se considera que el sistema no lineal en (3.1) satisface los siguientes puntos

A1. La función desconocida  $f(\cdot, \cdot)$  es suficientemente suave y satisface la condición de Lipschitz, es decir,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq L_1 \|x - y\| \\ \forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \quad &0 < L_1 < \infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esta propiedad garantiza la unicidad y existencia de la solución del sistema original.

A2. La función no lineal  $g(\cdot)$  en (3.1) es controlable. La función  $g(x)$  se considera conocida

y acotada como

$$0 < \|g(x)\|_F^2 \leq g^+ \quad (3.3)$$

de aquí en adelante  $\|\cdot\|_F$  se define como la norma de Frobenius [36].

A3. La perturbación externa se considera acotada

$$\|\xi(\cdot)\|_{\Lambda_\xi}^2 \leq \xi^+ \quad (3.4)$$

donde  $\Lambda_\xi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $0 < \Lambda_\xi = \Lambda_\xi^\top$  y  $\xi^+ \in \mathfrak{R}^+$ .

### 3.1.1. Aproximación por redes neuronales recurrentes

El sistema no lineal parcialmente desconocido (o incierto) descrito en las ecuaciones (3.1) por las propiedades dadas en (3.2) y por el resultado planteado en el teorema de Stone-Weierstrass [52] puede ser representado por una red neuronal recurrente con la siguiente estructura

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + W_1^* \sigma(x(k)) + g(x)u(k) + \tilde{f}(k) + \xi(k) \\ A &\in \mathfrak{R}^{n \times n}; \quad x \in \mathfrak{R}^n; \quad u \in \mathfrak{R}^m, \quad \sigma(\cdot) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $A$  es seleccionada como una matriz Hurwitz (en el sentido discreto),  $W_1^* \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  son los valores que mejor se ajustan para aproximar la función no lineal  $f(\cdot, \cdot)$ , el vector  $\sigma(\cdot) = [\sigma_1(\cdot), \dots, \sigma_l(\cdot)]^\top$  que contiene las funciones de activación de la RNR está constituido con funciones sigmoideas (siguiendo los algoritmos estándar de diseño de redes neuronales). No obstante, otro tipo de funciones pueden ser usadas (como Wavelets, o funciones tipo tangente hiperbólica) [58]. El tipo de funciones utilizados en este trabajo satisfacen la siguiente estructura

$$\sigma_i(x) = \frac{a_i}{1 + b_i \exp(-c_i x_i(k))} + d_i \quad (3.6)$$

$$a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathfrak{R}^+, \quad i = 1 : n$$

El término  $\tilde{f}(k)$  representa la dinámica no modelada definida como

$$\tilde{f}(k) := f(x(k), k) - (Ax(k) + W_1^* \sigma(x(k)))$$

Para la representación no lineal por RNR del sistema (3.1), se asume que las siguientes suposiciones se cumplen

A4. Las funciones no lineales de activación  $\sigma_i(\cdot)$  satisfacen las condiciones de sector con  $L_\sigma$  una constante positiva

$$\|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)\|^2 \leq L_\sigma \|x_1 - x_2\|^2 \quad (3.7)$$

A5. El error de modelado  $\tilde{f}(k)$  pertenece a un sector definido por la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2 &\leq f_0 + f_1 \|\tilde{x}\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2, \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{R}^+ \\ 0 &< f_1, f_2 < \infty \end{aligned} \quad (3.8)$$

con  $\Lambda_{\tilde{f}} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

A6. En este trabajo se considera que no es obligatorio conocer el valor exacto de los elementos de  $W_1^*$ , sin embargo, su cota superior se conoce,

$$\begin{aligned} (W_1^*)^\top \tilde{\Lambda}_{W_1^*} W_1^* &\leq \check{W}_1, \quad \|\check{W}_1\|_F \leq \check{W}_1^+ < \infty \\ \check{W}_1^+ &:= \sqrt{\text{tr}(\check{W}_1^\top \check{W}_1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.1.2. Sistema objetivo

Se requiere el diseño de una ley de control  $u$  tal que, el sistema en (3.1) pueda realizar una tarea de seguimiento al sistema de referencia descrito por

$$x^*(k+1) = h(x^*(k), k) \quad (3.10)$$

donde  $x_d \in \mathfrak{R}^n$ , es el estado del sistema.

A7. La función  $h(\cdot, \cdot) \in \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  se considera acotada de la siguiente forma

$$\|h(x^*, k)\|^2 \leq h^+ < \infty$$

$$\|h(y, k) - h(z, k)\| \leq L_{NC} \|y - z\| \quad (3.11)$$

$$\forall x^* \in \mathfrak{R}^n \quad 0 < L_{NC} < \infty$$

### 3.1.3. Identificador por RNR

El esquema del identificador por RNR propuesto en esta tesis está definido por la siguiente ecuación en diferencias

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \bar{W}_1(k)\sigma(\hat{x}(k)) + g(\hat{x})u(k) \quad (3.12)$$

$$2\bar{W}_1(k) := W_1(k+1) + W_1(k),$$

donde  $\hat{x} \in \mathfrak{R}^n$  es el estado del identificador por RNR,  $u \in \mathfrak{R}^m$  es la señal de control,  $W_1(k) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de pesos para los estados retroalimentados. La matriz de pesos  $\bar{W}_1$  es actualizada por la ley de aprendizaje no lineal

$$W_1(k+1) = \Phi(W_1(k), \hat{x}(k), u(k)) \quad (3.13)$$

que será diseñada posteriormente. En la ecuación (3.13) la función  $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$  constituye una función no lineal para ajustar los pesos de la RNR. Esta función será diseñada posteriormente. Los parámetros  $W_1$  tienen que ser ajustados para minimizar el error de aproximación entre la parte nominal del sistema y la parte desconocida del sistema no lineal (3.1).

El error de identificación se define como

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (3.14)$$

mientras el error de seguimiento

$$\delta(k) = \hat{x}(k) - x^*(k) \quad (3.15)$$

### 3.1.4. Planteamiento del problema

El principal problema a resolver en esta sección de la tesis está relacionado con el desarrollo de la ley adaptable para ajustar los parámetros libres de la RNR como identificador en la ecuación (3.12), de tal manera que sea posible reproducir las trayectorias del sistema incierto (3.1) bajo la presencia de perturbaciones externas en la dinámica del estado y diseñar basado

en los valores identificados una señal de control  $u$  para realizar un seguimiento de trayectoria al modelo de referencia (3.10).

El problema a tratar puede formularse como en el siguiente enunciado

*Bajo las suposiciones descritas en (3.2), (3.3), (3.4), (3.7), (3.8) y (3.11), se requiere el diseño de una ley de control  $u(k)$  para el seguimiento de trayectoria del sistema incierto (3.1) a (3.10) y el diseño de las leyes de actualización (3.13) tal que, la cota superior del error de seguimiento  $\pi$  definido como*

$$\pi = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x^*(k)\|^2 \quad (3.16)$$

*sea lo más pequeña posible*

### 3.1.5. Ley de adaptación de los pesos

Para ajustar los pesos del identificador en tiempo discreto por RNR (3.12), considere el siguiente algoritmo de adaptación

$$W_1(k+1) := -\Gamma_1^{-1} \Gamma_2 W_1(k) + \Gamma_1^{-1} (2P_1 A \hat{x}^\top(k) \Psi^\top(k))$$

$$\Gamma_1 = (\Lambda_{\omega_1} \Psi(k) \Psi^\top(k) + g_1 I_{n \times n}), \quad \Gamma_2 = (\Lambda_{\omega_1} \Psi(k) \Psi^\top(k) - g_1 I_{n \times n}), \quad (3.17)$$

$$\Psi(k) := \sigma(\hat{x}(k)), \quad \Lambda_{\omega_1} = (P_1 + P_1 (\Lambda_9 + \Lambda_{10}) P_1 + \Lambda_5)$$

La constante  $g_i$  es el coeficiente de aprendizaje de la red,  $0 < P_1 = P_1^\top \in \mathfrak{R}^n$  es la solución positiva definida de la siguiente ecuación matricial

$$A^\top P_1 A + A^\top P_1 \Lambda_s^{-1} P_1 A - P_1 + Q = 0 \quad (3.18)$$

con los siguientes parámetros

$$Q_1 = L_\sigma \check{W}_1 + Q_0$$

$$0 < Q_0 = Q_{10}^\top \in \Re^{n \times n}$$

$$\Lambda_\xi := \Lambda_4 + \Lambda_8 + \Lambda_{10} + \Lambda_{12} \tag{3.19}$$

$$\Lambda_s^{-1} = \Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + \Lambda_3^{-1} + \Lambda_4^{-1}$$

$$\Lambda_i = \Lambda_i^\top > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 8, 10, 12$$

Es posible observar que la ley de ajuste no lineal de los pesos requiere la inversión de la matriz  $\Gamma_1$ , no obstante  $g_1 > 0$ ,  $\Lambda_{\omega_1}$  es una matriz simétrica positiva definida y existe la multiplicación del vector  $\Psi(k)$  con su transpuesto, de ésta manera, generando  $\Gamma_1$  es una matrix positiva definida y por la tanto es siempre invertible. En las definiciones que se presentan en (3.19) las matrices  $\Lambda_i$ , con  $i = 1 : 12$  son matrices positivas definidas y simétricas producto del análisis de estabilidad por el segundo método de Lyapunov. En el apéndice, se puede estudiar el análisis de estabilidad a fondo para comprender el significado de las matrices  $\Lambda_i$ .

### 3.1.6. Resultado principal de identificación y control

El resultado principal de esta sección puede ser descrito como

**Teorema 2** *Si existe una matriz positiva definida  $Q_0$  tal que, la ecuación matricial bilineal descrita en (3.18) tiene una solución positiva definida  $P_1$  y si los parámetros libres  $W_1(k)$  del identificador (3.12) son actualizados por la ley de aprendizaje (3.17) y la acción de control es*

seleccionada como

$$u(k) = (Gg(\hat{x}))^\top \left( (Gg(\hat{x})) (Gg(\hat{x}))^\top \right)^{-1} \gamma_2$$

$$\gamma_2 = Gh(x^*, k) - G\bar{W}_1(k) \sigma(\hat{x}(k)) - GA\hat{x}(k) - vs(k) \quad (3.20)$$

$$G \in \mathfrak{R}^{n \times m} \text{ and } v \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

con  $v$  una matriz Hurwitz en sentido discreto, entonces, las trayectorias del vector  $z(k)$  definido como  $z^\top(k) := \begin{bmatrix} \hat{x}(k) & \delta(k) \end{bmatrix}$  son últimamente acotadas [12] en una vecindad caracterizada por el radio

$$\pi \leq \frac{\varphi}{\lambda_{\min}(\bar{Q})} \quad (3.21)$$

$$\varphi := \lambda_{\max}(\Lambda_{\tilde{f}}) f_1^+ + \lambda_{\max}(\Lambda_{\xi}) \xi^+$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\bar{P}_2 := ((-v + I))^\top P_2 (-v - I)$$

$$0 < Q_0^\top = Q_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad 0 < P_2^\top = P_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

**Demostración.** La prueba de este teorema se describe en el apéndice 1. ■

### 3.2. Estimación de estados por redes neuronales recurrentes y modos deslizantes

El estimador de estados descrito en el capítulo anterior basado en el AST para caso vectorial dado en la ecuación (2.44) requiere del conocimiento de la cota  $f^+$ , este valor es característico de las técnicas basadas en modos deslizantes. Los observadores basados en RNR pueden cubrir el desconocimiento de la función  $f(x, k)$ , la cual describe la dinámica de todo el sistema. Para sistemas de segundo orden (tipo mecánicos) donde la perturbación/incertidumbre se encuentra



en el estado que describe la aceleración del sistema, se puede usar una generalización del observador por el AST introduciendo un sistema recurrente basado en redes neuronales, con una estructura similar al de la sección anterior para mejorar el comportamiento del observador.

### 3.2.1. Clase de sistemas no lineales

Considere las ecuaciones (2.41), (2.42) donde se describe un sistema con la estructura clásica de un sistema mecánico. Mas aún, considere el conjunto de todos los controladores admisibles acotados definidos por (2.43).

Adicionalmente considere sistemas con entradas de control de tipo estabilizante, es decir

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| \leq \varepsilon \quad (3.23)$$

La salida del sistema se considera  $x_\alpha(k)$  descrita en (2.42).

### 3.2.2. Representación del sistema incierto basado en redes neuronales recurrentes

La función no lineal  $f(x(k), u(k))$  por el teorema de Stone-Weisstrass [59] puede ser aproximada por una red neuronal recurrente, tal como el sistema descrito en (3.1). La función  $f(\cdot, \cdot)$  puede ser representada por una parte nominal  $f_0(x(k), u(k) | \Omega)$  que depende del ajuste de un conjunto de parámetros definido por  $\Omega$  y un error de modelado  $\tilde{f}(x(k))$ .

$$f(x(k), u(k)) := f_0(x(k), u(k) | \Omega) + \tilde{f}(x(k))$$

La parte nominal es caracterizada por una RNR dada por

$$f_0(x(k), u(k) | \Omega) := Ax(k) + W_1^* \sigma(x(k)) + W_2^* \varphi(x(k)) u(k) \quad (3.24)$$

donde  $W_1^* \in \mathfrak{R}^{n \times 2n}$  y  $W_2^* \in \mathfrak{R}^{n \times 2n}$  son matrices constantes que aproximan en mejor manera (en cierto sentido) la función no lineal  $f(\cdot, \cdot)$  en (2.42). Los pesos  $W_1^*$  y  $W_2^*$  se asumen desconocidos pero acotados.  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz estable en sentido discreto. La dinámica no modelada

se considera acotada como

$$\left\| \tilde{f} \right\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2 \leq n_1, \quad n_1 \in \mathfrak{R}^+ \quad (3.25)$$

con  $\Lambda_{\tilde{f}} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ ,  $0 < \Lambda_{\tilde{f}} = \Lambda_{\tilde{f}}^\top$ .

Las funciones  $\sigma(\cdot) : \mathfrak{R}^{2n \times 1} \rightarrow \mathfrak{R}^{2n \times 1}$  y  $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^{2n \times m} \rightarrow \mathfrak{R}^{2n \times m}$  al igual que en el identificador fueron seleccionadas de tipo sigmoide, es decir,

$$\begin{aligned} \sigma_i(x) &= \frac{a_{\sigma_i}}{1 + b_{\sigma_i} \exp(-c_{\sigma_i} x(k))} \\ \varphi_{ij}(x) &= \frac{a_{\varphi_{ij}}}{1 + b_{\varphi_{ij}} \exp(-c_{\varphi_{ij}} x(k))} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$a_{\sigma_i}, a_{\varphi_{ij}}, b_{\varphi_{ij}}, b_{\sigma_i}, c_{\sigma_i}, c_{\varphi_{ij}} \in \mathfrak{R}, \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : m$$

Las funciones (3.26) satisfacen las condiciones de sector

$$\|\sigma(x) - \sigma(z)\|^2 \leq L_\sigma \|x - z\|^2, \quad \|\varphi(x) - \varphi(z)\|^2 \leq L_\varphi \|x - z\|^2 \quad (3.27)$$

$$\|\sigma(x)\| \leq L_\sigma^+, \quad \|\varphi(x)\| \leq L_\varphi^+$$

donde  $L_\sigma, L_\varphi, L_\sigma^+, L_\varphi^+$  son escalares positivos acotados. La perturbación externa  $\xi := [\xi_1, \dots, \xi_n]^\top$  es de tipo determinístico y se considera acotada  $\|\xi(k)\|^2 \leq \Upsilon$ . Bajo los esquemas formulados en (3.24) la ecuación (2.42) se convierte en

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_\alpha(k+1) \\ x_\beta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\alpha(k) + \tau x_\beta(k) \\ x_\beta(k) + \tau \left( f_0(x(k), u(k) \mid \Omega) + \tilde{f}(x(k)) + \xi(k) \right) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$y(k) = Cx(k) = x_\alpha(k)$$

### 3.2.3. Observador por RNR en tiempo discreto

El estimador de estados basado en RNR se compone de una reproducción de la sección nominal desconocida  $f_0(\cdot, \cdot \mid \cdot)$  y un conjunto de  $2n$  términos de corrección con la información

de salida disponible del sistema. El observador propuesto en esta sección toma la idea del identificador (3.12) y el observador basado en el AST para tiempo discreto en (2.44). La estructura del estimador de estados se describe en la siguiente ecuación

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}_\alpha(k) + \tau \hat{x}_\beta(k) \\ \hat{x}_\beta(k) + \tau (A \hat{x}_\beta(k) + \bar{W}_1(k) \sigma(\hat{x}(k)) + \bar{W}_2(k) \varphi(\hat{x}(k)) u(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau \beta_1 \lambda(\Delta_\alpha(k)) S(\tilde{x}_\alpha(k)) \\ \tau \beta_2 S(\Delta_\alpha(k)) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$2\bar{W}_1(k) := W_1(k+1) + W_1(k), \quad 2\bar{W}_2(k) := W_2(k+1) + W_2(k)$$

con  $S(\cdot)$  definido en la ecuación (2.45). La ecuación anterior puede ser reescrita en forma compacta como

$$\hat{x}(k+1) = A_x \hat{x}(k) + B(k) S(\Delta_\alpha(k)) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \bar{W}_1(k) \sigma(\hat{x}(k)) + \bar{W}_2(k) \varphi(\hat{x}(k)) u(k) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

con las siguientes definiciones  $A_x := \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \tau I_{n \times n} \\ 0 & I + \tau A \end{bmatrix}$ ,  $B(k) := \begin{bmatrix} \tau \beta_1 \lambda(\Delta_\alpha(k)) \\ \tau \beta_2 \end{bmatrix}$ ,  $0_{n \times 1}$  es un vector de ceros de dimensión  $n \times 1$ . La señal de error es definida como  $\Delta_\alpha := x_\alpha - \hat{x}_\alpha$ . Los pesos  $\bar{W}_1(k)$  y  $\bar{W}_2(k)$  permiten el comportamiento adaptable del observador para brindar una mejor aproximación a los pesos  $W_1^*$  y  $W_2^*$ . El estimador de estados se actualiza por una ley de aprendizaje similar a la presentada en la ecuación (3.13) que será diseñada bajo el esquema del segundo método de estabilidad de Lyapunov. Las ganancias  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y la función  $\lambda(\Delta_\alpha)$  tienen una definición idéntica a las mostradas en la ecuación (2.45).

### 3.2.4. Planteamiento del problema

El principal problema a tratar en esta sección de la tesis, se resume en el diseño de las leyes de adaptación de los parámetros libres  $W_1$  y  $W_2$  y de la matriz de ganancias  $\beta_1$  y  $\beta_2$  incluidos en la estructura del observador, de tal manera que las trayectorias del sistema no lineal en tiempo

discreto definido en (2.41) y (2.42) puedan ser reconstruidas por (3.29) bajo la presencia de perturbaciones externas.

El problema a tratar puede ser formulado de la siguiente manera

*Tomando en cuenta las suposiciones mencionadas anteriormente, para una entrada de control admisible  $u$  que pertenezca al conjunto  $U^{adm}$ , seleccionar las ganancias adecuadas  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , y obtener la ley de aprendizaje (3.17) (incluida la selección de los pesos  $W_j^*(k)$ ,  $j = 1, 2$ , tal que, la cota superior del error de estimación  $\pi$ , definido como*

$$\pi := \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta(k)\|_{Q_0}^2$$

sea lo más reducida posible con  $Q_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y el error de estimación  $\Delta = x - \hat{x}$ .

### 3.2.5. Ley de adaptación de los pesos

La ley de aprendizaje no lineal para el observador basado en RNR esta definida como

$$\begin{aligned} W_i(k+1) &= (\varepsilon_i + g_i^{-1} I_{n \times n})^{-1} [ - (\varepsilon_i - g_i^{-1} I_{n \times n}) W_i(k) ] \\ &+ \tau (\varepsilon_i + g_i^{-1} I_{n \times n})^{-1} M^\top P [ A_x N_\delta C^\top \Delta_\alpha(k) - B(k) S(\Delta_\alpha(k)) ] \Psi_i^\top \\ & \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

con los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \tau^2 (\Psi_i^\top \Psi_i / 4) M^\top \Lambda_{W_i} M, \quad M = \begin{bmatrix} \vec{0}_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}^\top \\ \Psi_1 &:= \sigma(\hat{x}(k)), \quad \Psi_2 := \varphi(\hat{x}(k)) u(k), \quad \Lambda_{W_i} = \Lambda_{W_i}^\top > 0 \end{aligned}$$

la matriz  $N_\delta \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$  esta definida como  $N_\delta := (CC^\top + \delta I_{n \times n})^{-1}$  con  $\delta$  un escalar positivo. Los valores  $g_i^{-1}$   $i = 1, 2$  son los coeficientes de aprendizaje de la RNR. La matriz  $P = P^\top > 0$ ,  $P \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$  es la solución positiva definida de la desigualdad matricial bilineal

$$A_x^\top P A_x + A_x^\top P R_a P A_x + R_b - (1 - \alpha) P \leq Q_0 \tag{3.32}$$

donde

$$R_a := \sum_{i=1}^5 \Lambda_i,$$

$$R_b = \delta N_{A_x} + C N_{A_x} C^\top + \tau^2 u^+ L_\varphi \check{W}_2 + \tau^2 L_\sigma \check{W}_1$$

$$\Lambda_{R_\varphi} = (\Lambda_3^{-1} + \Lambda_7^{-1} + \Lambda_{15} + \Lambda_{16})$$

$$\Lambda_{R_\sigma} = (\Lambda_2^{-1} + \Lambda_6^{-1} + \Lambda_{10} + \Lambda_{11} + \Lambda_{12})$$

$$N_{A_x} = N_\delta^\top A_x^\top A_x N_\delta$$

y  $\Lambda_n = \Lambda_n^\top > 0$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16$ , son matrices positivas definidas (su sentido proviene del estudio de estabilidad que se puede revisar en el apéndice).

### 3.2.6. Resultado de estimación por RNR y MDSO

El resultado principal de esta sección se resume en el siguiente teorema

**Teorema 3** *Si el observador propuesto en (3.30) es alimentado por la ley de adaptación en (3.31) y si la solución  $P$  positiva definida para la ecuación de Riccati en (3.32) existe, y si los elementos de las matrices de ganancias del observador  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son seleccionadas con valores positivos, entonces el error de estimación  $\Delta(k)$  es finalmente acotado con cota superior*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta(k)\|_{Q_0}^2 \leq \rho(\Lambda_B, \Gamma)$$

$$\rho(\Lambda_B, \Gamma) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Lambda_B) \left\| Q_0^{-1/2} \right\|^2 + \Gamma, \quad (3.33)$$

$$\Gamma = \epsilon_i + \tilde{\epsilon}_i + n_1 + \Upsilon + \vartheta_1, \quad \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_i, n_1, \Upsilon, \vartheta_1 \in \mathfrak{R}^+$$

**Demostración.** La prueba de este teorema se describe en el apéndice 1. ■

## Capítulo 4

# Control por visión de robots móviles

Los robots actuales son fruto de la tecnología moderna que involucra una variedad de áreas de conocimiento como mecánica, ingeniería eléctrica, control automático y ciencias computacionales. Entre los elementos sensoriales más atractivos para incrementar la autonomía en robótica, destacan los sistemas de visión. Estos dispositivos proporcionan información relevante sobre el estado del robot y su entorno físico inmediato. La importancia de contar con la información visual resalta en aplicaciones con ambientes estructurados o cambiantes. Aunque los primeros intentos de incorporar sistemas de visión en robótica se remontan a tres décadas atrás. No ha sido hasta hace pocos años que los avances tecnológicos han permitido la fabricación de cámaras de alta resolución y velocidad para que el control por visión se convierta en una opción en aplicaciones industriales.

### 4.1. Tipos de navegación

El control de robots móviles se encarga del control de una estructura generalmente con ruedas navegando en un espacio ya sea abierto (Outdoor Navigation, ON) o cerrado (Indoor Navigation, IN) [9]. Dependiendo de esta clasificación, los algoritmos desarrollados difieren para el control de los robots. Es por esto que, haciendo una recopilación del estado del arte en cuanto al control por visión de robots móviles conviene hacer la revisión separando estos resultados.

#### 4.1.1. Navegación en interiores

Existen resultados [9] que derivan en la determinación de modelos simples que engloban el tratamiento general de robots por visión para el caso IN, éstos modelos son

- Navegación basada en mapas. Estos sistemas dependen de la creación de modelos geométricos o topológicos de mapas que describen el ambiente de desarrollo del robot.
- Navegación basada en la creación de mapas. En este tipo de control, el robot tiene sensores que le permiten crear el entorno geométrico o topológico que lo rodea y después usar estos datos para su navegación.
- Navegación sin mapa. Reconocen los objetos de su ambiente por observaciones visuales.

#### Navegación basada en mapas

El procedimiento para realizar un control basado en visión tomando en cuenta IN conlleva los siguientes pasos:

1. **Adquisición de la información por los sensores.** Consiste en adquirir y digitalizar la información obtenida por las cámaras.
2. **Detección de patrones.** Usando la información adquirida en el punto 1, se procede a la extracción de bordes, suavizamiento, filtraje y segmentación de las imágenes captadas por la cámara.
3. **Establecer relaciones entre lo que se ve y lo que se conoce.** En este punto dado que se tiene conocimiento del mapa, y se cuenta con una base de datos que describe el entorno del robot, se procede a establecer similitudes entre los patrones adquiridos en el punto anterior y las imágenes que se tienen en la base de datos.
4. **Cálculo de la posición.** Una vez que se tiene una congruencia entre lo que el robot detecta, y su base de datos, se calcula la posición del robot.

Algunas de las técnicas usadas ocupan el modelo dinámico del robot móvil, con la información procedente de las imágenes se realiza un procesamiento basado en los Filtros de Kalman,

esta técnica derivó en el denominado modelo FINALE (Fast Vision-Guided Mobile Robot Navigation Using Model-Based Reasoning and Prediction of Uncertainties) [60]. Procesamientos más complejos fueron desarrollados basados en la teoría de redes neuronales (NEURO-NAV) y lógica difusa (FUZZY-NAV). Es posible seguir un resumen de la arquitectura de los algoritmos computacionales de control con más detalle en [9].

**Navegación basada en la creación de mapas** Consiste en la exploración del entorno en el que se desenvuelve el robot al crear una representación interna de su ambiente. Existen aproximaciones básicas que permiten la creación de un mapa, una de ellas es la técnica denominada OCA (occupancy-grid approach), la cual permite crear una representación geométrica rica en detalle para, posteriormente, realizar una fase de aprendizaje, basada generalmente en aproximaciones por redes neuronales e integración Bayesiana. Su funcionalidad es insensible al ruido y al tipo de odómetro que se use como sensor [61].

### **Navegación sin mapas**

De los tipos de navegación IN, es de las más difíciles de tratar, dado que no se tiene conocimiento previo del entorno en el que se desarrolla el robot, el control se hace extrayendo características en tiempo real del medio para posteriormente determinar una decisión a tomar para el flujo del movimiento del robot. Dentro de las técnicas empleadas se tiene la navegación por flujo óptico, que trata de emular la visión de las abejas, para posteriormente mediante la colocación de un controlador PID en cascada obtener la dirección del robot móvil.

#### **4.1.2. Navegación en exteriores (ON, Outdoor Navigation )**

Un mapa acerca del ambiente de desarrollo es difícilmente conocido, y el robot tiene que lidiar con los objetos que se atraviesen en su trayectoria tan pronto como ellos aparecen en el camino del robot, sin información a priori de la posición donde se encuentra. Este tipo de navegación se divide según la estructura del entorno. Es decir se puede trabajar en un ambiente estructurado ó en un ambiente no estructurado. Uno de los primeros desarrollos es ALVINN (Autonomous Land Vehicle in a Neural Network) una explicación completa de la metodología usada para el control del robot se puede estudiar de igual forma en el tutorial [9]. Este sistema



toma las imágenes y entrena una red neuronal en línea, se la entrada a la red son las imágenes capturadas por una cámara montada en el robot móvil. La red neuronal tiene una capa de entrada que consiste de 30x32 nodos, en la cual la imagen de la cámara es proyectada. La capa de entrada es conectada a una capa oculta de 5 nodos, que a su vez se conecta con la capa de salida que consiste de 30 nodos y que representa cada uno de los ángulos que puede tomar el vehículo al seguir un camino determinado. La Red Neuronal es entrenada empleando un esquema Backpropagation clásico.

## 4.2. Robots tipo SSMR

Los robots móviles son vehículos cuyo movimiento es el resultado de la interacción de las llantas con el terreno. Un problema importante asociado a la interacción de las llantas con el terreno es el fenómeno del derrapamiento [62]. Comúnmente, este problema es ignorado en muchos tipos de locomoción, y las propiedades de las llantas como la geometría y dureza en robots móviles varían, por lo que su tracción debe de ser estudiada a detalle. Las llantas usadas para robótica móvil son no neumáticas, por lo que requieren de una amplia investigación para saber como son sus interacciones con el terreno [63].

Es posible despreciar el derrape que se produce en las llantas cuando el RM se mueve a pequeñas velocidades y aceleraciones. En este caso el derrapamiento longitudinal tiene una magnitud controlada. Sin embargo, el derrapamiento lateral solo puede ser despreciado si se considera, además de un movimiento lento, que el radio de giro del robot es extremadamente largo en comparación con la magnitud de la velocidad.

Es importante hacer énfasis que en el caso de robots móviles donde la conducción no depende de todas las llantas, el cual es el diseño más popular en ambientes comerciales, el fenómeno del derrapamiento es una propiedad inherente a su movimiento. Robots como estos se denominan skid-steered mobile robots (SSMR, por sus siglas en inglés). Otro tipo de robots, que se asemejan en construcción son los denominados robots de tipo diferencial. Es el tipo de locomoción más popular por su maniobrabilidad y sobre todo por su configuración de conducción simple. No obstante, una de sus desventajas está constituida por no tener una buena tracción y movilidad en terrenos ásperos. En el caso de los SSMR, la diferencia de la velocidad angular de las llantas

genera una rotación sobre el centro de masa del robot. Esta característica produce también una alta maniobrabilidad, pero a diferencia de los robots móviles diferenciales, tienen una mejor tracción en terrenos desconocidos.

### 4.3. Modelo dinámico del robot móvil SSMR

En esta sección, la descripción matemática de un SSMR que se mueve en una superficie plana se detalla. Para facilitar el análisis, primero se deriva el modelo cinemático y posteriormente por ecuaciones de Euler Lagrange se determina el modelo dinámico.

#### 4.3.1. Modelo cinemático

En el modelado del robot móvil, se consideran las siguientes restricciones

1. Se considera un vehículo móvil con movimiento solo en un plano horizontal.
2. La velocidad del vehículo siempre está por debajo de los 10 km/h
3. El contacto de las llantas y la superficie se efectúa en un solo punto geométrico (la deformación de las llantas es despreciada).
4. Las fuerzas verticales que actúan sobre el robot móvil dependen únicamente del peso del vehículo.
5. La fuerza de fricción viscosa es despreciable.

Para considerar el modelo cinemático del SSMR se sitúa dentro de un marco de referencia dado por un marco inercial denominado con las coordenadas  $(X_g, Y_g, Z_g)$  como se muestra en la figura 4-1. El marco de referencia local está denotado por  $(x_l, y_l, z_l)$  y se asigna al robot en su centro de masa (COM). De acuerdo a la figura 4-1, las coordenadas del COM en el marco inercial son representadas como  $COM = (X, Y, Z)$ . Puesto que solo se asume un movimiento planar, la coordenada en  $Z$  es constante. El robot móvil se mueve con una velocidad lineal expresada en el marco local como  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & 0 \end{bmatrix}^T$  y rota con una velocidad angular definida como  $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}^T$ . Si  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} X & Y & \theta \end{bmatrix}^T$  es el vector que describe las coordenadas

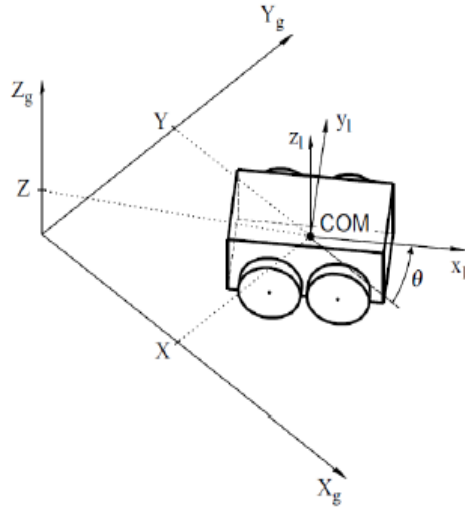


Figura 4-1: SMRR en el marco de referencia inercial [2]

generalizadas del robot móvil, es decir, la posición del COM,  $X$  e  $Y$  y su orientación  $\theta$ . Tomando la derivada de  $\mathbf{q}$ , obtenemos el vector de velocidades generalizadas  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ . De la figura (4-2), es posible apreciar que las variables  $\dot{X}$  e  $\dot{Y}$  están relacionadas con las coordenadas del vector de velocidad local como

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La ecuación anterior no impone ninguna restricción en el movimiento planar del SSMR puesto que describe solo la cinemática de cuerpo libre. Por lo tanto, para este caso de robots móviles es necesario analizar la relación entre la velocidad de las llantas y las velocidades locales. Suponga que las llantas del SSMR rotan a una velocidad angular  $\omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$ , y esta velocidad puede ser vista como una entrada de control. Por simplicidad, la anchura de la llanta no se toma en cuenta y se asume en contacto con el plano en un punto  $P_i$  ilustrada en la figura 4-3. En contraste con la mayoría de los robots móviles que se estudian, la velocidad lateral de los SSMR  $v_{iy}$ , es generalmente diferente de cero. Esta propiedad es inherente a la estructura mecánica de

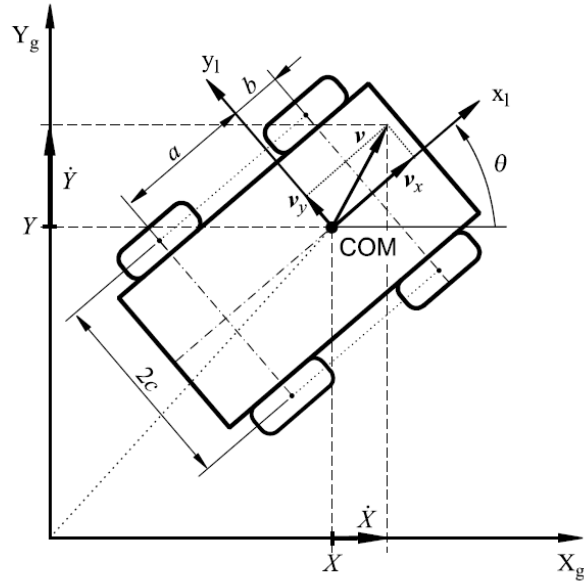


Figura 4-2: Diagrama de cuerpo libre [2]

los SSMR que produce un derrape lateral si el vehículo cambia su orientación. Por lo tanto, las llantas se sitúan tangentes a el plano solo si  $\omega = 0$ , es decir el SSMR se mueve solo en línea recta.

En la descripción solo se considera el deslizamiento lateral, el derrape longitudinal se considera nulo, es decir, la siguiente relación se cumple

$$v_{ix} = r_i \omega_i \quad (4.2)$$

donde  $v_{ix}$  es la componente longitudinal del vector de velocidad  $\mathbf{v}_i$  de la llanta  $i$  expresada en el marco de referencia local y  $r_i$  denota el radio de la llanta.

Para desarrollar el modelo cinemático, es necesario tomar en consideración todas las llantas en conjunto. En la figura 4-4, los vectores  $\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_{ix} & d_{iy} \end{bmatrix}^T$  and  $\mathbf{d}_C = \begin{bmatrix} d_{Cx} & d_{Cy} \end{bmatrix}^T$  son definidos con respecto al marco local desde el centro de rotación instantáneo (ICR, instantaneous center of rotation). Consecuentemente, basados en la geometría de la figura 4-4, la siguiente

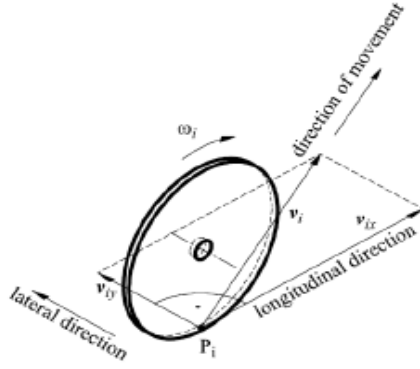


Figura 4-3: Velocidades presentes en una llanta del robot

expresión puede ser deducida

$$\frac{\|\mathbf{v}_i\|}{\|\mathbf{d}_i\|} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{d}_C\|} = |\omega| \quad (4.3)$$

Definiendo las coordenadas del ICR en el marco local como

$$ICR = (x_{ICR}, y_{ICR}) = (-d_{xC}, -d_{yC}) \quad (4.4)$$

la ecuación (4.3) puede reescribirse en componentes como

$$\frac{v_x}{y_{ICR}} = -\frac{v_y}{x_{ICR}} = \omega \quad (4.5)$$

De la figura 4-4, es claro que el vector de coordenadas  $\mathbf{d}_i$  satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} d_{1y} &= d_{2y} = d_{Cy} + c \\ d_{3y} &= d_{4y} = d_{Cy} + c \\ d_{1x} &= d_{4x} = d_{Cx} + c \\ d_{2x} &= d_{3x} = d_{Cx} + c \end{aligned} \quad (4.6)$$

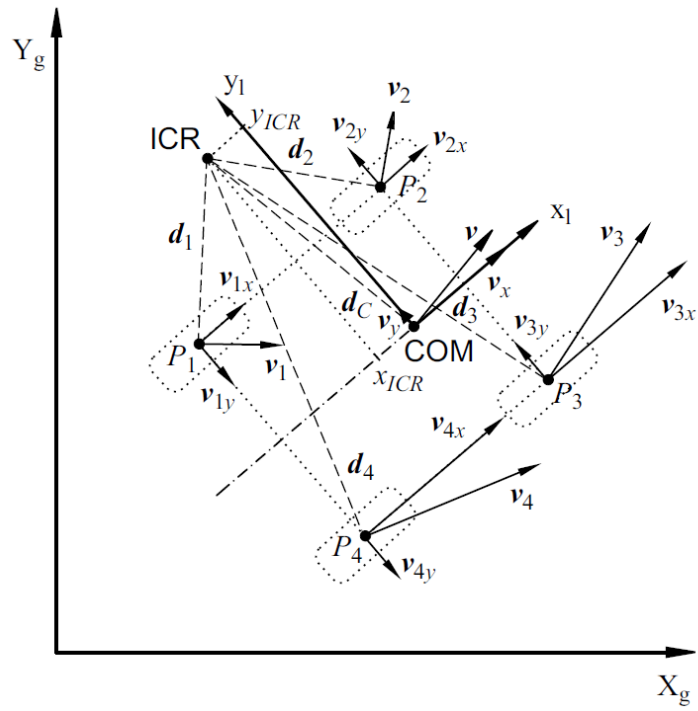


Figura 4-4: Velocidades en las llantas

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros del robot descritos en la figura 4-2. Después de combinar ecuaciones (4.5) y (4.6), las siguientes relaciones entre la velocidad de las llantas puede ser obtenida

$$\begin{aligned}
 v_L &= v_{1x} = v_{2x} \\
 v_R &= v_{3x} = v_{4x} \\
 v_F &= v_{2y} = v_{3y} \\
 v_B &= v_{1y} = v_{4y}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde  $v_L$  y  $v_R$  denotan las coordenadas longitudinales de la velocidad de las llantas izquierda y derecha respectivamente, y  $v_F$  and  $v_B$  son las coordenadas laterales de las velocidades de las llantas delanteras y traseras. Usando las ecuaciones (4.5)-(4.7) es posible obtener la siguiente transformación entre las velocidades de las llantas y las velocidades del robot:

$$\begin{bmatrix} v_L \\ v_R \\ v_F \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \\ 0 & -x_{ICR} + b \\ 0 & -x_{ICR} - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \omega \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Con respecto a las ecuaciones (4.2) y (4.7), asumiendo que el radio efectivo  $r_i = r$  para cada llanta, es posible obtener la siguiente relación

$$\boldsymbol{\omega}_\omega = \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} v_L \\ v_R \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

donde  $\omega_L$  y  $\omega_R$  son las velocidades angulares de las llantas de lado izquierdo y derecho, respectivamente.

Combinando las ecuaciones (4.8) y (4.9), la siguiente aproximación entre las velocidades angulares de las llantas y las velocidades del robot pueden ser obtenidas

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} v_x \\ \omega \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{\omega_L + \omega_R}{2} \\ \frac{-\omega_L + \omega_R}{2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

donde  $\boldsymbol{\eta}$  es una nueva entrada de control introducida a un nivel cinemático.

De la ecuación anterior es claro que, teóricamente, el par de velocidades  $\omega_L$  y  $\omega_R$  pueden ser consideradas como una entrada de control a nivel cinemático de igual forma que las velocidades  $v_x$  y  $\omega$ . No obstante, la exactitud de la ecuación (4.10) depende en gran medida del derrape longitudinal, y es válida solo si este fenómeno es no dominante.

Para completar el modelo cinemático del SSMR, la siguiente restricción en velocidades es introducida en [62]. De la ecuación (4.5) se puede considerar

$$v_y + x_{ICR}\dot{\theta} = 0$$

La ecuación anterior, es una restricción no holonómica que puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & x_{ICR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A(q)\dot{q} = 0 \quad (4.11)$$

en la ecuación anterior, la ecuación (4.1) ha sido usada. Puesto que el vector de velocidades generalizadas  $\dot{q}$  siempre se encuentra en el espacio nulo de  $A$ , es posible escribir

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (4.12)$$

donde

$$S^\top(q)A^\top(q) = 0 \quad (4.13)$$

y

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & x_{ICR}\sin\theta \\ \sin\theta & -x_{ICR}\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Es importante notar que puesto que  $\dim(\eta) = 2 < \dim(q) = 3$ , la ecuación (4.12) describe la cinemática de un robot SSMR subactuado. Adicionalmente, constituye un sistema con restricciones no holonómicas.



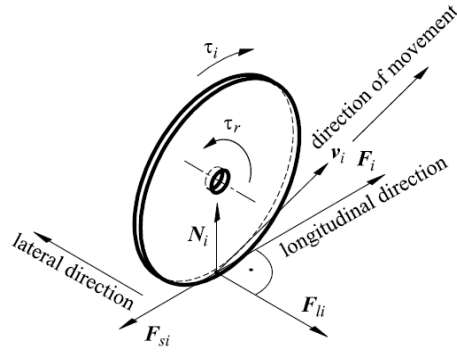


Figura 4-5: Fuerzas que actuan en cada una de las llantas del SSMR

### 4.3.2. Modelo Dinámico

El problema primordial de los SSMR esta constituido por el deslizamiento lateral cuando el robot se encuentra girando [63], [64],[65]. En primera instancia, las fuerzas que interactúan en cada llanta se describen en la figura 4-5. Las fuerzas activas  $F_i$  y las fuerzas de reacción  $N_i$  están relacionadas con el torque y la fuerza de gravedad. Es claro que  $F_i$  es linealmente dependiente de la entrada de control en la llanta denominada  $\tau_i$ , descrita por

$$F_i = \frac{\tau_i}{r} \quad (4.15)$$

Se asume que las fuerzas verticales  $N_i$  actúan de la superficie a la llanta. Considerando las cuatro llantas (figura 4-5) y despreciando algunas otras propiedades adicionales de éstas, las siguientes condiciones de equilibrio pueden ser encontradas

$$\begin{aligned} N_1 a &= N_2 b \\ N_4 a &= N_3 b \\ N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &= mg \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $m$  denota la masa del vehículo y  $g$  la aceleración de la gravedad. Por simetría a lo largo del eje longitudinal, se puede obtener

$$\begin{aligned} N_1 &= N_4 = \frac{b}{2(a+b)}mg \\ N_2 &= N_3 = \frac{a}{2(a+b)}mg \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si el vector de fuerzas  $F_{si}$  es resultante de la resistencia del momento de giro  $\tau_{ri}$ , y el vector  $F_{li}$  denota la fuerza reactiva lateral. Estas fuerzas pueden ser relacionadas con las fuerzas de fricción y pueden ser modeladas como la suma de la fricción de Coulomb y de la fricción viscosa, es decir,

$$F_f(\sigma) = \mu_c N \overline{\text{sign}}(\sigma) + \mu_v \sigma \quad (4.18)$$

donde  $\sigma$  denota la velocidad lineal,  $N$  es la fuerza perpendicular a la superficie,  $\mu_c$  y  $\mu_v$  son los coeficientes de Coulomb y la fricción viscosa. La ecuación anterior puede ser simplificada para cada fuerza como

$$\begin{aligned} F_{li} &= \mu_{lc_i} mg \overline{\text{sign}}(v_{yi}) \\ F_{si} &= \mu_{sc_i} mg \overline{\text{sign}}(v_{xi}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $\mu_{lc_i}$  and  $\mu_{sc_i}$  denotan los coeficientes de fuerza lateral y longitudinal, respectivamente. Usando las ecuaciones de Euler Lagrange y considerando la energía potencial igual a cero, puesto que el robot se mueve en un plano, el Lagrangiano queda escrito como

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) \quad (4.20)$$

La energía cinética del SSRM esta dada por

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^\top \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (4.21)$$

donde  $I$  es el momento de inercia del robot sobre su centro de masa. Puesto que  $\mathbf{v}^\top \mathbf{v} = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$ , la ecuación (4.21), puede describirse en la siguiente forma

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (4.22)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = M\ddot{q} \quad (4.23)$$

la matriz  $M$  está definida como

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

De acuerdo a la figura (4-5), las siguientes fuerzas resultantes en el marco inercial pueden ser calculadas

$$F_{rx}(\dot{q}) = \cos \theta \sum_{i=1}^4 F_{si}(v_{xi}) - \sin \theta \sum_{i=1}^4 F_{li}(v_{yi}) \quad (4.25)$$

$$F_{ry}(\dot{q}) = \sin \theta \sum_{i=1}^4 F_{si}(v_{xi}) - \cos \theta \sum_{i=1}^4 F_{li}(v_{yi}) \quad (4.26)$$

El momento calculado alrededor del centro de masa  $M_r$  puede ser obtenido como

$$M_r(\dot{q}) = -a \sum_{i=1,4} F_{li}(v_{yi}) + b \sum_{i=2,3} F_{li}(v_{yi}) + c \left[ \sum_{i=1,2} F_{si}(v_{xi}) + \sum_{i=3,4} F_{si}(v_{xi}) \right] \quad (4.27)$$

Definiendo el vector generalizado de fuerzas resistivas, se obtiene

$$R(\dot{q}) = \left[ F_{rx}(\dot{q}) \quad F_{ry}(\dot{q}) \quad M_r(\dot{q}) \right]^T \quad (4.28)$$

Las fuerzas generadas por los actuadores que permiten el movimiento del robot son expresadas de la siguiente manera

$$F_x = \cos \theta \sum_{i=1}^4 F_i \quad (4.29)$$

$$F_y = \sin \theta \sum_{i=1}^4 F_i \quad (4.30)$$

Las fuerzas activas alrededor del centro de masa son calculadas como

$$M_{COM} = c(-F_1 - F_2 + F_3 + F_4) \quad (4.31)$$

En consecuencia, el vector  $\mathbf{F}$  de fuerzas activas tiene la siguiente forma

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & M_{COM} \end{bmatrix}^\top \quad (4.32)$$

Usando las ecuaciones (4.15), (4.29)-(4.31) y asumiendo que el radio de cada llanta es el mismo, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta \sum_{i=1}^4 \tau_i \\ \sin \theta \sum_{i=1}^4 \tau_i \\ c(-\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Simplificando la notación, una nueva señal de entrada  $\tau$  queda definida como

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 + \tau_2 \\ \tau_3 + \tau_4 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

donde  $\tau_L$  y  $\tau_R$  denotan los torques producidos por las llantas en la parte izquierda y derecha respectivamente. Combinando ecuaciones (4.33) y (4.34), obtenemos

$$\mathbf{F} = B(q) \tau \quad (4.35)$$

donde  $B$  es la entrada de la matriz de transformación definida como

$$B(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Usando las ecuaciones (4.23), (4.28) y (4.35), el siguiente sistema dinámico es obtenido

$$M(q) \ddot{q} + R(\dot{q}) = B(q) \tau \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) describe la dinámica de un cuerpo libre y no incluye las restricciones no holonómicas definidas en la ecuación (4.11) Por lo tanto, por medio de multiplicadores de Lagrange,  $\lambda$ , estas restricciones son introducidas de acuerdo al resultado propuesto en [62], es decir,

$$M(q)\ddot{q} + R(\dot{q}) = B(q)\tau + A^\top(q)\lambda \quad (4.38)$$

#### 4.4. Estrategia de control para el SSMR

Partiendo del resultado propuesto en [62], el modelo dinámico descrito en la ecuación (4.38) es manipulado para obtener una estructura matemática en la que las técnicas de control desarrolladas en las velocidades admisibles generalizadas pueden expresarse como

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (4.39)$$

con  $\eta$  y  $S(q)$  definidas en (4.10) y (4.14), respectivamente. Diferenciando la ecuación (4.39) y eliminando  $\lambda$  de la ecuación (4.38) se obtiene (en las siguientes ecuaciones se omiten las dependencias)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S\eta \\ \dot{\eta} &= (S^\top MS)^{-1} S^\top (B\tau - M\dot{S}\eta - R) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si elegimos la señal de control  $\tau$  como

$$\tau = (S^\top B)^{-1} (S^\top MSu + S^\top M\dot{S}\eta + S^\top R) \quad (4.41)$$

donde  $u$  es la nueva entrada de control, con la ley de control definida en (4.41), el sistema (4.40) se convierte en un sistema cinématico de segundo orden definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \cos\theta\eta_1 - \sin\theta\eta_2 \\ \dot{Y} &= \sin\theta\eta_1 + \cos\theta\eta_2 \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{d_0}\eta_2 \\ \dot{\eta}_1 &= u_1 \\ \dot{\eta}_2 &= u_2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde  $d_0$  es la coordenada en  $x$  del centro de giro instantaneo, es decir,  $x_{ICR}$ .

#### 4.4.1. Linearización completa por retroalimentación de estados

Escogiendo una entrada particular, la ecuación (4.42) puede ser completamente linealizable por retroalimentación de estados. Escogiendo como salida la posición de un punto  $D$  colocado en el eje  $x$  a una distancia  $d_0$  del origen del marco de referencia local del vehículo, es decir, definiendo  $z$  como la salida virtual

$$z = \begin{bmatrix} X + d_0 \cos \theta \\ Y + d_0 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

y aplicando una extensión dinámica en la entrada de control  $u_1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_1 &= \xi \\ \dot{\xi} &= v_1 \\ u_2 &= v_2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las nuevas entradas de control y diferenciando la ecuación (4.43) hasta que la entrada de control aparezca explícitamente obtenemos

$$\ddot{z} = \alpha(q, \eta)v + \beta(q, \eta) \quad (4.45)$$

Las definiciones para las matrices  $\alpha$  y  $\beta$  son

$$\alpha(q, \eta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{1}{d_0} \eta_1 \sin \theta \\ \sin \theta & -\frac{1}{d_0} \eta_1 \cos \theta \end{bmatrix}$$

y

$$\beta(q, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{2}{d_0} \xi \eta_2 \sin \theta - \frac{1}{d_0^2} \eta_1 \eta_2^2 \cos \theta \\ -\frac{2}{d_0} \xi \eta_2 \cos \theta - \frac{1}{d_0^2} \eta_1 \eta_2^2 \sin \theta \end{bmatrix}$$

Es posible corroborar que el determinante de la matriz  $\alpha(q, \eta)$  esta dado por

$$\det [\alpha(q, \eta)] = -\frac{1}{d_0} \eta_1$$

es decir, que la matriz  $\alpha(q, \eta)$  es no singular si y solo si, la velocidad longitudinal del SSMR es diferente de cero. Si se cumple esta propiedad, es posible escoger una ley de control para  $v$ , tal que, el sistema en (4.45) se convierta en una cadena de tres integradores, es decir, si se selecciona  $v$  como

$$v = \alpha^{-1}(q, \eta) [r - \beta(q, \eta)] \quad (4.46)$$

se obtiene el siguiente sistema

$$\ddot{z} = r \quad (4.47)$$

es decir, dos cadenas desacopladas de tres integradores.

#### 4.4.2. Estrategia de control tipo backstepping basado en modos deslizantes de segundo orden

Es claro, que el sistema descrito en la ecuación (4.47) corresponde a un sistema de tercer orden, definiendo  $x_1 = z$ , por la técnica de variables de estado, el sistema en (4.47) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= r + \rho(x, t) \end{aligned} \quad (4.48)$$

en donde  $\rho(x, t)$  puede constituir una incertidumbre paramétrica o una dinámica no modelada. En este caso, el sistema (4.48) puede ser abordado mediante dos estrategias de control desarrolladas en este trabajo. Para adecuar la estructura del sistema (4.48) es necesario introducir un control por backstepping. Aplicando el método de Euler para obtener una versión discreta

de (4.48) se obtiene

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + hx_2(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + hx_3(k) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) + hr + h\rho(x, t)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

donde, para este caso,  $h$  constituye el periodo de muestreo. Si  $x_3(k)$  se toma como una pseudo entrada de control, y definiendo  $x_1^*(k)$  como la trayectoria deseada, el error de seguimiento está dado por la siguiente ecuación

$$e(k) = x_1(k) - x_1^*(k) \tag{4.50}$$

Si denotamos la entrada del pseudocontrol como

$$u_{sc}(k) = -g_1 \text{sign}(e(k)) - g_2 \text{sign}(v(k)) \tag{4.51}$$

donde,  $v(k)$  es obtenida por medio del diferenciador discreto por el algoritmo de super-twisting descrito en la ecuación (2.36). Finalmente, la entrada de control final (backstepping) se obtiene generando una segunda señal de error definida como

$$e_b(k) = x_3(k) - u_{sc}(k) \tag{4.52}$$

con la misma estructura presentada en la ecuación (4.51), se obtiene la ley final de control para  $r(k)$ , es decir,

$$r(k) = -\bar{g}_1 \text{sign}(e_b(k)) - \bar{g}_2 \text{sign}(de_b(k)) \tag{4.53}$$

En la ecuación anterior,  $de_b(k)$  es obtenida por medio de la versión discreta del algoritmo de super-twisting.

#### **4.4.3. Estrategia de control por el algoritmo de super-twisting en tiempo discreto**

El sistema descrito en la ecuación (4.47) tiene la estructura del sistema objetivo dado en la ecuación (2.51), por lo tanto es posible aplicar la ley de control descrita en (2.54) y (2.56). Si la



trayectoria de referencia esta descrita por  $x_1^*(k)$  y se considera que la primera y segunda derivada de la señal de referencia se encuentran acotadas, lo cual constituye un requerimiento adecuado para el sistema de referencia y para todo sistema mecánico incluyendo aquellos destinados al trabajo en robótica móvil, se tiene que  $\|\ddot{x}_1^*(k)\| \leq \varkappa$ , con  $\varkappa$  un escalar positivo. De esta forma el sistema de referencia puede ser descrito de forma similar a la descripción del sistema dinámico (4.48). por lo tanto el error de seguimiento se describe por la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}
 e_1(k+1) &= e_1(k) + he_2(k) \\
 e_2(k+1) &= e_2(k) + he_3(k) \\
 e_3(k+1) &= e_3(k) + h(r - r^*) + h\rho(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

donde  $r^*(k)$  es la segunda derivada de la trayectoria de referencia. Por lo tanto definiendo, para el caso de control por modos deslizantes acorde a las ecuaciones (2.54) y (2.56) las variables  $\eta$  y  $\xi$  son definidas como

$$\begin{aligned}
 \eta &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix}^\top \\
 \xi &= e_3
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

y la ley de control queda definida con las ecuaciones (2.54), (2.56) y (2.57).

## Capítulo 5

# Resultados Numéricos

En este capítulo los algoritmos de estimación y control son implementados en simulación numérica. Dado que se presentan diferentes resultados tanto en estimación como en control, y puesto que la tesis se orienta a sistemas mecánicos, algunos ejemplos adicionales al SSMR son estudiados. Estos ejemplos satisfacen la estructura general de un robot dada por la ecuación

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + d = \tau \quad (5.1)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $M(q)$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz asociada a las fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $g$  es el vector de fuerzas gravitacionales,  $d$  es un término de incertidumbre en el modelo y  $\tau$  es el vector de control producido por los actuadores del sistema. Es posible observar que la ecuación (5.1) tiene la misma estructura dinámica que la ecuación (4.38) salvo por las restricciones de velocidad que fueron adicionadas al SSMR. De esta manera podemos corroborar la aplicabilidad de los algoritmos discretos desarrollados en diferentes sistemas dinámicos.

## 5.1. Resultados numéricos: estimación y control por algoritmos discretos basados en modos deslizantes

### 5.1.1. Resultados de convergencia del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto

Para la simulación del algoritmo de super-twisting discreto de la ecuación (2.26), los parámetros escogidos fueron  $\rho_1 = 0,9$ ,  $\rho_2 = 0,3$ , y las ganancias  $k_1 = 10,1$  y  $k_2 = 10$ , el periodo de muestreo fue seleccionado como  $\tau = 0,01$ . La figura (5-1) muestra como el primer estado ( $x_1$ ), converge a una vecindad con centro en el origen. Una oscilación de alta frecuencia cuando el estado  $x_2$  tiende a cero se puede observar en la figura (5-2). Las gráficas de la ecuación de Lyapunov convergen de igual forma a una vecindad cercana a cero (5-3). Seleccionando una matriz positiva definida  $Q = 3 \times 10^{-3} * I_{2 \times 2}$  y  $\varrho = 0,81$ , la matriz  $\tilde{A}$  definida en el Lema 1 se describe como

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,9994 & 0,001 \\ 0 & 0,3331 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

La matriz solución  $P$  para la LMI en (2.34) es

$$P = \begin{bmatrix} 2,4337 & 1,87 \times 10^{-5} \\ * & 0,0034 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

con esta solución seleccionando  $\bar{\Lambda} = I_{2 \times 2}$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} 0,1688 & -0,6762 \\ * & 8,78 \times 10^4 \end{bmatrix}$ . Con estos valores, la cota descrita en (2.30) es  $r = 0,0038$ , este valor indica que las trayectorias del algoritmo de super-twisting estarán confinadas a una región cuyo valor no puede ser mayor que  $r$ . Esto se demuestra al evaluar la evolución de la función de Lyapunov para el sistema descrito la cual se muestra en la Figura 5-3.

### 5.1.2. AST como diferenciador discreto

Tomando el modelo descrito en la ecuación (4.48) y la salida disponible (4.43), se aplicó el AST como derivador discreto. Los parámetros para el robot móvil son los siguientes de acuerdo

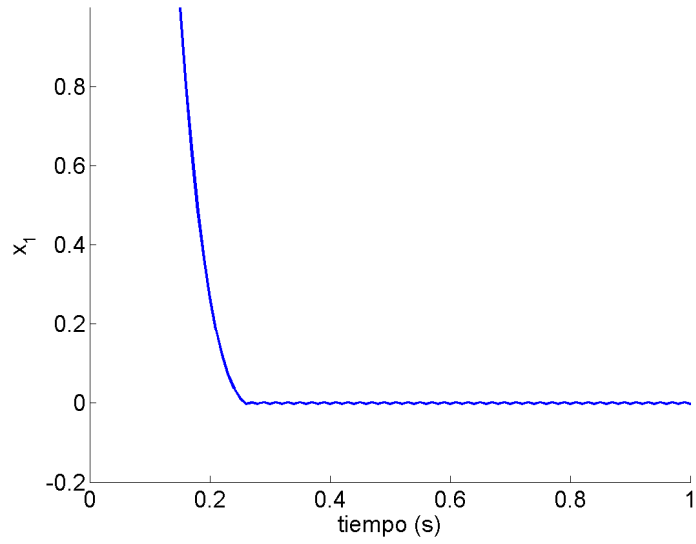


Figura 5-1: Trayectorias del primer estado del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto

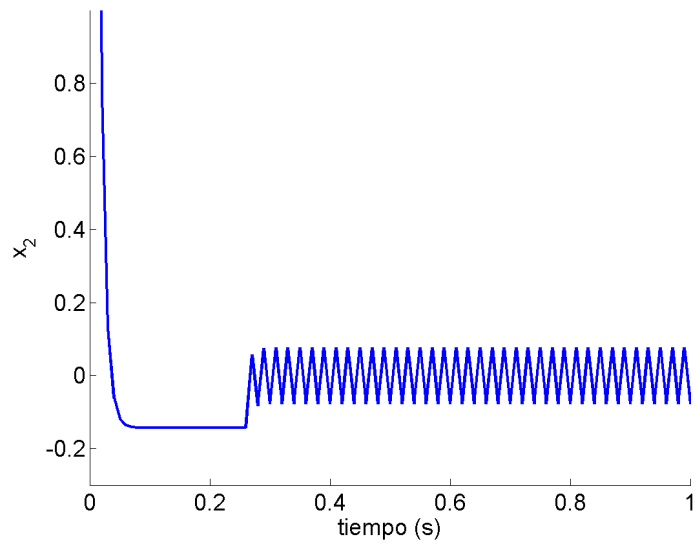


Figura 5-2: Trayectorias del segundo estado del algoritmo de super-twisting en tiempo discreto

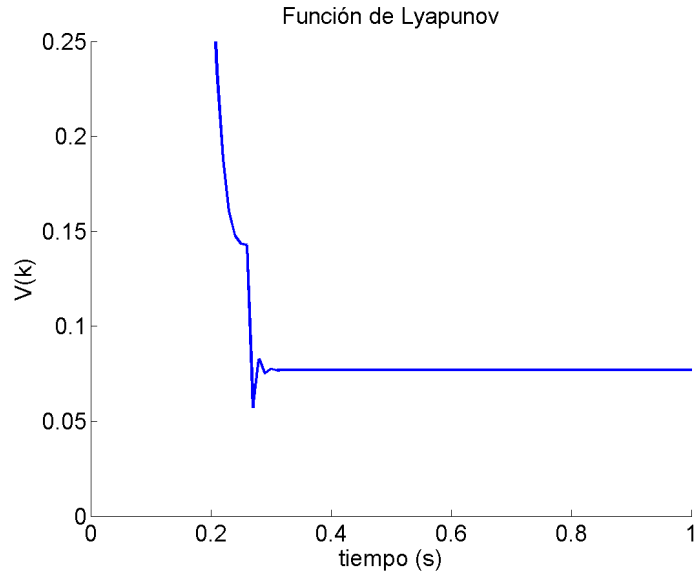


Figura 5-3: Trayectorias de la función de Lyapunov

a la figura (4-2) y siguiendo los resultados presentados en [62]: las dimensiones del robot móvil son  $a = 0,37$  m,  $b = 0,55$  m,  $2t = 0,63$ , mientras que el radio de la llanta es de  $r = 0,2$  m. La masa del vehículo es de  $11,6$  kg y tiene una inercia de  $I = 20$  kgm<sup>2</sup>. Para la salida (4.43),  $d_0 = 0.7$  m y la señal de referencia escogida fue  $X^* = 2 \sin 0,5t$  y  $Y^* = 1 \cos 0,5t$ . Para esta simulación se considera una señal de control constituida como en [62], es decir,

$$r_i = -k_{a_i} (\ddot{z}_{d_i} - \ddot{z}_i) - k_{v_i} (\dot{z}_{d_i} - \dot{z}_i) - k_{p_i} (z_{d_i} - z_i)$$

la cual constituye un control por retroalimentación de estados. En las figuras (5-4) y (5-5) podemos observar la comparación de la respuesta del diferenciador discreto basado en el AST al ser aplicado al SSMR tomando como salida disponible la ecuación (4.45), el diferenciador logra estimar las derivadas de las trayectorias en un corto periodo de tiempo. En la figura (5-6) la trayectoria seguida por el SSMR en el plano  $XY$  es graficada, posteriormente la comparación de las velocidades obtenidas por el diferenciador discreto y las reales son graficadas.

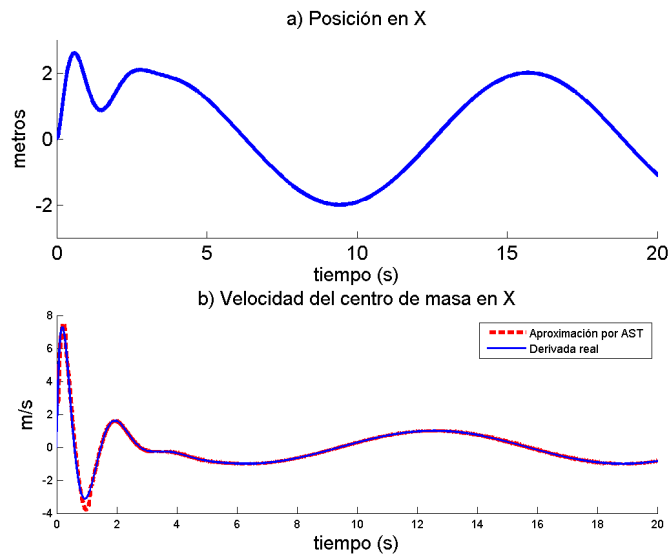


Figura 5-4: Estimación de la derivada del primer componente de la salida disponible dada por la ecuación (4.43). a) Posición medida, y b) Velocidad estimada

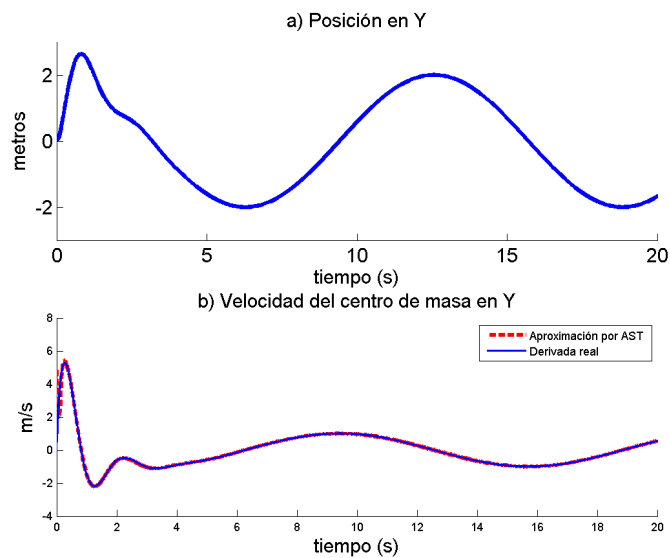


Figura 5-5: Estimación de la derivada del primer componente de la salida disponible dada por la ecuación (4.43). a) Posición medida, y b) Velocidad estimada

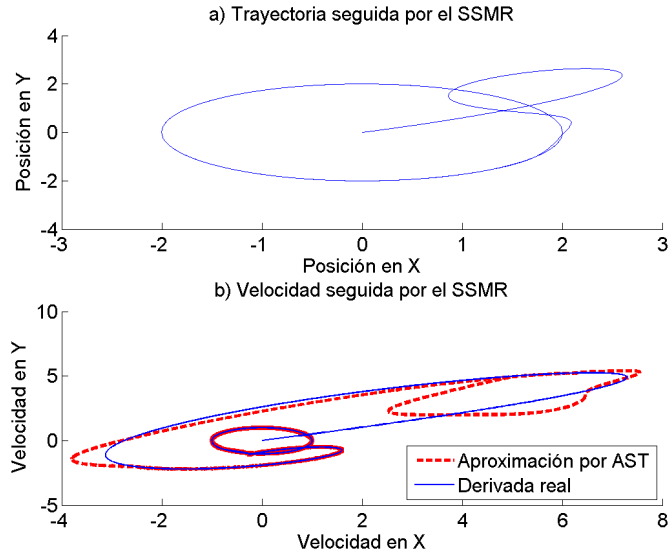


Figura 5-6: Comparación de la trayectoria seguida por el SSMR de acuerdo a la ecuación (4.43). a) Trayectoria medida, y b) Velocidad real del SSMR contra velocidad estimada

### 5.1.3. Estimador discreto de estados basado en el AST: péndulo simple

Debido a que el modelo del SSMR no corresponde totalmente a la estructura de un sistema de segundo orden, y para probar que los algoritmos desarrollados de estimación y control son aplicables a cualquier tipo de sistemas de segundo orden, algunos de los resultados de simulación que se presentan en esta tesis corresponden a la estimación y control de sistemas mecánicos simples para realizar la prueba. Para el caso del estimador de estado para sistemas no lineales discretos basado en el AST, se escogió la estructura del péndulo simple, cuya forma matemática se describe a continuación.

Considere la imagen de la figura (5-7), la cual corresponde a la descripción física de un péndulo simple, cuyo modelo se constituye por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 + \xi_t \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

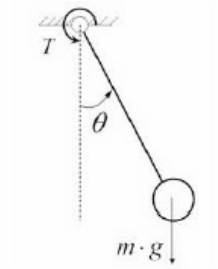


Figura 5-7: Péndulo simple implementado en las simulaciones

donde  $x_1 = \theta$  es el ángulo de oscilación,  $x_2 = \dot{\theta}$  es la velocidad angular,  $M$  es la masa del péndulo,  $g$  es la fuerza gravitacional,  $L$  es la longitud del péndulo,  $J$  es el brazo de inercia,  $V_s$  es el coeficiente de fricción viscosa del péndulo y  $\xi_t$  es una perturbación acotada. Para la estimación de estados del sistema descrito en (5.4) la señal de control fue definida como  $u = \sin(2\tau k) \cos(5\tau k)$ . Las ganancias del observador fueron escogidas como  $k_1 = 7,1$ ,  $k_2 = 12$ ,  $k_3 = 0,1$  y  $k_4 = 0,01$ . Se compararon los resultados con una estructura clásica de Luenberger descrita por las siguientes ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1) &= \hat{x}_1(k) + \tau l_1 e_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \tau \frac{1}{J} u_k - \tau \frac{mgl}{2J} \sin(x_1(k)) - \tau \frac{V_s}{J} x_2(k) + \tau l_2 e_1(k) \end{aligned} \quad (5.5)$$

con  $l_1 = 7,1$  y  $l_2 = 84$ . Los resultados numéricos para la estimación del primer estado correspondiente a la posición del péndulo se puede observar en la figura (5-8). La estimación del segundo estado se muestra en la figura (5-9). Esto demuestra como la versión discreta del AST con periodos de muestreo suficientemente pequeños (0.001 s) puede tener un comportamiento similar a su contraparte continua. En la figura (5-10), se presenta el índice de desempeño de los observadores definido como la norma  $l_2$  de los vectores de error  $e(k)$ . Es claro, que el observador discreto propuesto en esta tesis, comparado con el estimador de Luenberger descrito en la ecuación (5.5) obtiene un mayor acercamiento a las trayectorias del sistema real. La zona de convergencia del error de estimación puede ser calculada analíticamente con el resultado mostrado en el teorema 1. Seleccionando  $Q = 1 \times 10^{-7} I_{2 \times 2}$  y  $\rho = 0,9999$ , la solución de la LMI



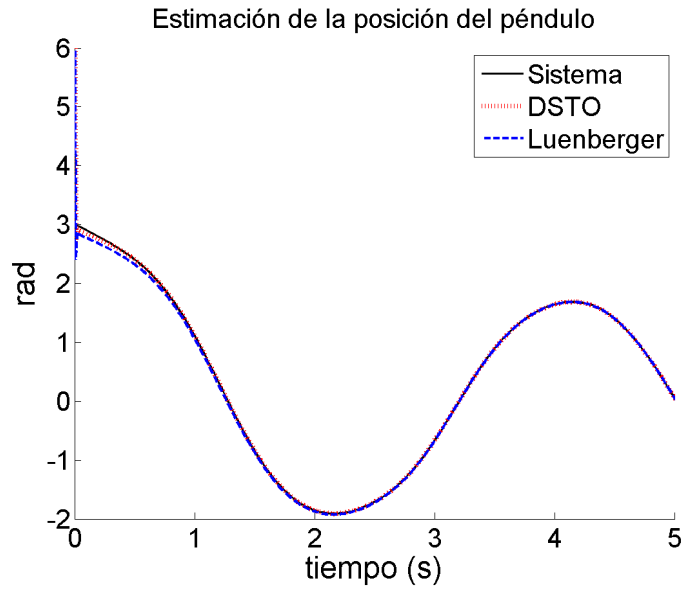


Figura 5-8: Comparación del proceso de estimación de la posición por medio del AST y de un estimador tipo Luenberger

en (2.40) es

$$P = \begin{bmatrix} 5,0191 & 0,0075 \\ 0,0075 & 0,001 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

y la región de convergencia queda definida por  $B_r = 0,0078$ . Obteniendo la norma euclídeana del vector de error, es posible corroborar este cálculo (Figura 5-10).

El estimador de estados para sistemas con  $n$  grados de libertad se omite para no extender el contenido de la tesis. No obstante, en [?], se presenta la aplicación del estimador de estados discreto basado en AST para caso vectorial, el estimador es aplicado a un robot bípedo de 7 grados de libertad, resultados de simulación y animaciones computacionales son presentes en ese artículo.

#### 5.1.4. Control por modos deslizantes de segundo orden: aplicación a un motor de corriente directa

Considere el siguiente sistema lineal invariante en tiempo que describe la dinámica de un motor de corriente directa, cuya dinámica esta dada por el siguiente par de ecuaciones diferenciales

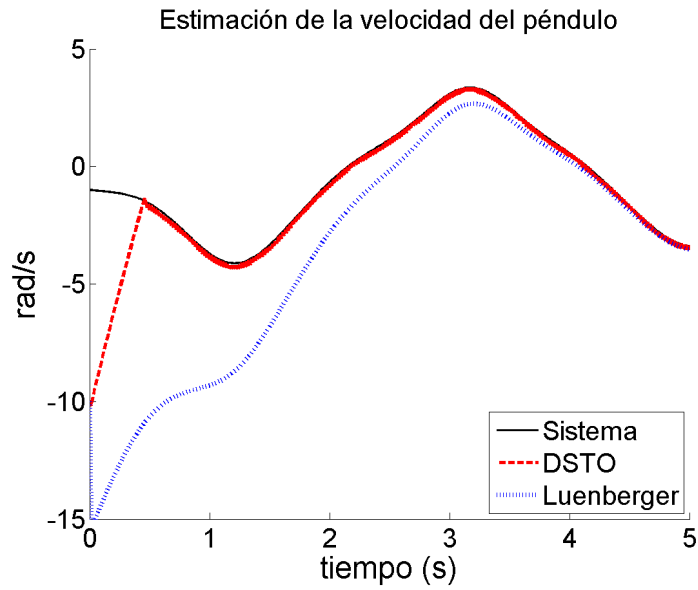


Figura 5-9: Estimación de la velocidad del péndulo simple

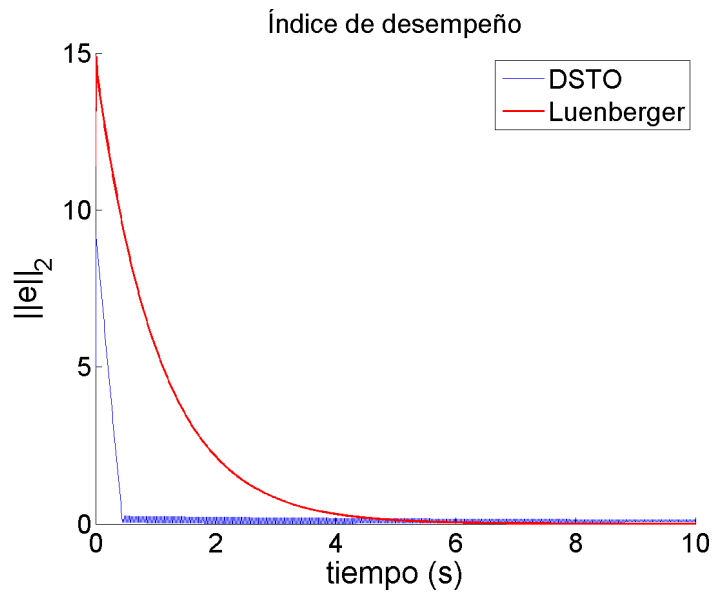


Figura 5-10: Índice de desempeño representado por la norma  $\|e_k\|_2$  para los dos estimadores de estados

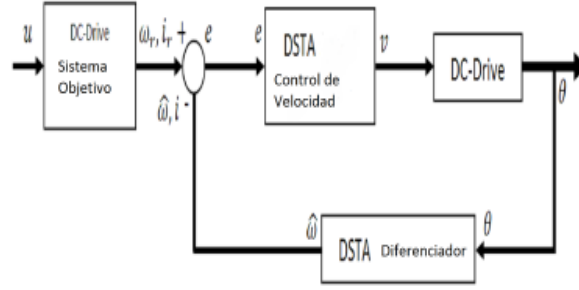


Figura 5-11: Diagrama a bloques del controlador propuesto

[66]

$$\begin{aligned}
 J \frac{d}{dt} \omega(t) &= -b\omega(t) + k_t i(t) - T_L(t) \\
 l \frac{d}{dt} i(t) &= -k_e \omega(t) - r i(t) + v(t)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde  $\omega(t)$  es la velocidad del eje del motor,  $i(t)$  es la corriente del motor,  $v(t)$  es el voltaje suministrado,  $T_L(t)$  es el torque,  $J$  y  $b$  corresponden a la inercia y al coeficiente de fricción viscosa del eje del motor,  $k_t$  es la constante de torque del motor,  $l$  y  $r$  definen la inductancia y resistencia de la armadura del motor y  $k_e$  es la constante de la fuerza electromagnética de retorno del motor. Todos los parámetros del motor se consideran inciertos. La estructura del sistema en lazo cerrado para el control del motor se describe en la figura (5-11). En el lazo de control se pueden identificar dos secciones importantes, primero se obtiene la velocidad del eje con el AST en tiempo discreto implementado como diferenciador. Posteriormente, se tiene un sistema objetivo a controlar con la estructura de (5.7). El objetivo del controlador es minimizar el error entre el sistema objetivo y el sistema real mostrado en el bloque. La estructura del error de acuerdo al esquema de la figura (5-11) es

$$\begin{aligned}
 e_\omega(k+1) &= e_\omega(k) + \tau \bar{J}^{-1} (-\bar{b}e_\omega(k) + \bar{k}_t i(k) - \bar{T}_L(k)) \\
 e_i(k+1) &= e_i(k) + \tau \bar{l}^{-1} (-\bar{k}_e e_\omega(k) - \bar{r}e_i(k) - v(k) + v^*(k))
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde  $v^*(k)$  denota una acción de control conocida aplicada al sistema objetivo y está definida como  $v^*(k) = 100 \sin(k\tau)$  con  $\tau$  el periodo de muestreo y  $v(k)$  es la acción de control calculada

bajo el esquema de control propuesto en esta tesis. Se tiene un sistema incierto pero acotado, es decir, existen constantes positivas  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $b^+$ ,  $b^-$ , tal que las siguientes desigualdades se cumplen

$$J^- \leq \bar{J} \leq J^+ \quad b^- \leq \bar{b} \leq b^+ \quad k_t^- \leq k_t \leq k_t^+ \\ l^- \leq \bar{l} \leq l^+ \quad r^- \leq r \leq r^+ \quad k_e^- \leq k_e \leq k_e^+$$

La dinámica del error, se encuentra en la forma normal descrita en (2.51), por lo tanto, es directo el procedimiento para usar el controlador por modos deslizantes descrito en el capítulo anterior (2.56). Si se aplica la acción final de control  $v(k)$  en la forma de (2.56) es necesario obtener la velocidad angular. Por lo tanto es necesario aplicar el AST como un diferenciador para estimar la velocidad angular  $\omega$  (Figura 5-11). En la mencionada figura se detalla la necesidad de utilizar un bloque en el lazo de retroalimentación correspondiente al AST como diferenciador. Los parámetros del sistema se describen a continuación

Notación	Valor	Unidades
$J$	0,011	Kgm <sup>2</sup>
$l$	$37 \times 10^{-3}$	$\mu\text{H}$
$b$	0,0005	Ns
$k_t$	0,37	NA <sup>-1</sup>
$r$	3,565	$\Omega$
$k_e$	0,37	srad <sup>-1</sup>
$v^*$	$100 \sin(k\tau)$	voltios

Se considera que el sistema a controlar contiene incertidumbres paramétricas. Solo ciertos valores límites son conocidos. Las ganancias para el controlador por AST son  $k_1 = 5000$  y  $k_2 = 2000$ . La ganancia de la superficie fue obtenida mediante la fórmula de Ackerman. Los resultados aplicando el controlador basado en el AST se muestran en la figura (5-12), las velocidades del sistema del motor y el sistema objetivo son cero cuando  $k = 0$ . Después de un periodo corto de tiempo (5 segundos aproximadamente), el sistema del motor realiza un seguimiento de las trayectorias del sistema de referencia. Las acciones de control y la dinámica de la superficie se pueden apreciar en la figura (5-13).

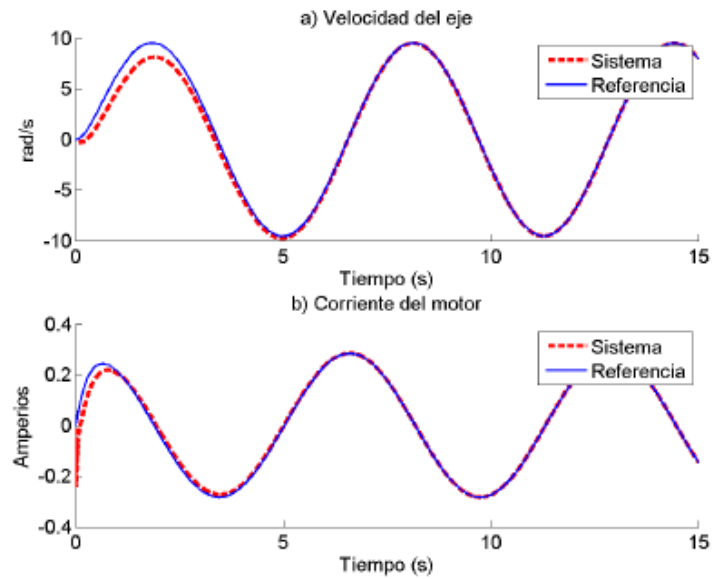


Figura 5-12: Control del motor de corriente directa por el AST como controlador a) Velocidad del eje del motor y b) Corriente en el motor

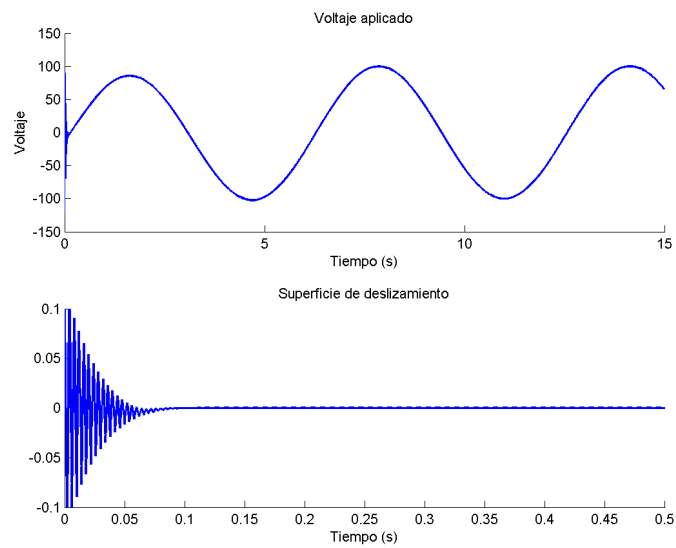


Figura 5-13: Índice de desempeño, a) Acción de control en (2.16) y b) Acercamiento a las trayectorias de la superficie de deslizamiento

## 5.2. Control por modos deslizantes de segundo orden: aplicación al SSMR

Como se mencionó en el capítulo anterior de esta tesis, para el control del SSMR, se plantearon dos estrategias, la primera basada en un control por *backstepping* basado en el algoritmo discreto de twisting, y la segunda basada en los resultados presentados en el Corolario 2 del capítulo 2.

### 5.2.1. Control por backstepping

Para el primer caso, la señal de control  $r(k)$ , para el sistema definido por

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + hx_2(k) \\x_2(k+1) &= x_2(k) + hx_3(k) \\x_3(k+1) &= x_3(k) + hr(k) + h\rho(x, t)\end{aligned}\tag{5.9}$$

producto de una serie de transformaciones descritas en el capítulo 3. La señal de control  $r(k)$  esta dada por las siguientes expresiones

$$r(k) = -k_1 \text{sign}(e_1(k)) - k_2 \text{sign}(\vartheta_1(k))$$

$$e_1(k) = x_3(k) - x_3^*(k)$$

$$x_3^*(k) = -k_3 \text{sign}(e_2(k)) - k_4 \text{sign}(\vartheta_2(k))$$

$$e_2(k) = x_1(k) - x_1^*(k)$$

donde las señales definidas por  $\vartheta_1(k)$  y  $\vartheta_2(k)$  son las estimaciones de las derivadas de los errores  $e_1$  y  $e_2$  obtenidas por medio del AST. En la figura (5-14) se observa la comparación entre las trayectorias de referencia del robot móvil. Es posible ver que después de unos instantes de tiempo (5 segundos), el SSMR llega a la trayectoria deseada y se mantiene en esta.

Para ver la mejoría del controlador propuesto en esta tesis con respecto al propuesto en

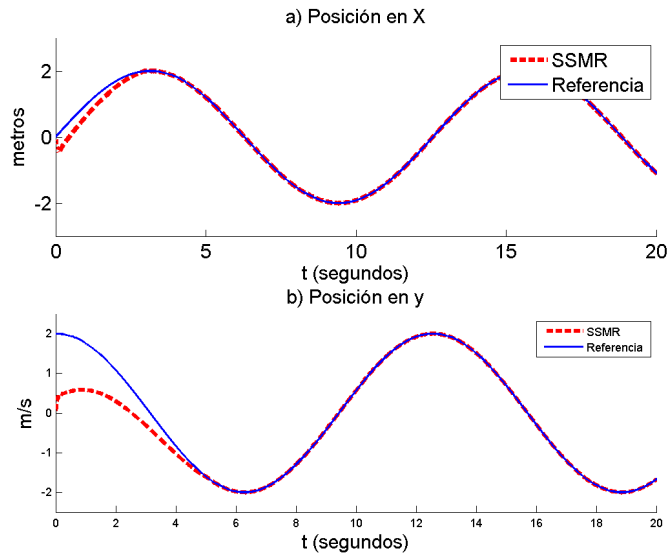


Figura 5-14: Seguimiento de trayectoria del SSMR en a) plano X y b) plano Y.

[62], el cual es un control lineal por retroalimentación de estados, en la figura (5-15) se hace una comparación de las trayectorias que seguiría el SSMR en el plano XY. El control por retroalimentación de estados fue implementado en simulación para probar el comportamiento del diferenciador discreto. Es posible apreciar como el control por MD obliga al robot a llegar a las trayectorias de referencia en menor tiempo que los resultados obtenidos con el control por retroalimentación de estados. El control por retroalimentación de estados produce un sobretiro, el cual no se produce en el controlador por MD. En la figura (5-16) se describe la norma euclideana del error de seguimiento. Solo se grafican algunos datos para obtener un acercamiento y apreciar como el error se mantiene cerca del origen. La magnitud restante de las oscilaciones del controlador es ocasionada por el *chattering* que produce todo control por modos deslizantes. Este tipo de oscilaciones son características de esta teoría y se pueden apreciar en la figura (5-17), donde, las dos señales de control para el giro de las llantas del lado izquierdo y derecho del SSMR son presentadas. 7

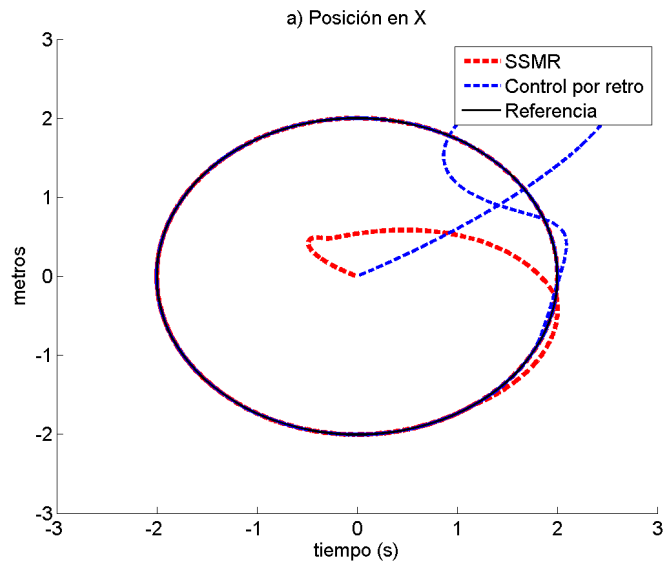


Figura 5-15: Trayectoria del robot móvil en el plano X-Y. En esta figura se muestra la señal de referencia junto con una comparación del control propuesto y un control clásico por retroalimentación de estados.

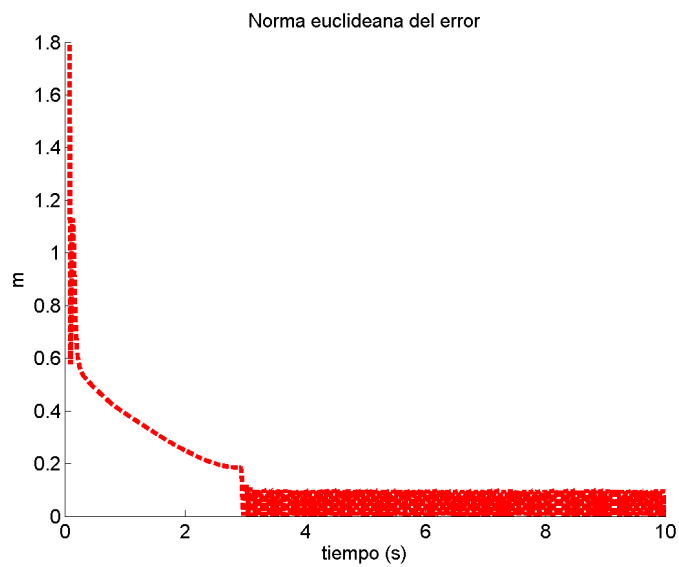


Figura 5-16: Norma Euclídeana del error de seguimiento



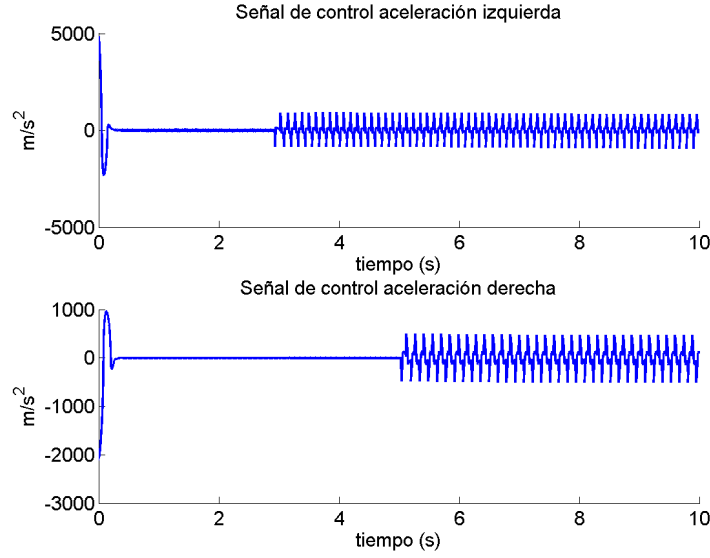


Figura 5-17: Señales de control para la aceleración de la rueda izquierda y derecha.

### 5.2.2. Control por super-twisting

Considerando que la dinámica del error queda definida por la ecuación (4.54) y las variables  $\eta$  y  $\xi$  definidas en (4.55) las matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  y  $A_{22}$  quedan definidas como

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \bar{A}_{11} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ \bar{A}_d \end{bmatrix}, \quad A_{21} = 0_{2 \times 4}, \quad A_{22} = 0_{2 \times 2}$$

La ganancia  $K$  definida en la ecuación (2.53) con los polos deseados ubicados en  $p = [-7,5 \quad -6,5 \quad -8,5 \quad -6,9]$  mediante la técnica clásica de asignación de polos está determinada por

$$K = \begin{bmatrix} -58,65 & 0 & -15,4 & 0 \\ 0 & -48,75 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

Las ganancias del AST como controlador fueron seleccionadas como  $k_1 = -300$  y  $k_2 = -200$ . En la figura (5-18) se muestra la comparación entre las trayectorias seguidas por el robot móvil en

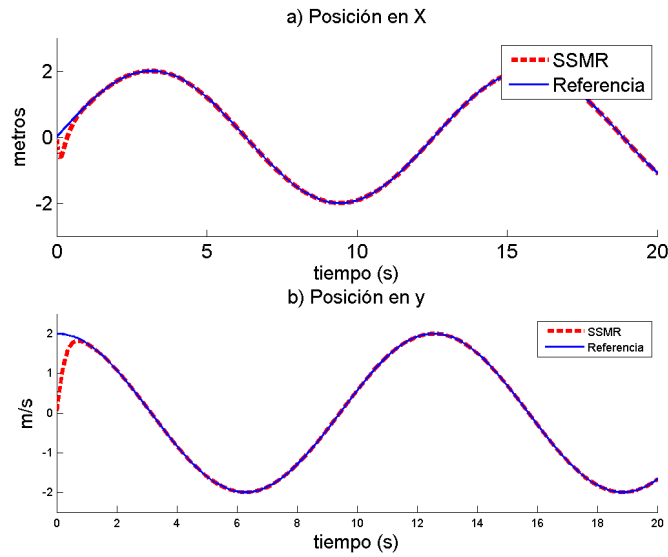


Figura 5-18: Seguimiento de trayectoria del SSMR en a) plano X y b) plano Y.

los planos X y Y, y la señal de referencia. Es posible apreciar que en los primeros 3 segundos de simulación, el SSMR provoca que los estados del robot móvil converjan a las trayectorias deseadas, las condiciones iniciales del SSMR fueron  $(0, 0, 0)$ . En comparación con el control por retroalimentación de estados, la respuesta obtenida por la propuesta planteada en esta tesis presenta un menor sobretiro.

En comparación con el control obtenido por los algoritmos twisting, super-twisting en tiempo discreto el tiempo de convergencia a la trayectoria deseada también es menor con esta ley de control. En la figura (5-19) se pueden visualizar las trayectorias seguidas por el SSMR en el plano fase. Nuevamente se aprecia una mejor convergencia del SSMR a las trayectorias deseadas con la propuesta planteada en la tesis. La norma euclídeana del error se visualiza en la figura (5-20), donde se corrobora la convergencia del SSMR a la señal de referencia. La segunda gráfica corresponde a la superficie de deslizamiento, la cual fue estabilizada por la técnica de asignación de polos. Una vez que la superficie converge, el error de seguimiento converge. Finalmente en las graficas que se encuentran en la figura (5-21), las señales de control se visualizan.

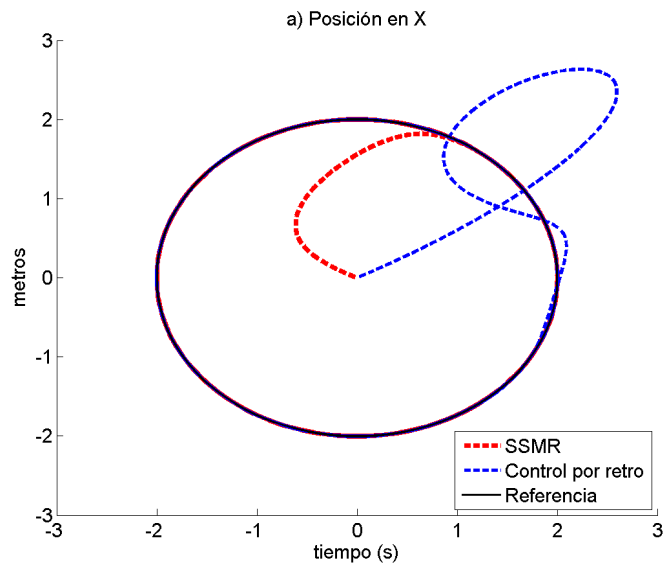


Figura 5-19: Trayectoria del robot móvil en el plano X-Y. En esta figura se muestra la señal de referencia junto con una comparación del control propuesto y un control clásico por retroalimentación de estados.

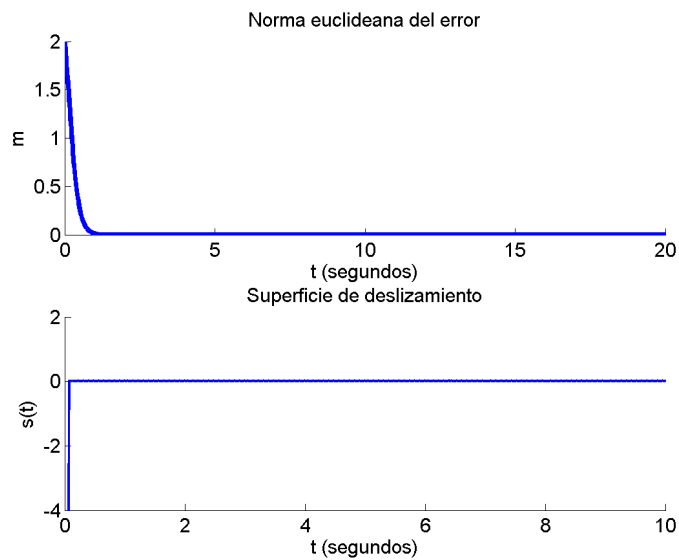


Figura 5-20: a) Norma euclídeana del error y b) Superficie de deslizamiento

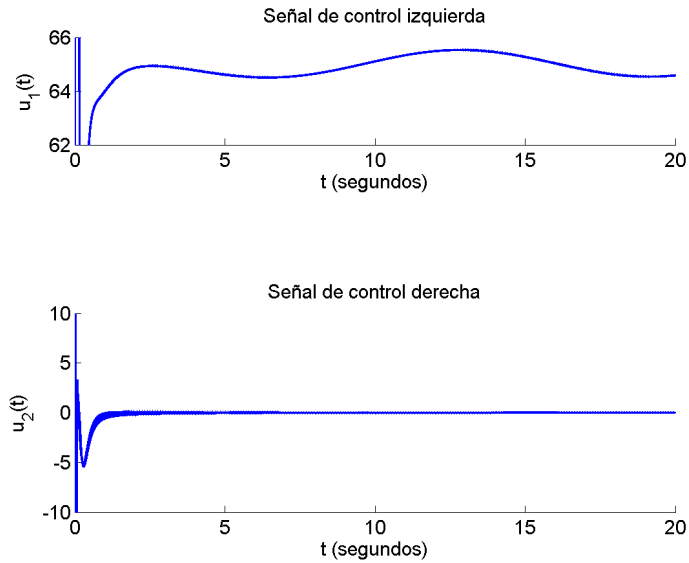


Figura 5-21: Señales de control de la velocidad angular requerida por el SSMR, a) Velocidad llantas lado izquierdo, b) Velocidad llantas lado derecho

### 5.3. Resultados numéricos: identificación, estimación y control por redes neuronales recurrentes y modos deslizantes

El oscilador de Lorentz está descrito por las siguientes ecuaciones en diferencias

$$x_1(k+1) = (1 + \alpha\beta)x_1(k) - \beta x_1(k)x_2(k) + b_1 u_1(k) \quad (5.10)$$

$$x_2(k+1) = (1 - \beta)x_2(k) + \beta x_1(k) + b_2 u_2(k)$$

Para propósitos de simulación, los parámetros del oscilador fueron escogidos como

$$\alpha = 0,895 \quad \beta = 0,898 \quad b_1 = 0,1 \quad b_2 = 0,1 \quad (5.11)$$

El identificador de estados fue probado en el oscilador de Lorentz, un sistema discreto altamente no lineal que puede mostrar las ventajas de usar una Red Neuronal como identificador de funciones. Los parámetros para el identificador propuesto en (3.12) fueron escogidos después de

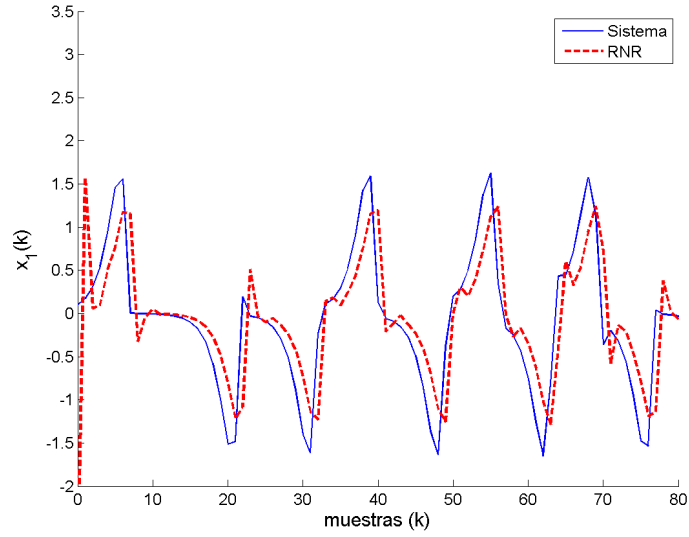


Figura 5-22: Proceso de identificación de  $x_1(k)$  con la RNR

una sesión de pruebas como

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0,042 & 0 \\ 0 & 0,052 \end{bmatrix} & W_1(0) &= 1,8 * \begin{bmatrix} 0,0759 & 0,7792 \\ 0,56880 & 0540 \end{bmatrix} \\
 P &= 20 * \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix} & \hat{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,5 \end{bmatrix} & \Lambda_{W_1} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 1,11 \end{bmatrix} & g_1 &= 100
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Los resultados de identificación de estados se muestran en las figuras (5-22) y (5-23). A pesar de las no linealidades presentes en el sistema (5.10), la RNR reproduce las trayectorias con un pequeño retardo producido por la naturaleza discreta de los sistemas estudiados, tanto para el primer estado como para el segundo estado. Como la matriz A, fue escogida tipo Hurwitz, la reproducción del sistema no lineal concentra en la dinámica de los pesos. El índice de desempeño para el identificador propuesto es escogido como la norma euclidiana del vector de error y se puede observar en la figura (5-24). La simulación numérica para el seguimiento de trayectoria

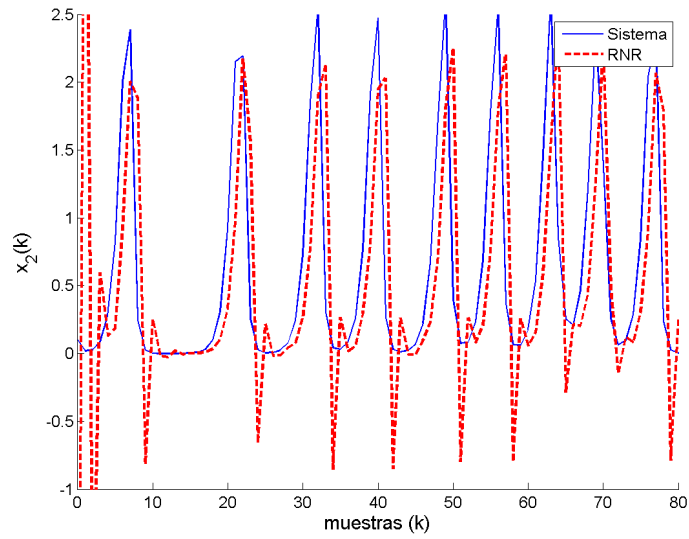


Figura 5-23: Proceso de identificación de  $x_2(k)$  con la RNR

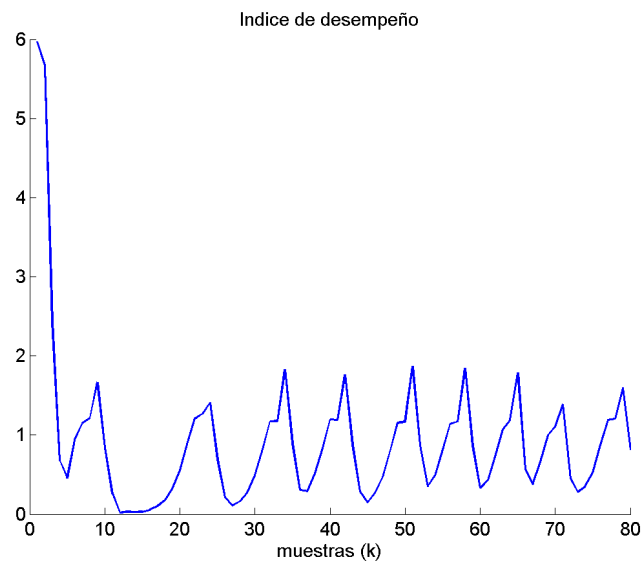


Figura 5-24: Índice de desempeño representado por  $\|\tilde{x}(k)\|_2$

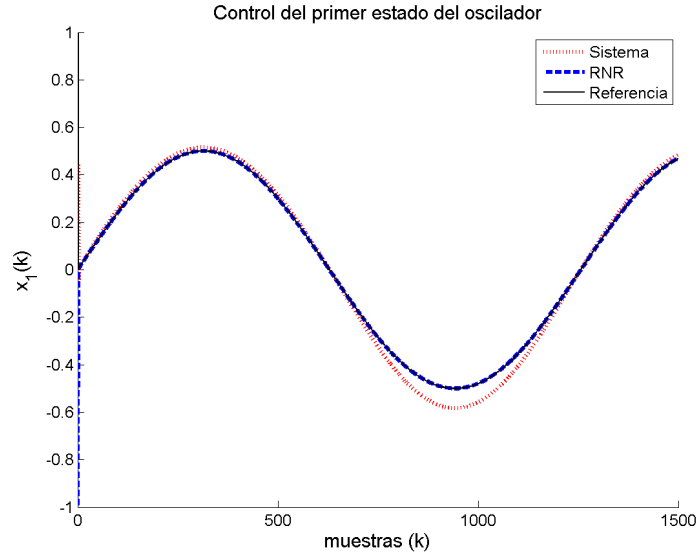


Figura 5-25: Seguimiento de trayectoria de  $x_1(k)$  a  $x_1^*(k)$  por la ley de control en (3.20)

fue diseñado con los siguientes elementos

$$G = \begin{bmatrix} 55 & 0 \\ 0 & 55 \end{bmatrix} \quad v = 0,9I_{n \times n}$$

el resultado de seguimiento de trayectoria se puede observar en las figuras (5-25) y (5-26), donde se realiza una comparación entre el sistema de referencia escogido como

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= h(k) \\ h(k)^\top &= \begin{bmatrix} \sin(5s_p k) & \sin(5s_p k) \end{bmatrix}, \quad s_p := 0,001 \end{aligned} \quad (5.13)$$

y el sistema del oscilador de Lorentz. El sistema no lineal reproduce las trayectorias del sistema objetivo en un pequeño número de pasos (3 pasos). Para apreciar en mejor forma la dinámica del identificador (3.12), el sistema no lineal en (5.10) y el sistema de referencia (5.13) un segundo grupo de figuras (5-27 y 5-28) son mostradas realizando un acercamiento a sus trayectorias. Finalmente, en la figura (5-29) la norma del error de seguimiento es mostrada.

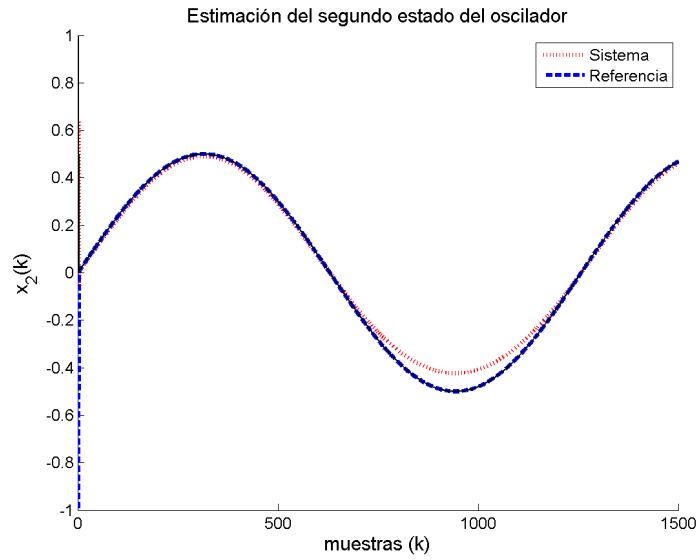


Figura 5-26: Seguimiento de trayectoria de  $x_2(k)$  a  $x_2^*(k)$  por la ley de control (3.20)

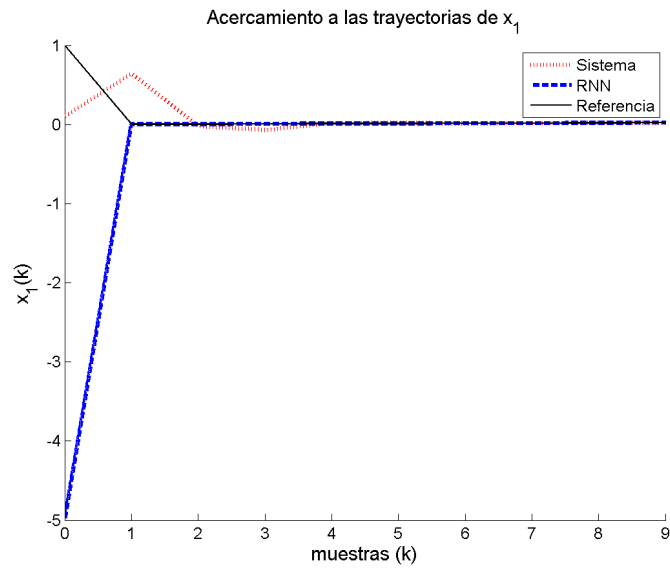


Figura 5-27: Acercamiento a las trayectorias de  $x_1^*(k)$  y  $x_1(k)$ .



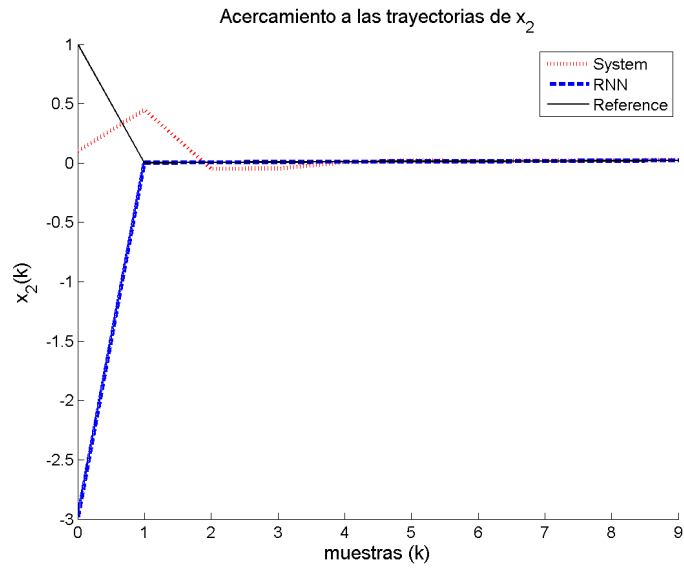


Figura 5-28: Acercamiento a las trayectorias de  $x_2(k)$  y  $x_2^*(k)$ .

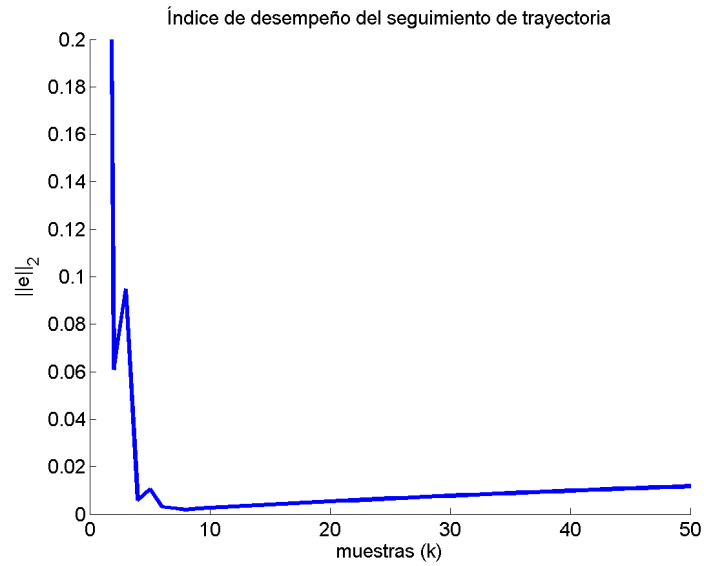


Figura 5-29: Índice de desempeño definido como  $\|\delta(k)\|_2$  para el seguimiento de trayectoria

## 5.4. Resultados de la estimación de estados por RNR y el AST

Para la simulación del estimador de estados descrito en la ecuación (3.30) los parámetros del observador fueron escogidos como  $\beta_1 = 5$  y  $\beta_2 = 2$ . Los resultados de la estimación de estados se describen en la figura 5-30, la primera gráfica representa la estimación del estado medible, es decir, la posición del péndulo. En estas simulaciones se realiza la comparación entre el observador (3.30) y el observador en (2.44) pero sin el conocimiento de la función  $f(\cdot, \cdot)$ . La primera gráfica, representa la estimación del estado medible, es decir, la posición del péndulo. Los dos observadores reproducen las trayectorias del sistema. En la estimación con el AST y la RNR juntos, se puede observar un retardo relacionado con el proceso de aprendizaje de la red. No obstante, en la segunda gráfica se puede apreciar como el comportamiento del observador por RNR más el AST es mejor que el del puro observador por AST.

Para apreciar mejor los resultados de los observadores, se realiza un acercamiento al proceso de estimación de la velocidad (figure 5-31). Es importante hacer notar, que para sistemas con grado relativo dos, principalmente en el caso de sistemas mecánicos, el AST puede ser aplicado como diferenciador para obtener el estimado de la velocidad. Mas aún, el diferenciador por el AST asume un desconocimiento total de la función  $f(\cdot, \cdot)$ , solo es necesario conocer una cota de la función. El sistema simulado descrito por la ecuación (5.4) es usado solo como un generador de datos para entrenar la RNR.

En los resultados anteriores referentes al AST como diferenciador, es suficiente con conocer la cota de la función  $f(\cdot, \cdot)$  de tal manera que la segunda ganancia del AST sea elegida como  $\beta_2 > f^+$ , con esta condición, el AST puede reproducir la dinámica de la función  $f(\cdot, \cdot)$ . Sin embargo, al incrementar  $\beta_2$  el efecto de *chattering* también se ve incrementado. En esta simulación, la condición  $\beta_2 > f^+$  no fue cumplida, de tal manera que se pudiera observar como la RNR puede mejorar el comportamiento del AST con pequeñas ganancias sin incrementar el *chattering*. Si se desea aplicar la estructura del puro AST como diferenciador, las ganancias se tienen que incrementar a 10 y 7 respectivamente. Finalmente, en la figura 5-32, el índice de desempeño para el AST y el AST con la RNR se compara.

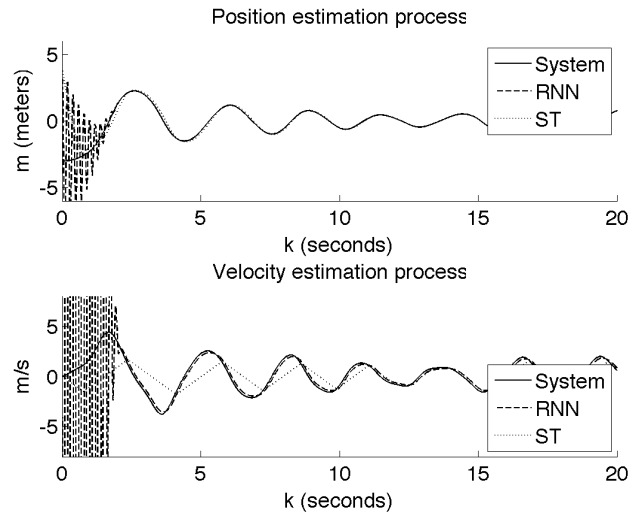


Figura 5-30: Estimación de estados del péndulo simple a) Estimación de la posición b) Estimación de la velocidad

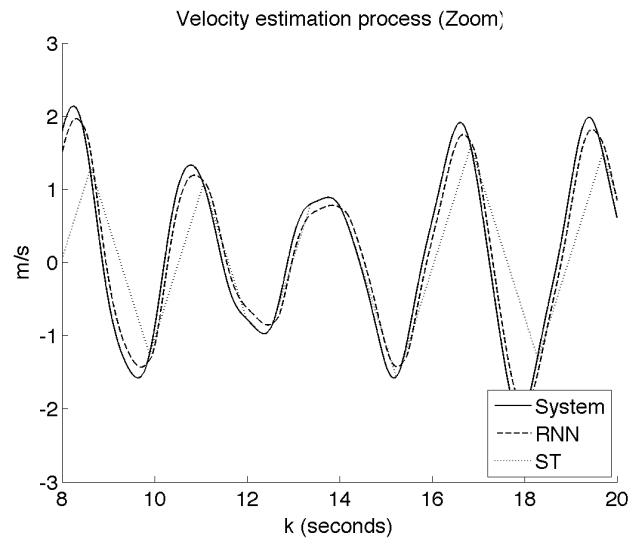


Figura 5-31: Acercamiento a las trayectorias de la velocidad

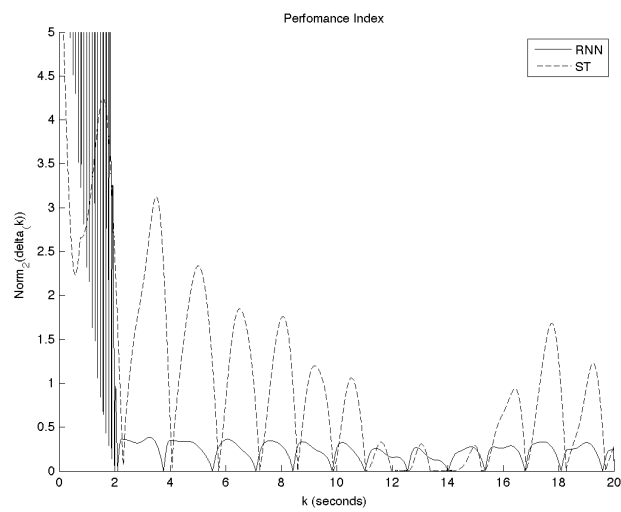


Figura 5-32: Índice de desempeño de la RNR con el AST y del puro AST como diferenciador

## Capítulo 6

# Resultados experimentales

Para validar los resultados teóricos obtenidos, se realizó la implementación de algunos de los algoritmos de control y estimación en un SSMR. En este capítulo, se describe a detalle el tipo de robot móvil utilizado para experimentación, la instrumentación del robot móvil (etapa de potencia, controlador digital) y el equipo de medición para obtener la posición del robot móvil.

### 6.1. Tipo de SSMR

La elección del SSMR como robot de prueba fue escogido por los escasos resultados que se tienen en el control de este tipo de locomoción móvil [62], además de la robustez que ofrecen en terrenos desconocidos y su facilidad de instrumentación [63], [65]. Para este fin se escogió el robot denominado *Dagu Wild Thumper 4WD all-Terrain Chassis* (DAGU), que se muestra en la figura (6-1). El robot DAGU cuenta con suspensión independiente para cada una de sus cuatro llantas con diámetro de 120 mm, lo que permite una tracción excepcional sobre terreno desconocido, su cuerpo está diseñado con aluminio de 2 mm de espesor con una rejilla que consta de agujeros de 4 mm, ideal para su instrumentación.

Las medidas del DAGU se describen en la figura (6-2), cuenta con motores de corriente directa con un motorreductor de 75:1 (Figuras. 6-3 y 6-4). Su suspensión permite que cada una de las llantas se encuentre en contacto con la superficie lo que genera una mayor tracción. Con una fuente de poder de 7.2 voltios, y el tipo de motorreductor 75:1 el DAGU puede alcanzar una velocidad máxima de 3 km/h y un torque de 11 kg-cm.



Figura 6-1: Robot móvil Daggu Wild Thumper 4WD all-Terrain

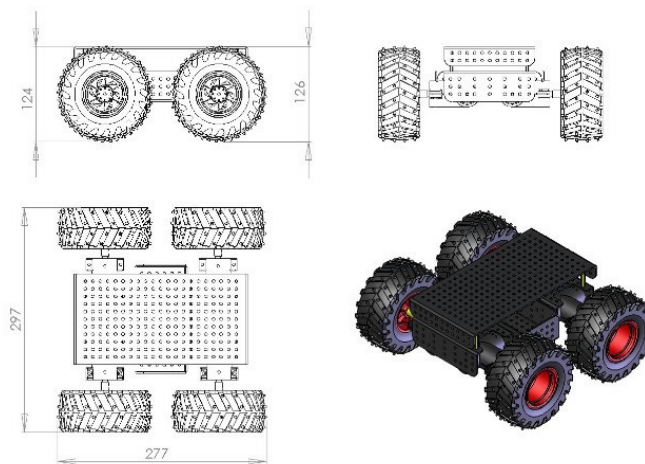


Figura 6-2: Medidas del DAGU. La escala que se muestra en la figura se da en milímetros



Figura 6-3: Motorreductor 75:1



Figura 6-4: Conexión de los motores y las llantas del DAGU

### 6.1.1. Instrumentación

La instrumentación del SSMR consta de la etapa de potencia, etapa de aislamiento y la etapa del controlador digital, dichas etapas son descritas a continuación

- Etapa de potencia.** La etapa de potencia se encuentra integrada principalmente por un circuito de puente h L298, este circuito puede alimentar dos motores de dc al mismo tiempo, adicional a ello puede proveer de una mayor cantidad de corriente a cada uno de los motores. El circuito empleado en esta etapa se diseño tomando como referencia la hoja de caractertisticas del mismo circuito L298 (Fig. 6-5).

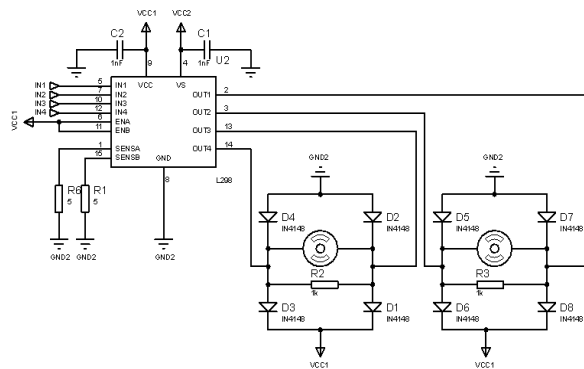


Figura 6-5: Diagrama electrónico de conexiones para la etapa de potencia.

Para simplificar la instrumentación de la etapa de potencia, se implementaron tarjetas que contienen el diagrama (Fig. 6-5) ya instrumentado.

- Aislamiento.** La etapa se encuentra está constituida por dispositivos optoelectrónicos, con los cuales se diseñó un circuito eléctrico que permite el aislamiento de una señal cuadrada. El siguiente diagrama describe la unidad básica electrónica del sistema de aislamiento, se deben considerar que cada salida de control hacia la etapa de potencia cuenta con esta unidad básica, necesitando así un total de dos unidades por cada uno de motores de cd empleados en el sistema robótico móvil (Figura 6-6). La unidad básica,

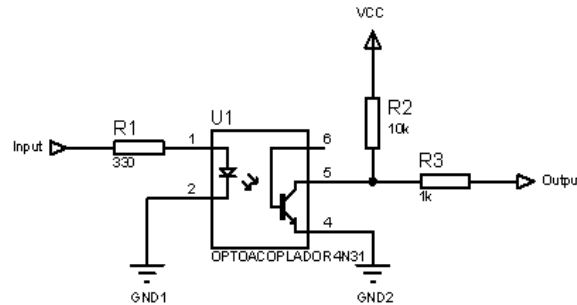


Figura 6-6: Diagrama electrónico de conexiones para etapa de aislamiento.

se encuentra integrada básicamente por tres elementos electrónicos pasivos y uno activo. En lo que respecta a los elementos pasivos se emplean resistencias de carbón, una de las cuales se encuentra a la entrada del elemento activo, con la finalidad de disminuir la corriente que es proporcionada al opto-acoplador, las dos resistencias restantes se ubican a la salida de nuestro elemento activo y forman parte de la configuración aplicada a nuestro optoacoplador. En lo que respecta al elemento activo, se tiene un optoacoplador 4N31, este dispositivo tiene un desempeño favorable en señales de baja frecuencia, en el caso del SSMR no se emplearán señales mayores a 10 KHz. Con la unidad básica anteriormente descrita, se logra aislar la etapa de potencia de la etapa de control y comunicaciones, eliminando así la posibilidad de ocasionar algún daño a la la tarjeta encarga del control digital.

- Etapa de control digital.** Para el control digital del SSMR se escogió una tarjeta de desarrollo CEREBOT MX7 cK, la cual es una tarjeta de desarrollo basada en el microcontrolador PIC32MX795FL, que es miembro de la familia de microcontroladores



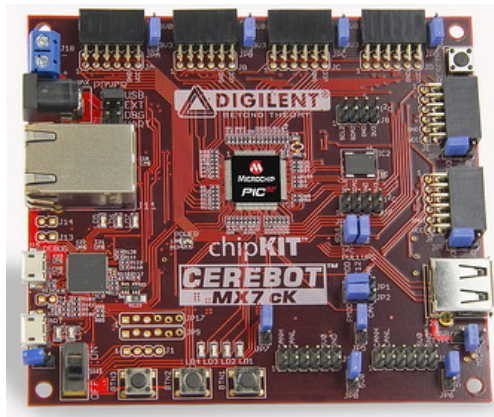


Figura 6-7: Tarjeta de control Cerebot MX7ck

de 32 bits PIC 32 de Microchip. La Cerebor MX7 cuenta con 52 pines de entrada-salida que soportan diferentes funciones de los periféricos con los que cuenta el PIC, como UART, SPI e I<sup>2</sup>C.

El SSMR con todos los elementos de instrumentación se puede apreciar en la figura (6-8).

### 6.1.2. Sensado de la posición

El sensado de la posición del SSMR fue realizado por un sistemam de visión que consta de 8 cámaras *Optitrack*, como las mostradas en la figura (6-9). Estas cámaras están caracterizadas por un sensor de imagen con una resolución de  $1664 \times 1088$  y una velocidad de captura de 30 a 360 cuadros por segundo. Consta de 20 LED's en un espectro de 850 nm en IR, con brillo ajustable. El software del sisterna realiza el etiquetado y segmentado de la imagen. Sus dimensiones son  $12,6 \times 12,6 \times 11$  (altura $\times$ ancho $\times$ profundidad, en centímetros). La figura (6-10) muestra como el SSMR es ubicado por el grupo de cámaras para posteriormente entregar el cálculo de su posición.

## 6.2. Diferenciador en tiempo real

El cálculo de la derivada con la señal real del SSMR fue tomada en ciertos instantes de muestreo de tal manera, que el tiempo entre cada muestra satisficiera el tiempo requerido para

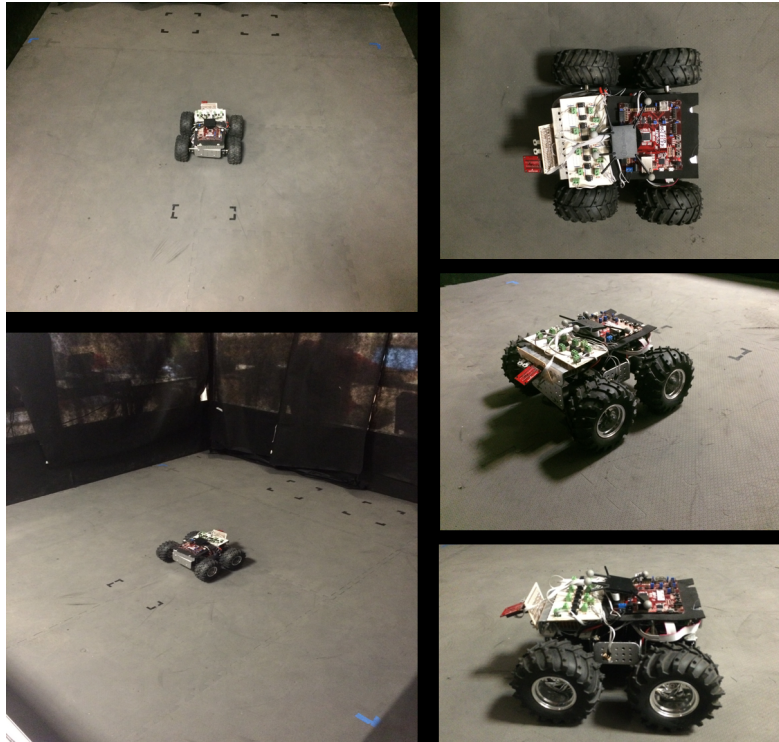


Figura 6-8: Imagen del SSMR totalmente instrumentado dentro del área de trabajo



Figura 6-9: Cámaras *Optitrack* usadas para el sensado de la posición

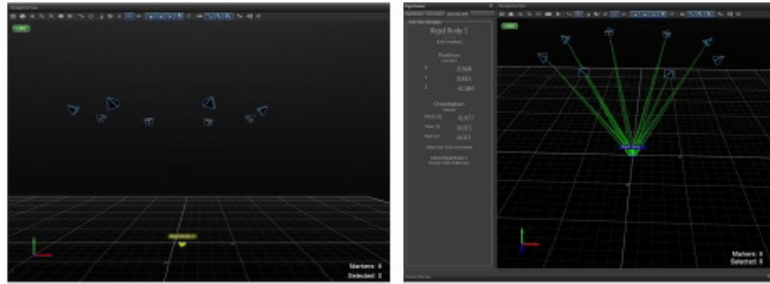


Figura 6-10: Sistema de obtención de la posición del SSMR

calcular la derivada de la trayectoria del SSMR. La figura (6-11) muestra la estimación de la posición en Y por el AST, se aprecia como el AST logra estimar la trayectoria real en el plano Y del SMRR, aproximadamente en el segundo 5.5, se observa un brinco por parte de la trayectoria del observador, este salto es posible disminuirlo si se aumentan las ganancias del AST. Para la estimación de la derivada en el plano Y, las ganancias del AST fueron fijadas como 0.7 y 0.5. Si se aumenta la ganancia del AST, es posible tener una mejor aproximación del primer estado, sin embargo, también aumenta la oscilación que se produce en la derivada obtenida.

El error de estimación se describe en la figura (6-12). Se puede notar que el error tiene una oscilación en valores que van de -0.1 a 0.15. En estado estable alcanza un error entre -0.04 a 0.04, salvo por el salto en la trayectoria mencionado anteriormente. En la figura (6-13) se presenta una comparación entre los resultados obtenidos en la estimación de la derivada por la técnica de diferencias finitas (Euler) y por el AST. Si se observa la magnitud del eje de las ordenadas, podemos notar que para la derivada obtenida por el método de Euler, éstas varían entre -5 y 5, lo cual es un error considerable en relación al valor que se obtiene aplicando el AST. La oscilación que se presenta en el segundo estado es el resultado de aplicar la técnica de MD en la obtención de la derivada.

Para el caso de la estimación de la derivada en el plano X, se tienen resultados similares a los obtenidos para el plano Y. En la figura (6-14), la línea azul continua es la trayectoria que el SSMR siguió en el plano X, mientras que la línea roja punteada corresponde a la estimación proporcionada por el AST. Nuevamente, en un tiempo inferior a 5 segundos, el AST logra estimar la trayectoria que siguió el SSMR. El AST fue implementado con las mismas ganancias

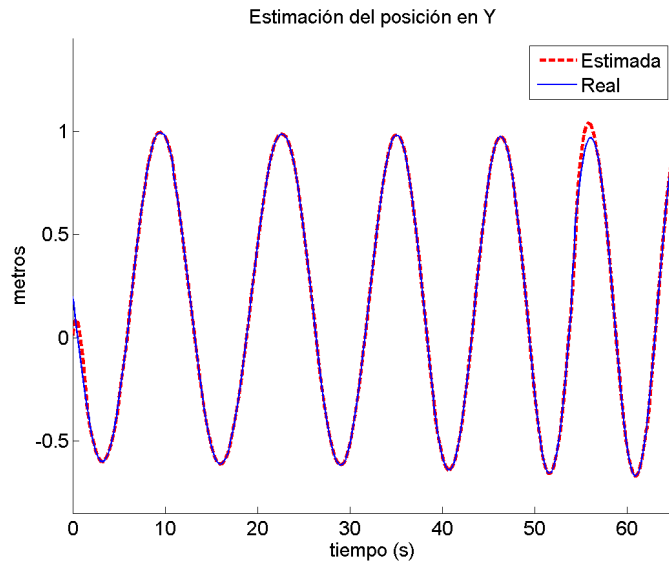


Figura 6-11: Estimación de la posición del SSMR en el plano Y

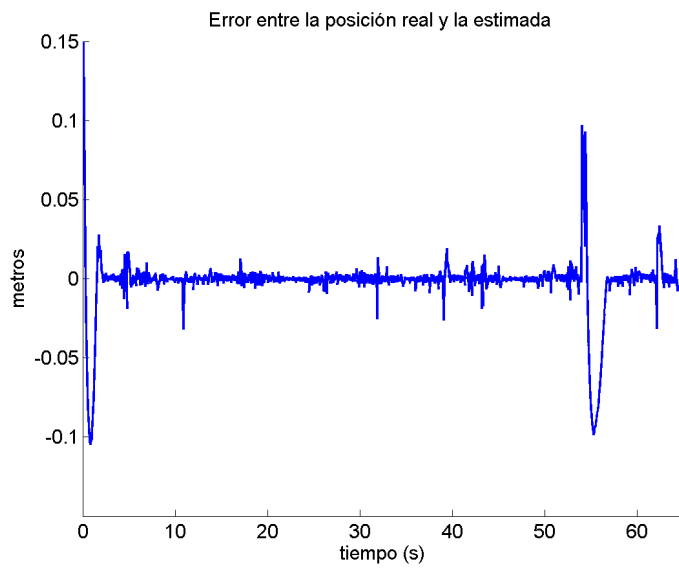


Figura 6-12: Error de estimación por el AST en la reconstrucción de la derivada

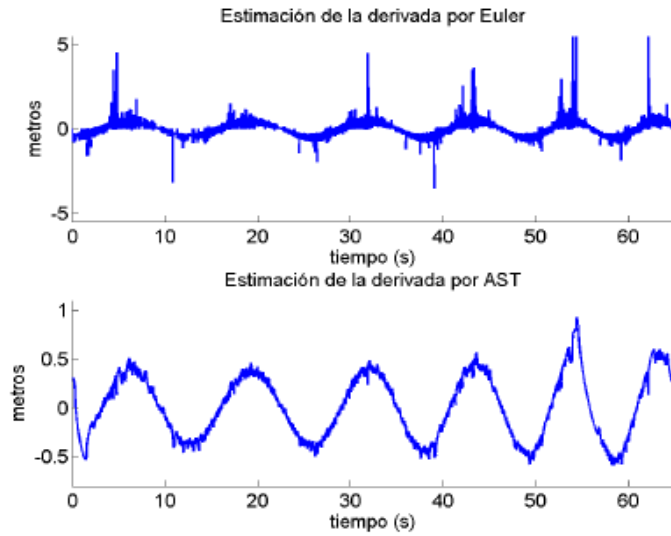


Figura 6-13: Comparación de los resultados obtenidos al calcular la derivada de la posición del robot en Y, a) por el método de Euler, b) por el AST

que el experimento anterior. El error de estimación se presenta en la figura (6-15), se mantiene en una banda delimitada por una bola con centro en el origen y radio de valor  $r \leq 0,05$ . La misma comparación entre la estimación de la derivada por el método de Euler y el del AST se presenta en la figura (6-16). Nuevamente los resultados más estables se obtienen cuando el AST es implementado.

Finalmente, en la figura (6-17), la trayectoria seguida por el SSMR es graficada. La línea azul continua representa la trayectoria real seguida por el robot móvil y la línea roja punteada representa la estimación proporcionada por el AST. Puesto que en la primera gráfica de la figura (6-17) se dificulta apreciar la trayectoria que sigue el SSMR conjuntamente con el AST, una segunda gráfica se presenta donde una sola vuelta del SSMR en el espacio de trabajo es graficada.

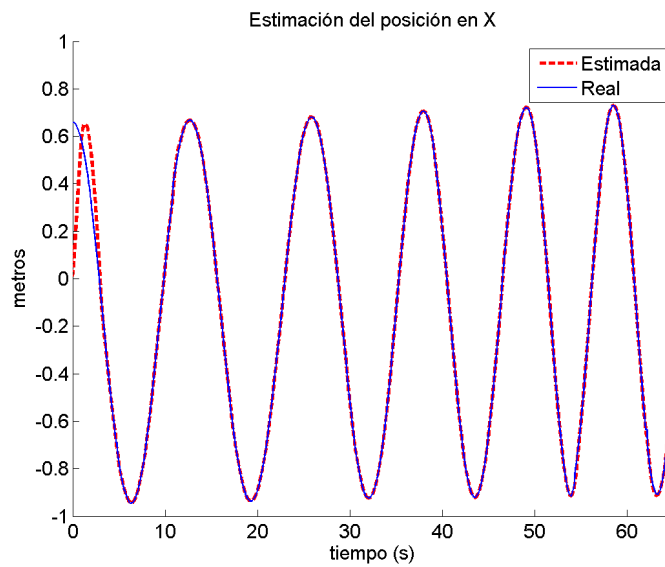


Figura 6-14: Estimación de la posición del SSMR en el plano X

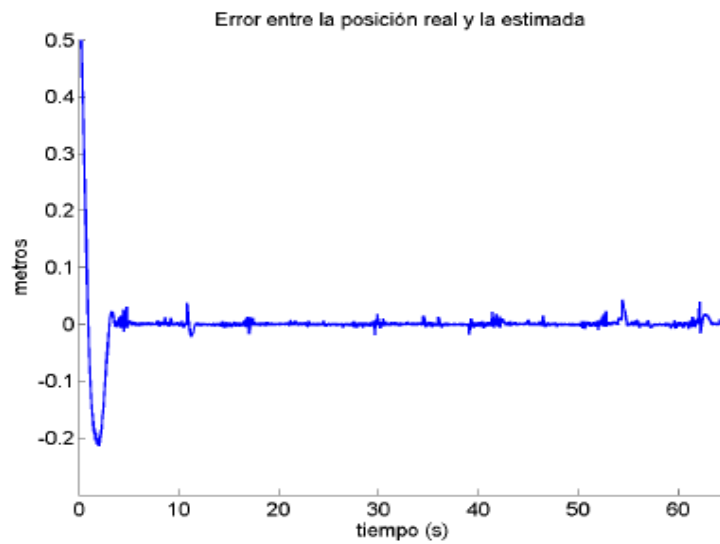


Figura 6-15: Error de estimación por el AST en la reconstrucción de la derivada

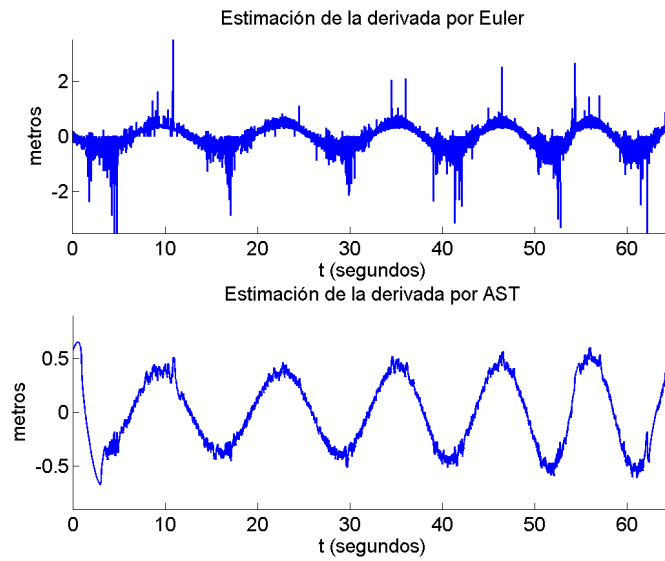


Figura 6-16: Comparación de los resultados obtenidos al calcular la derivada de la posición del robot en X, a) por el método de Euler, b) por el AST

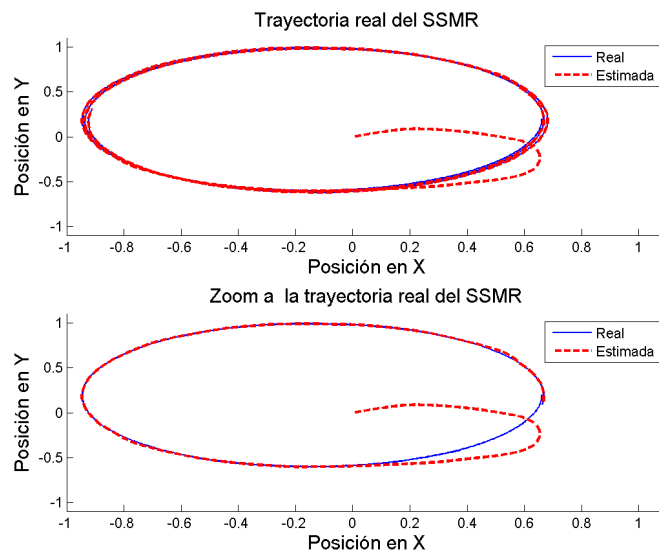


Figura 6-17: Comparación entre la trayectoria real del SSMR y la señal obtenida por el AST.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo, se ha planteado el problema de aproximar el AST diseñado para tiempo continuo a un sistema discreto. Para estudiar las propiedades de este algoritmo en tiempo discreto, la teoría de estabilidad de Lyapunov fue aplicada obteniendo estabilidad práctica, esta definición de estabilidad práctica concuerda con el denominado régimen de modos casi-deslizantes. Este tipo de discretización fue favorablemente aplicado en la resolución de los problemas de diferenciación numérica, estimación de estados y control de sistemas no lineales en tiempo discreto.

El AST discreto fue implementado como estimador de estados y fue reforzado con una RNR para identificar la dinámica no lineal de sistemas de segundo orden. Los resultados en simulación demostraron una ligera mejoría del AST en comparación cuando se considera el desconocimiento total de la planta. La principal desventaja en este caso es el sobretiro que se produce al iniciar la estimación de estados. Al seleccionar una ganancia menor en el AST trabajando con la RNR se tiene menor sobretiro al inicio de la estimación. Se realizaron pruebas numéricas en simulación y pruebas de implementación en diferentes sistemas mecánicos. Lo anterior, con el fin de probar la robustez del AST ante diferentes modelos mecánicos, en este caso, un péndulo invertido, un motor de CD, entre otros.

Al aplicar el segundo método de Lyapunov es posible encontrar estabilidad práctica para los algoritmos de identificación, estimación y control, esta característica podría ser una clara desventaja si se compara con los resultados existentes en modos deslizantes de alto orden que brindan estabilidad en tiempo finito para sistemas continuos. No obstante, a nivel práctico piden



en la señal de control un cambio u oscilación (switcheo) de frecuencia infinita, el cual claramente no es alcanzable por medios físicos. Una alternativa para aproximar más este tipo de algoritmos continuos es su implementación en dispositivos analógicos, no obstante, las dificultades de diseño son mayores.

En la implementación de los algoritmos de estimación y control, la señal medible del SSMR fue obtenida satisfactoriamente por un sistema de visión integrado, que al vincular a Matlab fue capaz de dar la posición del SSMR con un muestreo máximo de 30 a 300 cuadros por segundo aproximadamente. Esta frecuencia de muestreo fue aceptable para trabajar con los algoritmos de estimación y control.

Los algoritmos desarrollados demuestran características similares a su contraparte continua. Las ventajas que se obtienen al aplicar estos algoritmos discretizados en el caso de los basados en MD y los algoritmos discretos basados en RNR es su fácil implementación en dispositivos programables. El adecuado funcionamiento de los algoritmos de identificación, control y estimación, sugieren que su implementación como sistemas discretos en un circuito embebido puede traer resultados significativos, con una adecuada selección de sus parámetros de ajuste.

La implementación de los algoritmos de control en el SSMR es una aportación importante en este trabajo, puesto que este tipo de robots no son comúnmente usados, por las dificultades técnicas de implementar estos algoritmos. Para el problema de estimación al AST, se obtuvieron buenas aproximaciones de la derivada de la posición del SSMR siguiendo una trayectoria circular. Se realizaron comparaciones en simulación del método de control propuesto contra un controlador por retroalimentación de estados

## 7.1. Trabajo a futuro

- Mejorar la convergencia del AST, hasta ahorita la cota para el AST es proporcional al cuadrado del periodo de muestreo. Una solución consiste en cambiar la estructura del algoritmo AST, en particular la función signo.
- Estudiar la convergencia del AST aplicando el operador delta. El operador delta es un tipo de discretización que presenta ciertas ventajas en comparación con la discretización clásica de Euler. En sistemas lineales, muestra mejores resultados que le discretización de

Euler. Para sistemas no lineales, no existen muchos resultados, por lo que podría ser un campo de estudio para mejorar la convergencia del AST en tiempo discreto. Para sistemas estudiados bajo el operador delta, se tiene que el límite cuando el periodo de muestreo tiende a cero, se recobra el resultado en tiempo continuo, en el caso de la discretización de Euler, esto no se cumple.

- Estudio de series telescópicas para obtener convergencia en un número finito de pasos de los algoritmos de control y estimación por MD en tiempo discreto.
- Control del SSMR bajo la tarea de navegación en exteriores, colocando una cámara para captar el terreno desconocido.
- Control del SSMR bajo la tarea de navegación en exteriores, obteniendo su posición mediante un sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés).

## **7.2. Publicaciones**

Dentro de los resultados obtenidos se tienen las siguientes publicaciones:

### **7.2.1. Publicaciones en congreso**

- Discrete time super-twisting observer for  $2n$  dimensional systems
- PD controller based on second order sliding mode differentiation. Andean Region International Conference (ANDESCON , 2012)
- Adaptive control of discrete-time nonlinear systems by recurrent neural networks in a quasi sliding mode regimen, The 2013 international joint conference on neural networks (IJCNN, 2013)

### **7.2.2. Publicaciones en revistas**

- Discrete-time non-linear state observer based on a super twisting-like algorithm, IET control theory and applications.

- super-twisting sliding mode differentiation for improving PD controllers performance of second order systems, ISA transactions 53 (2014)
- Proportional derivative fuzzy control supplied with second order sliding mode differentiation, Engineering applications of artificial intelligence, 35 (2014)
- Adaptive identifier for uncertain complex-valued discrete-time nonlinear systems based on recurrent neural networks, Neural Processing letters. DOI 10.1007/s11063-015-9407-8

# Bibliografía

- [1] A. Levant, *High Order Sliding Modes*, ser. Sliding Mode Control in Engineering, L. Fridman, W. Perruquetti, and J. P. Barbot, Eds. Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [2] K. Kozłowski and D. Pazderski, “Modeling and control of a 4-wheel skid-steering mobile robot,” *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 14, no. 4, pp. 477–496, 2004.
- [3] D. Chwa, “Sliding mode tracking control for nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 637–644, 2004.
- [4] F. Chaumette and S. Hutchinson, “Visual servo control. advanced approaches,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 14, no. 1, pp. 109–118, 2007.
- [5] M. Defoort, T. Floquet, A. Kökösy, and W. Perruquetti, “Sliding-mode formation control for cooperative autonomous mobile robots,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 11, pp. 3944–3953, 2008.
- [6] S. Hutchinson, G. D. Hager, and P. I. Corke, “A tutorial on visual servo control,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 5, pp. 651–670, 1996.
- [7] F. Haumette and S. Hutchinson, “Visual servo control. i. basic approaches,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 13, no. 4, pp. 82–90, 2006.
- [8] N. P. Papanikolopoulos, P. K. Hhosla, and T. Kanade, “Visual tracking of a moving target by a camera mounted on a robot: A combination of control and vision,” *IEEE Transactions on robotics and automation*, vol. 9, no. 1, pp. 14–35, 1993.

- [9] G. DeSouza and A. Kak, "Vision for mobile robot navigation: a survey," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine Intelligence*, vol. 24, no. 2, pp. 237–267, 2002.
- [10] G. Mariottini, G. Oriolo, and D. Prattichizzo, "Image-based visual servoing for nonholonomic mobile robots using epipolar geometry," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 1, pp. 87–100, 2007.
- [11] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall U.S., 2002.
- [12] W. M. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control*. Princeton University Press, 2008.
- [13] Z. Jiang and H. Nijmeijer, "Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping," *Automatica*, vol. 33, no. 7, pp. 1393–1399, 1997.
- [14] C. Hwang, L. Chang, and Y. Yu, "Network-based fuzzy decentralized sliding mode control for car-like mobile robots," *IEEE Transactions on Industrial electronics*, vol. 54, no. 1, pp. 574–585, 2007.
- [15] V. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [16] —, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, C. P. Second Edition, Ed. Automation and Control Engineering, 2009.
- [17] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, Taylor and Francis, Eds. London:, 1998.
- [18] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai, "Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 11, pp. 2085–2102, 2007.
- [19] A. Levant, "Principles of 2-sliding mode design," *Automatica*, vol. 43, no. 4, pp. 576–586, 2007.
- [20] —, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *International Journal of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.

- [21] H. Sira-Ramirez, “Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 10, no. 6, pp. 860–865, 2004.
- [22] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [23] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, 2005.
- [24] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak, “Observation and identification of mechanical systems via second-order sliding modes,” *International Journal of Control*, vol. 79, no. 10, pp. 1251–1262, 2006.
- [25] S. V. Drakunov and V. Utkin, “On discrete-time sliding mode,” in *In proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, 1989.
- [26] S. Govindaswamy, T. Floquet, and S. Spurgeon, “On output sampling based sliding mode control for discrete time,” in *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008, pp. 2190–2195.
- [27] A. Levant, “Finite differences in homogeneous discontinuous control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 7, pp. 1208–1217, 2007.
- [28] C. Milosavljevic, “General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems,” *Automation and Remote Control*, vol. 46, pp. 679–684, 1985.
- [29] H. M. Becerra, G. López-Nicolás, and C. Sagüés, “A sliding mode-control law for mobile robots based on epipolar visual servoing from three views,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 27, no. 1, pp. 175–183, 2011.
- [30] S. Haykin, *Neural Networks, Comprehensive Foundation*. Prentice Hall U.S., 1999.
- [31] A. Poznyak, E. Sánchez, and Y. Wen, *Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control (Identification, State Estimation and Trajectory Tracking)*. World Scientific Press, 2001.

- [32] I. Chairez, A. Poznyak, and T. Poznyak, “New sliding-mode learning law for dynamic neural network observer,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 53, no. 12, pp. 1338–1342, 2006.
- [33] W. Yu, “Stability analysis of visual servoing with sliding-mode estimation and neural compensation,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 4, no. 5, pp. 545–558, 2006.
- [34] I. Salgado, S. Kamal, I. Chairez, B. Bandyopadhyay, and L. Fridman, “Super-twisting-like algorithm in discrete time nonlinear systems,” in *International Conference on Advanced Mechatronic Systems (Accepted)*, 2011.
- [35] A. Dávila, J. Moreno, and L. Fridman, “Reaching time estimation for super twisting based on lyapunov function,” in *IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.
- [36] A. Poznyak, *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*. Elsevier Science, 2008.
- [37] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control. Stability, Convergence and Robustness*, T. Kailath, Ed. Prentice Hall, 1989.
- [38] P. Wellstead, *Introduction to Physical Systems and Modelling*. Academic Press LTD., 1979.
- [39] A. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, t.Ñ. Dirdrecht, Ed. Kluwer, 1998.
- [40] A. Levant, A. Pridor, R. Gitizadeh, I. Yaesh, and J. Z. Ben-Asher, “Aircraft pitch control via second order sliding technique,” *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 23, no. 4, pp. 586–594, 2000.
- [41] A. Moreno and M. Osorio, “Strict lyapunov funtions for the super-twisting algorithm,” *IEEE Tran. Aut. Cont.*, vol. 57, no. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [42] S. Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak, “On the stability of discrete-time sliding mode control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 10, pp. 930–932, 1987.

- [43] K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system," *Systems and Control Letters*, vol. 14, no. 2, pp. 145–152, 1990.
- [44] A. Bartoszewicz, "Discrete-time quasi-sliding mode control strategies," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, no. 4, pp. 633–637, August 1998.
- [45] J. L. Chang, "Robust discrete-time model reference sliding-mode controller design with state and disturbance estimation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 4065–4074, 2008.
- [46] S. K. Spurgeon, "Hyperplane design techniques for discrete-time variable structure control systems," *International Journal of Control*, vol. 55, no. 2, pp. 445–456, 1992.
- [47] H. Sira-Ramirez, "Nonlinear discrete variable structure systems in quasi-sliding mode," *International Journal of Control*, vol. 54, no. 5, pp. 1171–1187, 1991.
- [48] G. Bartolini, A. Pisano, and E. Usai, "Digital second-order sliding mode control for uncertain nonlinear systems," *Automatica*, vol. 37, no. 9, pp. 1371–1377, 2001.
- [49] I. Salgado, A. Moreno, and I. Chairez, "Sampled output based continuous second-order sliding mode observer," in *Workshop on Variable Structure Systems*, 2010.
- [50] A. Poznyak, W. Yu, E. Sánchez, and J. Pérez, "Stability analysis of dynamic neural networks," *Expert Systems and Applications*, vol. 14, no. 1, pp. 227–236, 1998.
- [51] A. Delgado, C. Kambhampati, and W. K., "Dynamic neural network for system identification and control," *IEE Proc.-Control Theory Applications*, vol. 142, no. 4, pp. 307–314, 1995.
- [52] J. B. Prolla, "On the weierstrass-stone theorem," *Journal of Approximation theory*, vol. 78, pp. 501–506, 1994.
- [53] S. Kumpati, S.Ñarendra, and P. Kannan, "Identification and control of dynamic systems using neural networks," *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 1, no. 1, pp. 4–27, 1990.
- [54] N. Sanchez, Y. Alanis, and A. Loukianov, *Discrete-Time, High Order Neural Control: Trained with Kalman Filtering*. Springer Verlag, London, 2008.



- [55] J. Perez Medina, “Control de procesos biotecnológicos usando redes neuronales recurrentes,” Master’s thesis, Control Departament, CINVESTAV-IPN, 2002.
- [56] N. E. Barabanov and V. Prokhorov, “Stability analysis of discrete-time recurrent multilayer neural networks,” in *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.
- [57] I. Salgado and I. Chairez, “Discrete time recurrent neural network observer,” in *2009 International Joint Conference on Neural Networks*, no. 909-916, 2009.
- [58] I. Chairez, “Wavelet differential neural network observer,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 20, no. 9, pp. 1439–1449, 2009.
- [59] N. E. Cotter, “The stone-weierstrass theorem and its application to neural networks,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, no. 4, pp. 290–295, 1990.
- [60] A. Kosaka and A. C. Kak, “Fast vision-guided mobile robot navigation using model-based reasoning and prediction of uncertainties,” *Computer Vision, Graphics and Image Processing-Understanding*, vol. 56, no. 3, pp. 271–329, 1992.
- [61] Y. Zheng, M. Barth, and S. Tsuji, “Autonomous landmark selection for route recognition by a mobile robot,” in *Proc of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1991.
- [62] L. Caracciolo, A. De Luca, and S. Iannitti, “Trajectory tracking control of a four-wheel differential driven mobile robot,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 1999.
- [63] M. Trojnacki, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, 2015, vol. 323, ch. Dynamics Model of a Four-Wheeled Mobile Robot for Control Applications - A Three-Case Study, pp. 99–116.
- [64] Y. Yi, H. Wang, J. Zhang, D. Song, S. Jayasuriya, and J. Liu, “Kinematic modeling and analysis of skid-steered mobile robots with applications to low-cost inertial-measurement-unit-based motion estimation,” *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 25, no. 5, 2009.

- [65] H. Wang, J. Zhang, J. Yi, D. Song, S. Jayasuriya, and J. Liu, "Modelling and motion stability of skid-steered mobile robots," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009.
- [66] A. Pisano, A. Davila, L. Fridman, and E. Usai, "Cascade control of pm dc drives via second-order sliding-mode technique," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 11, pp. 3846–3854, 2008.

# Anexo

# Anexo A

## Prueba de teoremas matemáticos

### A.1. Prueba del teorema 1

**Demostración.** Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x) := \|x\|_P^2 \quad (\text{A.1})$$

donde  $P = P^\top > 0$ . Si se toma la diferencia de acuerdo al segundo método de Lyapunov para sistemas discretos,  $\Delta V(k) := V(k+1) - V(k)$ , se obtiene

$$\Delta V(k) = x^\top(k+1)Px(k+1) - x^\top(k)Px(k) \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en (A.2) y aplicando algunas manipulaciones algebraicas,  $\Delta V(k)$  se convierte en

$$\Delta V(k) = x^\top(k) \left( A^\top PA - P \right) x(k) + 2x^\top(k) A^\top PB(k) \text{sign}(x_1(k)) + B^\top(k)PB(k) \quad (\text{A.3})$$

Aplicando la llamada desigualdad de lambda descrita en [36] y definida como  $X^\top Y + Y^\top X \leq X^\top \Lambda^{-1} X + Y^\top \Lambda Y$  para el término  $2x^\top(k) A^\top PB(k) \text{sign}(x_1(k))$ , se obtiene el siguiente resultado

$$2x^\top(k) A^\top PB(k) \text{sign}(x_1(k)) \leq x^\top(k) A^\top P \Lambda^{-1} P A x(k) + B^\top(k) \Lambda B(k) \quad (\text{A.4})$$

sumando  $\varrho V(x) - \varrho V(x)$ , con  $0 < \varrho < 1$ , la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \Delta V(k) \leq & x^\top(k) (A^\top (P + P\Lambda P) A - (1 - \varrho) P) x(k) \\ & + B^\top(k) (\Lambda^{-1} + P) B(k) - \varrho V(k) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Expandiendo los elementos del vector  $B^\top(k) Z B(k)$  con  $Z = (\Lambda^{-1} + P)$ , se obtiene

$$B^\top(k) Z B(k) = \delta_1 |x_1(k)| + \delta_2 |x_1(k)|^{1/2} + \delta_3 \quad (\text{A.6})$$

$$\delta_1 := \tau^2 k_1^2 z_{11}, \quad \delta_2 := \tau^2 k_1 k_2 z_{12}, \quad \delta_3 := \tau^2 k_2^2 z_{22}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de lambda al término que contiene  $\delta_2$  y si existe una matriz  $Q = Q^\top > 0$  solución de la BMI dada por  $A^\top (P + P\Lambda P) A - (1 - \varrho) P = -Q$ , entonces  $\Delta V(k)$  se describe como (para cualquier  $\omega_1 \in \mathbb{R}^+$ )

$$\Delta V(k) \leq -\|x(k)\|_Q^2 + \bar{\delta}_1 |x_1(k)| + \bar{\delta}_2 - \varrho V \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\delta}_1 := \delta_1 + \tau^4 k_1^2 k_2^2 z_{12}^2 \omega_1, \quad \bar{\delta}_2 := k_2^2 \tau^2 (\tau^2 k_1^2 z_{12}^2 \omega_1^{-1} + z_{22})$$

Completando cuadrados en el resultado anterior

$$\begin{aligned} \Delta V & \leq -\|x(k)\|_Q^2 + \bar{\delta}_1 \|Q Q^{-1} x(k)\| - \alpha V + \bar{\delta}_2 \\ & = -\left( \|Q^{1/2} x(k)\| - \frac{1}{2} \bar{\delta}_1 \|Q^{-1}\| \right)^T \left( \|Q^{1/2} x(k)\| - \frac{1}{2} \bar{\delta}_1 \|Q^{-1}\| \right) \\ & \quad - \alpha V + \bar{\delta}_2 + \frac{1}{4} \bar{\delta}_1^2 \|Q^{-1}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

la ecuación anterior puede ser reescrita

$$\Delta V(k) \leq -\varrho V(k) + c \quad (\text{A.9})$$

con  $c := \bar{\delta}_2 + \frac{1}{4} \bar{\delta}_1^2 \|Q^{-1}\|^2$ . Expandiendo el lado izquierdo de la desigualdad anterior, se tiene

$$V(k+1) \leq -(1 - \varrho) V(k) + c \quad (\text{A.10})$$

La ecuación anterior es una ecuación discreta bien definida, por lo tanto su solución recurrente está descrita por

$$V(k+1) \leq (1-\varrho)^k V(0) + \sum_{i=1}^k (1-\gamma_x)^{i-1} c \quad (\text{A.11})$$

Si tomamos el límite cuando  $k$  tiende a infinito, se tiene el siguiente resultado

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} V(k) \leq \frac{c}{1-\varrho} \quad (\text{A.12})$$

Y la región de convergencia del algoritmo está definida como

$$r \leq \frac{c}{1-\varrho} \quad (\text{A.13})$$

Este hecho completa la prueba. ■

## A.2. Prueba del teorema 2

**Demostración.** Para construir el algoritmo de convergencia, se define la siguiente función como candidato de Lyapunov

$$V(k) = \tilde{x}^\top(k) P_1 \tilde{x}(k) + s^\top(k) P_2 s(k) + \text{tr} \left\{ W_1^\top(k) g_1^{-1} W_1(k) \right\} \quad (\text{A.14})$$

donde  $s(k) = G\delta(k)$ . Usando los principios básicos del método de Lyapunov para sistemas discretos se tiene

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &= \tilde{x}^\top(k+1) P_1 \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}^\top(k) P_1 \tilde{x}(k) + \\ &\quad s^\top(k+1) P_2 s(k+1) - s^\top(k) P_2 s(k) \\ &\quad + \text{tr} \left\{ (W_1(k+1) + W_1(k))^\top g_1^{-1} (W_1(k+1) - W_1(k)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

El error de identificación es definido restando las ecuaciones (3.5), (3.12), es decir,

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k)) - \omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k)) / 2 + \tilde{f}(k) + \tilde{g}(x, \hat{x}) u(k) + \xi(k) \quad (\text{A.16})$$

donde  $\tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k)) := \sigma(x(k)) - \sigma(\hat{x}(k))$ ,  $\omega_1(k) := \tilde{W}_i(k+1) + \tilde{W}_i(k)$  y  $\tilde{W}_1(k) := W_1(k) - W_1^*$ . La expresión completa para el término  $\tilde{x}^\top(k+1) P_1 \tilde{x}(k+1)$  se define como

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^\top(k+1) P_1 \tilde{x}(k+1) = \\ & (A\tilde{x}(k) + W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k)) - \omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2)^\top P_1 \\ & \quad \times (A\tilde{x}(k) + W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k)) - \omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2) \\ & + \left( \tilde{g}(x, \hat{x}) u(k) + \tilde{f}(k) + \xi(k) \right)^\top P_1 \left( \tilde{g}(x, \hat{x}) u(k) + \tilde{f}(k) + \xi(k) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Aplicando cierto número de veces la desigualdad de lambda [36], el término  $\tilde{x}^\top(k+1) P_1 \tilde{x}(k+1)$  queda acotado por

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^\top(k+1) P_1 \tilde{x}(k+1) \leq \tilde{x}^\top(k) (A^\top P_1 A + A^\top P_1 \Lambda_s^{-1} P_1 A - P_1) \tilde{x}(k) \\ & \quad + \|W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2 + \|(\omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2)\|_{\Lambda_{\omega_1}}^2 \\ & \quad - 2\tilde{x}^\top(k) A^\top P \omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2 \\ & \quad + 2(\omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2)^\top P_1 \tilde{g}(x, \hat{x}) u(k) + \|\tilde{f}(k)\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2 + \|\xi(k)\|_{\Lambda_\xi}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

con los parámetros  $\Lambda_s^{-1}$ ,  $\Lambda_{\omega_1}$ , y  $\Lambda_\xi$  definidos en (3.19) y

$$\begin{aligned} \Lambda_{\tilde{f}} & := P_1 + \Lambda_3 + \Lambda_7 + \Lambda_9 + \Lambda_{11} \\ \Lambda_{W_1^*} & = P_1 + P_1 (\Lambda_5^{-1} + \Lambda_6^{-1} + \Lambda_7^{-1} + \Lambda_8^{-1}) P_1 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por las condiciones de sector requeridas para las funciones de activación (3.7) y (3.9), la siguiente desigualdad es válida

$$\|W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2 \leq L_\sigma \check{W}_1 \|\tilde{x}(k)\|^2$$

Por la suposición (3.3) y el acceso completo al vector de estados  $x(k)$ ,  $\tilde{g}(x(k), \hat{x}(k)) = 0$ . Tomando la cota superior para  $\|\tilde{f}(k)\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2$  y  $\|\xi(k)\|_{\Lambda_\xi}^2$ , la ecuación (A.18) se convierte en

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^\top(k+1) P_1 \tilde{x}(k+1) \leq \tilde{x}^\top(k) (A^\top P_1 A + A^\top P_1 \Lambda_s^{-1} P_1 A - P_1 + Q_1) \tilde{x}(k) \\ & \quad + \|(\omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2)\|_{\Lambda_{\omega_1}}^2 - 2\tilde{x}^\top(k) A^\top P \omega_1(k) \sigma(\hat{x}(k))/2 + f_1^+ + \xi^+ \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Adicionalmente, la dinámica completa para el error de seguimiento se define como  $\delta(k+1)$ , sustituyendo las ecuaciones (3.15) y (3.10) se obtiene el siguiente resultado

$$\delta(k+1) = A\hat{x}(k) + \bar{W}_1(k)\sigma(\hat{x}(k)) + g(x(k))u(k) - h(x^*, k) \quad (\text{A.21})$$

El término  $\delta^\top(k+1)P_2\delta(k+1) - \delta^\top(k)P_2\delta(k)$  es una diferencia de cuadrados que puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \delta^\top(k+1)P_2\delta(k+1) - \delta^\top(k)P_2\delta(k) \\ &= (\delta(k+1) + \delta(k))^\top P_2(\delta(k+1) - \delta(k)) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Si la acción de control  $u(k)$  se selecciona de acuerdo a la ecuación (3.20) la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} & (s(k+1) + s(k))^\top P_2(s(k+1) - s(k)) \\ &= (-vs(k) + s(k))^\top P_2(-vs(k) - s(k)) = s^\top(k)\bar{P}_2s(k) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

con  $\bar{P}_2$  definida como en (3.20). Si  $v$  se selecciona como una matriz Hurwitz en sentido discreto, la ecuación anterior es negativa definida. Los términos  $\|(\omega_1(k)\Psi)\|_{\Lambda_{\omega_1}}^2 - 2\tilde{x}^\top(k)A^\top P_1\omega_1(k)\Psi$  en (A.20) se asocian con las leyes de aprendizaje. Introduciendo estos términos en el operador de traza en la diferencia de la ecuación de Lapunov (A.15), y juntando los resultados obtenidos en las ecuaciones (A.20) y (A.23), el siguiente resultado es válido

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &\leq \tilde{x}^\top(k)(A^\top P_1 A + A^\top P_1 \Lambda_s^{-1} P_1 A - P_1 + Q_1)\tilde{x}(k) - \tilde{x}^\top(k)Q_0\tilde{x}(k) \\ &\quad s(k)((-v + I)s(k))^\top P_2(-v - I)s(k) \\ &\quad + \text{tr}\{(W_1(k+1) + W_1(k))^\top \Theta(k)\} + f_1^+ + \xi^+ \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

con  $\Theta(k)$  definido

$$\Theta(k) := -2PA\tilde{x}(k) + \Lambda_{\omega_1}(W_1(k+1) + W_1(k))\Psi\Psi^\top + g_1(W_1(k+1) + W_1(k)) \quad (\text{A.25})$$

Si la ley de aprendizaje se escoge como (3.17) y la ecuación (3.18) tiene una solución positiva definida  $P_1$ , la ecuación (A.24) se reescribe como

$$\Delta V(k) \leq -\tilde{x}^\top(k)Q_0\tilde{x}(k) - s(k)^\top \bar{P}_2 s(k) + f_1^+ + \xi^+ \quad (\text{A.26})$$



Definiendo un nuevo vector de estados  $z(k) := \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) & s(k) \end{bmatrix}$ , la ecuación anterior puede ser presentada como

$$\Delta V(k) \leq -z^\top(k) \bar{Q} z(k) + \varphi \quad (\text{A.27})$$

con

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi := f_1^+ + \xi^+ \quad (\text{A.28})$$

Para calcular la zona de convergencia a partir de la ecuación (A.27), se considera que

$$0 \geq -\|z(k)\|_{\bar{Q}}^2 + \varphi \geq -\lambda_{\min}\{\bar{Q}\} \|z(k)\|^2 + \varphi \quad (\text{A.29})$$

La condición anterior se cumple sí y solo sí

$$\|z(k)\|^2 \geq \frac{\varphi}{\lambda_{\min}(\bar{Q})} \quad (\text{A.30})$$

y el teorema es probado. ■

### A.3. Prueba del teorema 3

**Demostración.** (Teorema 3) La definición de la dinámica del error de estimación basados en las ecuaciones (3.28) y (3.30) se define como  $\Delta(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  y se describe con la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} \Delta(k+1) &= A_x \Delta(k) - B(k) S(\Delta_\alpha(k)) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \tau W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k)) + \tau W_2^* \tilde{\varphi}(x(k), \hat{x}(k)) u(k) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ \tau [\tilde{W}_1(k+1) + \tilde{W}_1(k)] \sigma(\hat{x}(k)) / 2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \left( [\tilde{W}_2(k+1) + \tilde{W}_2(k)] \varphi(\hat{x}(k)) u(k) / 2 + \tilde{f}(x_k, u_k) + \xi_k \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

con  $\tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k)) := \sigma(x(k)) - \sigma(\hat{x}(k))$  y  $\tilde{\varphi}(x(k), \hat{x}(k)) := \varphi(x(k)) - \varphi(\hat{x}(k))$ . Si se define la siguiente la siguiente ecuación candidata de Lyapunov como

$$V(\Delta, W_1, W_2) = \Delta^T P \Delta + g_1^{-1} \text{tr} \{W_1^T W_1\} + g_2^{-1} \text{tr} \{W_2^T W_2\} \quad (\text{A.32})$$

Siguiendo el segundo método de estabilidad de Lyapunov se obtiene la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &= \Delta^T(k+1) P \Delta(k+1) - \Delta^T(k) P \Delta(k) + \\ &g_1^{-1} \text{tr} \{(W_1(k+1) - W_1(k))^T (W_1(k+1) - W_1(k))\} + \\ &g_2^{-1} \text{tr} \{(W_2(k+1) - W_2(k))^T (W_2(k+1) - W_2(k))\} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Sustituyendo la expresión (A.31) en el primer término de la ecuación (A.33) y aplicando la desigualdad de lamda, la cota superior de la ecuación anterior se define como

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &\leq \Delta^T(k) (A_x P A_x + A_x^T P R_\alpha P A_x) \Delta(k) \\ &+ \|B(k) \text{sign}(\Delta_\alpha(k))\|_Z^2 + \tau^2 \|W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2 \\ &+ \tau^2 \|W_2^* \tilde{\varphi}(x(k), \hat{x}(k)) u(k)\|_{\Lambda_{W_2^*}} \\ &+ 2\tau \text{sign}(\Delta_\alpha(k))^T B(k)^T P M^T [\tilde{W}_1(k+1) + \tilde{W}_1(k)] \sigma(\hat{x}(k)) / 2 \\ &- 2\Delta^T(k) A_x^T P M^T [\tilde{W}_1(k+1) + \tilde{W}_1(k)] \sigma(\hat{x}(k)) / 2 \\ &\tau^2 \left\| \left[ \tilde{W}_1(k+1) + \tilde{W}_1(k) \right] \sigma(\hat{x}(k)) / 2 \right\|_{\Lambda_{\tilde{W}_1}}^2 \\ &- 2\tau \Delta^T(k) A_x^T P M^T [\tilde{W}_2(k+1) + \tilde{W}_2(k)] \varphi(\hat{x}(k)) u(k) / 2 \\ &+ 2\text{sign}(\lambda(\Delta_\alpha(k)))^T B(k)^T P M^T [\tilde{W}_2(k+1) + \tilde{W}_2(k)] \varphi(\hat{x}(k)) u(k) / 2 \\ &\tau^2 \left\| \left[ \tilde{W}_2(k+1) + \tilde{W}_2(k) \right] \varphi(\hat{x}(k)) u(k) / 2 \right\|_{\Lambda_{\tilde{W}_2}}^2 \\ &+ \tau^2 \left\| \tilde{f}(x_k, u_k) \right\|_{\Lambda_{\tilde{f}}} + \tau^2 \|\xi(k)\|_{\Lambda_{\xi}} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

con los siguientes parámetros

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 + \Lambda_5 \\
Z &= \Lambda_1^{-1} + P + P(\Lambda_6 + \Lambda_7 + \Lambda_8 + \Lambda_9)P \\
\Lambda_{W_1^*} &:= M^\top (\Lambda_2^{-1} + \Lambda_6^{-1} + \Lambda_{10} + \Lambda_{11} + \Lambda_{12} + P + P(\Lambda_{13} + \Lambda_{14})P)M \\
\Lambda_{W_2^*} &= M^\top (\Lambda_3^{-1} + \Lambda_7^{-1} + \Lambda_{15} + \Lambda_{16} + P + P(\Lambda_{10} + \Lambda_{17} + \Lambda_{18})P)M \\
\Lambda_{\tilde{W}_1} &= M^\top (P(\Lambda_{11}^{-1} + \Lambda_{15}^{-1} + \Lambda_{19} + \Lambda_{20} + \Lambda_{21})P + P)M \\
\Lambda_{\tilde{W}_2} &= (P(\Lambda_{12}^{-1} + \Lambda_{16}^{-1} + \Lambda_{19}^{-1} + \Lambda_{22} + \Lambda_{23})P + P) \\
\Lambda_{\tilde{f}} &:= M^\top (\Lambda_4^{-1} + \Lambda_8^{-1} + \Lambda_{13}^{-1} + \Lambda_{17}^{-1} + \Lambda_{20}^{-1} + \Lambda_{22}^{-1} + P + P\Lambda_{24}P)M \\
\Lambda_{\tilde{\xi}} &:= M^\top (\Lambda_5^{-1} + \Lambda_9^{-1} + \Lambda_{14}^{-1} + \Lambda_{18}^{-1} + \Lambda_{21}^{-1} + \Lambda_{23}^{-1} + \Lambda_{24}^{-1} + P)M
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Las matrices  $\Lambda_i = \Lambda_i^\top > 0$ , son resultado de la aplicación de la desigualdad lambda. Por la definición de las funciones de activación  $\tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k))$ ,  $\tilde{\varphi}(x(k), \hat{x}(k))$ , y por las condiciones de sector que satisfacen, la siguiente cota superior puede ser obtenida  $\tau^2 \|W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2$  y  $\tau^2 \|W_2^* \tilde{\varphi}(x(k), \hat{x}(k))u(k)\|_{\Lambda_{W_2^*}}$

$$\tau^2 \|W_1^* \tilde{\sigma}(x(k), \hat{x}(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2 \leq \tau^2 L_\sigma \|W_1^* \Delta(x(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2 \tag{A.36}$$

si  $\Lambda_{13} + \Lambda_{14} = P^{-2}$  y  $\Lambda_4^{-1} + \Lambda_8^{-1} + \Lambda_{13}^{-1} + \Lambda_{17}^{-1} + \Lambda_{20}^{-1} + \Lambda_{21} + P = \tilde{\Lambda}_{W_1^*}$  con  $\tilde{\Lambda}_{W_1^*} = \tilde{\Lambda}_{W_1^*}^\top > 0$  se obtiene

$$\tau^2 L_\sigma \|W_1^* \Delta(x(k))\|_{\Lambda_{W_1^*}}^2 \leq \tau^2 L_\sigma \Delta^\top(x(k)) (W_1^*)^\top M^\top \tilde{\Lambda}_{W_1^*} M W_1^* \Delta(x(k)) \tag{A.37}$$

De la misma manera con  $\Lambda_{10} + \Lambda_{17} + \Lambda_{18} = P^{-2}$  y  $\Lambda_3^{-1} + \Lambda_7^{-1} + \Lambda_{15} + \Lambda_{16} + P = \tilde{\Lambda}_{W_1^*} = \tilde{\Lambda}_{W_1^*}^\top > 0$ , la siguiente desigualdad es válida

$$\tau^2 \|W_2^* \tilde{\varphi}(x(k), \hat{x}(k))u(k)\|_{\Lambda_{W_2^*}} \leq \tau^2 L_\varphi u^+ \Delta^\top(x(k)) (W_2^*)^\top M^\top \tilde{\Lambda}_{W_2^*} M W_2^* \Delta(x(k)) \tag{A.38}$$

Se asume que los valores exactos de  $W_1^*$  y  $W_2^*$  son desconocidos, pero se asume que las cotas superiores son finitas, esto es,

$$(W_1^*)^\top M^\top \tilde{\Lambda}_{W_1^*} M W_1^* \leq \check{W}_1 \quad (W_2^*)^\top M^\top \tilde{\Lambda}_{W_2^*} M W_2^* \leq \check{W}_2 \quad (\text{A.39})$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \tau^2 L_\sigma \|W_1^* \Delta(x(k))\|_{M^\top \tilde{\Lambda}_{W_1^*} M}^2 &\leq \tau^2 L_\sigma \Delta^\top(x(k)) \check{W}_1 \Delta(x(k)) \\ \tau^2 L_\varphi u^+ \|W_2^* \Delta(x(k))\|_{M^\top \tilde{\Lambda}_{W_2^*} M}^2 &\leq \tau^2 L_\varphi u^+ \Delta^\top(x(k)) \check{W}_2 \Delta(x(k)) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Expandiendo el término  $B^\top(k) Z B(k)$  con  $Z := \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix}$ , el siguiente resultado se obtiene (similar a la demostración del Teorema 1)

$$B^\top(k) Z B(k) := \|B_1 \lambda(\Delta_\alpha(k))\|_{Z_{11}} + 2 \text{sign}^\top(\Delta_\alpha(k)) B_2^\top Z_{12} B_1 \lambda(\Delta_\alpha(k)) + \|B_2\|_{Z_{22}} \quad (\text{A.41})$$

aplicando la desigualdad de lambda en el segundo término de la expresión anterior se llega al siguiente resultado

$$B^\top(k) Z B(k) \leq \lambda_{\max}(\Lambda_B) \|\Delta_\alpha(k)\| + \|B_2\|_{Z_{22}} + \left\| B_1^\top Z_{12}^\top B_2 \right\|_{\Lambda_{31}} \quad (\text{A.42})$$

con  $\Lambda_B := B_1 Z_{11} B_1 + \Lambda_{31}^{-1}$ . Los términos,  $\|B_2\|_{Z_{22}}$  y  $\|B_1^\top Z_{12}^\top B_2\|_{\Lambda_{31}}$  han sido obtenidos a partir de la desigualdad de lambda y de las ganancias que aseguran la convergencia del estimador de estados, esto implica, que estos términos son finitos y acotados por una constante  $\vartheta_1$ . Para introducir la dinámica del error, la siguiente ecuación es empleada  $(\delta I_{n \times n} + C^\top C) \Delta(k) = C^\top \Delta_\alpha(k) + \delta \Delta(k)$ . A partir de esta igualdad el siguiente resultado es válido

$$\Delta(k) = N_\delta (C^\top \Delta_\alpha(k) + \delta \Delta(k)) \quad (\text{A.43})$$

con  $N_\delta = (\delta I + C^\top C)^{-1}$ . Aplicando nuevamente la desigualdad de lambda después de sustituir la ecuación (A.43) y la definición de  $\check{W}(k)$  en la ecuación (A.34), con los resultados obtenidos

en (A.40) y, si  $\Lambda_{25} + \Lambda_{26}$  es seleccionada como  $P^{-2}$ , se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\Delta^\top(k+1)P\Delta(k+1) &\leq \Delta^\top(k) \left( A_x P A_x + A_x^\top P R_a P A_x + R_b \right) \Delta(k) \\
&\quad \lambda_{\max}(\Lambda_B) \|\Delta_\alpha(k)\| + \tau^2 \|M[W_i(k+1) + W_i(k)]\Psi_i/2\|_{\Lambda_{W_1}} \\
&\quad - 2\tau \Delta_\alpha^\top(k) C N_\delta^\top A_x^\top P M [W_i(k+1) + W_i(k)]\Psi_i/2 \\
&\quad + 2\tau \text{sign}(\Delta_\alpha(k))^\top B(k)^\top P M \left[ \tilde{W}_i(k+1) + \tilde{W}_i(k) \right] \Psi_i/2 \\
&\quad + \tau^2 \|M W_i^* \Psi_i\|_{\Lambda_{W_i}} + \tau^2 \|W_i^* \Psi_i\|_{\Lambda_{\tilde{W}_i}} + \left\| \tilde{f}(x_{k,k}) \right\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2 + \|\xi(k)\|_{\Lambda_\xi}^2 + \vartheta_1
\end{aligned} \tag{A.44}$$

con  $\Lambda_{\tilde{W}_1} := \Lambda_{27}^{-1} + \Lambda_{28}^{-1}$ ,  $\Lambda_{\tilde{W}_2} := \Lambda_{29}^{-1} + \Lambda_{30}^{-1}$  y  $i = 1, 2$ . Si la acción de control  $u(k)$  satisface la condición (3.23), los términos en la ecuación asociados a  $x(k)$  permanecen acotados conforme  $k \rightarrow \infty$ , esto implica que,  $\tau^2 \|M W_i^* \Psi_i\|_{\Lambda_{W_i}}^2 \leq \epsilon_i$  y  $\|W_i^* \Psi_i\|_{\Lambda_{\tilde{W}_i}}^2 \leq \tilde{\epsilon}_i$ . Por las suposiciones sobre el error de modelado y las perturbaciones  $\left\| \tilde{f}(x_k, u_k) \right\|_{\Lambda_{\tilde{f}}}^2$  y  $\|\xi(k)\|_{\Lambda_\xi}^2$ . Si se juntan los resultados arriba mencionados, y sustituyendo la cota completa para el término  $\Delta^\top(k+1)P\Delta(k+1)$  en (A.33), y si existe una solución para la ecuación matricial descrita en (3.18), la siguiente desigualdad es obtenida

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &\leq -\|\Delta_\alpha(k)\|_{Q_0}^2 + \lambda_{\max}(\Lambda_B) \|\Delta_\alpha(k)\| + \Gamma \\
&\quad + g_i^{-1} \text{tr} \left\{ [W_i(k+1) + W_i(k)]^\top \left( \Theta_i(\Delta_\alpha(k), W_i) + g_i^{-1} [W_i(k+1) - W_i(k)] \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.45}$$

donde  $\Gamma := \epsilon_i + \tilde{\epsilon}_i + n_1 + \Upsilon + \vartheta_1$  y

$$\begin{aligned}
\Theta_i(\Delta_\alpha(k), W_i) &= -\tau M^\top P A_x N_\delta C^\top \Delta_\alpha(k) \Psi_i^\top + \tau M^\top P B(k) \text{sign}(\Delta_\alpha(k)) \Psi_i^\top \\
&\quad + \tau^2 M^\top \Lambda_{W_i} M [W_i(k+1) + W_i(k)] (\Psi_i^\top \Psi_i / 4)
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Por la descomposición de Choleskii [36], se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &\leq \frac{1}{4} \lambda_{\max}^2(\Lambda_B) \left\| Q_0^{-1/2} \right\|^2 + \Gamma \\
&\quad - \left( \left\| Q_0^{1/2} \Delta_\alpha(k) \right\| - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Lambda_B) \left\| Q_0^{-1/2} \right\| \right)^T \left( \left\| Q_0^{1/2} \Delta_\alpha(k) \right\| - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Lambda_B) \left\| Q_0^{-1/2} \right\| \right) \\
&\quad + g_i^{-1} \text{tr} \left\{ [W_i(k+1) + W_i(k)]^\top \left( \Theta_i(\Delta_\alpha(k), W_i) + g_i^{-1} [W_i(k+1) - W_i(k)] \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Aplicando la ley de aprendizaje definida en (3.31), se llega finalmente a la siguiente ecuación

$$V(k+1) \leq (1-\alpha)V(k) + \rho \quad (\text{A.48})$$

Aplicando un proceso de recursión a la ecuación anterior se obtiene

$$V(k+1) \leq (1-\alpha)^k V(0) + \sum_{i=1}^k (1-\alpha)^{i-1} \rho \quad (\text{A.49})$$

si se toma el límite cuando  $k$  tiende a infinito se tiene el siguiente resultado

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} V(k) \leq \frac{\rho}{1-\alpha} \quad (\text{A.50})$$

con  $\rho := \frac{1}{2} \lambda_{\text{máx}}(\Lambda_B) \left\| Q_0^{-1/2} \right\|^2 + \Gamma$  y esto concluye la prueba ■

## Anexo B

# Publicaciones en revistas IJCR



# Discrete-time non-linear state observer based on a super twisting-like algorithm

Iván Salgado<sup>1</sup>, Isaac Chairez<sup>2</sup>, Bijan Bandyopadhyay<sup>3</sup>, Leonid Fridman<sup>4</sup> and Oscar Camacho<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CIC, Instituto Politecnico Nacional, Mexico City, Mexico

<sup>2</sup>Department of Bioprocesses, UPIBI, Instituto Politecnico Nacional, Mexico City, Mexico

<sup>3</sup>SYSCON, Indian Institute of Technology, Bombay, Mumbai, India

<sup>4</sup>Engineering Universidad Nacional Autonoma de Mexic, Mexico City, Mexico

E-mail: jchairez@ctrl.cinvestow.mx

**Abstract:** The properties of robustness and finite-time convergence provided by sliding mode (SM) theory have motivated several researches to deal with the problems of control and state estimation. In the SM theory, the super-twisting algorithm (STA), a second-order SM scheme, has demonstrated remarkable characteristics when it is implemented as a controller, observer or robust signal differentiator although the presence of noise and parametric uncertainties. However, the design of this algorithm was originally developed for continuous-time systems. The growth of microcomputers technology has attracted the attention of researchers inside the SM discrete-time domain. Recently, discretisations schemes for the STA were studied using majorant curves. In this study, the stability analysis in terms of Lyapunov theory is proposed to study a discrete-time super twisting-like algorithm (DSTA) for non-linear discrete-time systems. The objective is to preserve the STA characteristics of robustness in a quasi-sliding mode regime that was proved in terms of practical Lyapunov stability. An adequate combination of gains obtained by the same Lyapunov analysis forces the convergence for the DSTA. The problem of state estimation is also analysed for second-order mechanical systems of  $n$  degrees of freedom. Simulation results regarding the design of a second-order observer using the DSTA for a simple pendulum and a biped model of seven degrees of freedom are presented.

## 1 Introduction

Nowadays, the advance in the development of microcontrollers with capabilities to solve advanced mathematical algorithms has allowed the implementation of complex control schemes without the use of personal computers. In this way, the requirement of control and state estimation strategies downloadable in these microcontrollers has oriented the research of control strategies in two principal frameworks. The first one analyses the discretisation problem of several control techniques and its sampled time dependences in the discrete-time domain. On the other hand, as the second framework, new control strategies have been presented to study the case of pure discrete-time systems. These techniques include the well-known sliding mode (SM) theory [1]. In addition, the implementation of integration schemes could be an option to keep working with continuous strategies. However, the computational requirements are increased when this option is implemented.

The SM theory has been widely applied to solve the state estimation problem. The main features obtained by SM are robustness against parametric uncertainties and finite-time convergence. These advantages are evident in contrast with the conditions required for non-linear systems when a classical structure for observation is used, like a Luenberger one. Indeed, the necessity of the exact mathematical

description constitutes a drawback in this kind of algorithms. Following the idea of Luenberger structures, the so-called high-gain observers have been developed to deal with complex non-linear systems [2].

Sliding motion is obtained by including a discontinuity term in the algorithm structure. The discontinuous injection must be designed such that the trajectories of the system are forced to remain on a prescribed submanifold (sliding surface) on the state space. The resulting motion in the surface is named as a sliding motion [3, 4]. If the system has relative degree greater than one with respect to the sliding surface, high-order sliding modes (HOSM) such as the second-order sliding modes (SOSM) could be implemented preserving the main characteristics of classical SM [5, 6]. Moreover, SOSM reduce the undesired chattering effect. In continuous-time, the super-twisting algorithm (STA) has been successfully analysed and applied like a robust exact differentiator [7], state estimator [8] or controller [9]. Although, there exist several researches in the continuous domain, the concept of high-order discrete-time sliding modes (DSM) has not deeply studied.

DSM have not received much attention as the continuous counterpart. The first ideas of DSM were introduced in [10, 11], where a quasi-sliding mode (QSM) is established for systems with relative degree one. In [12], the study of discrete-time single-input single-output (SISO) non-linear





ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

ISA Transactions

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/isatrans](http://www.elsevier.com/locate/isatrans)

# Super-twisting sliding mode differentiation for improving PD controllers performance of second order systems

Ivan Salgado<sup>a</sup>, Isaac Chairez<sup>b,\*</sup>, Oscar Camacho<sup>a</sup>, Cornelio Yañez<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, Mexico city, Mexico

<sup>b</sup> Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología, Instituto Politécnico Nacional, Av. Acueducto de Guadalupe s/n. Col. La Laguna Ticoman, Mexico city, Mexico

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 28 December 2013

Received in revised form

14 March 2014

Accepted 3 April 2014

Available online 23 May 2014

This paper was recommended for publication by Jeff Pieper

### Keywords:

Signal differentiation

Sliding modes

PD controller

## ABSTRACT

Designing a proportional derivative (PD) controller has as main problem, to obtain the derivative of the output error signal when it is contaminated with high frequency noises. To overcome this disadvantage, the supertwisting algorithm (STA) is applied in closed-loop with a PD structure for multi-input multi-output (MIMO) second order nonlinear systems. The stability conditions were analyzed in terms of a strict non-smooth Lyapunov function and the solution of Riccati equations. A set of numerical test was designed to show the advantages of implementing PD controllers that used STA as a robust exact differentiator. The first numerical example showed the stabilization of an inverted pendulum. The second example was designed to solve the tracking problem of a two-link robot manipulator.

© 2014 ISA. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

### 1.1. Motivation

The classical proportional-derivative (PD) and proportional-integral-derivative (PID) controllers are the most successful techniques implemented in real applications [27,31]. Unfortunately, for unknown plants or systems with high frequency noises at the output, the PD controllers present an evident disadvantage regarding the need for calculating the error derivative [1]. Several approaches have been designed for improving the robustness of classical PD and PID control schemes. These researches have been oriented in two directions: (a) modifying the complete structure of the PD controller and (b) proposing robust techniques for numerical differentiation or state estimation [30].

For the first case, in [2], the classical PD controller structure was tuned with reinforcement learning based on *intelligent* techniques like fuzzy logic and neural networks. Robust techniques based on sliding modes have also been proposed [26]. The twisting algorithm is a discontinuous second order sliding mode controller that forces finite time convergence for nonlinear systems with a sliding

surface that has relative degree two with respect to the input signal.

The second approach requires the use of state estimators to reconstruct the unmeasurement states (velocity for this case). State estimators based on the Luenberger structure are the most popular solution. However, the exact description of the model associated with the signal is demanded and the observer parameters cannot be tuned easily for reducing sensitivity under measurement noises or perturbations [17,6]. Observers based on fuzzy logic techniques provide robust estimation for uncertain nonlinear systems, see for example [15,28] where small gain observers were designed. On the other hand, high gain observers and extended observers were compared in [16]. When the observer uses position measurements for estimating velocity, the estimator turns to signal differentiators. The most useful methods to approximate the numerical derivative are based on linear filters [32,6]. The main approach for designing a linear differentiator is to approximate a transfer function within a finite frequency band [12]. For nonlinear signal differentiators, a complete review can be found in [18]. For uncertain, perturbed and even unknown systems, sliding modes based differentiators are a suitable option for overcoming the main drawbacks exhibited by other differentiators [29,12].

### 1.2. Sliding mode theory for numerical differentiation

The main characteristics offered by sliding modes are robustness against parametric uncertainties, external perturbations and finite

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [ijesusr@gmail.com](mailto:ijesusr@gmail.com) (I. Salgado), [jchairez@ctrl.cinvestav.mx](mailto:jchairez@ctrl.cinvestav.mx) (I. Chairez), [oscarc@cic.ipn.mx](mailto:oscarc@cic.ipn.mx) (O. Camacho), [cyanez@cic.ipn.mx](mailto:cyanez@cic.ipn.mx) (C. Yañez).



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

# Engineering Applications of Artificial Intelligence

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/engappai](http://www.elsevier.com/locate/engappai)

## Proportional derivative fuzzy control supplied with second order sliding mode differentiation

I. Salgado<sup>a</sup>, O. Camacho<sup>a</sup>, C. Yáñez<sup>a</sup>, I. Chairez<sup>b,\*</sup><sup>a</sup> Computing Research Center, Instituto Politécnico Nacional, Mexico DF, Mexico<sup>b</sup> Interdisciplinary Unit of Biotechnology, Instituto Politécnico Nacional, Gustavo A. Madero, Mexico DF, Mexico

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 9 January 2014

Received in revised form

27 March 2014

Accepted 12 June 2014

Available online 9 July 2014

#### Keywords:

Second order sliding modes

Signal differentiation

Robust exact differentiation

Fuzzy control

PD controller

### ABSTRACT

The fuzzy logic controller (FLC) has the ability of handling parametric uncertainties and external perturbations for unknown systems. A regular structure for a FLC is the proportional derivative (PD) form. The proportional derivative fuzzy controller (PDF) could be seen as a variable gain PD controller. Despite this characteristic, the most common drawback for any PD controller, with unknown dynamics or even with unmodeled dynamics is the error signal differentiation. In this manuscript this disadvantage was overcome implementing the super-twisting algorithm (STA) as a robust exact differentiator (RED). The information provided by the STA was injected into the PDF to enhance its performance. In this study, the stability of the nonlinear system under the fuzzy super twisting PD controller (FSTPD) in closed loop was analyzed using the concept of the second Lyapunov's method. Numerical simulations were designed to show the effectiveness and advantages of the proposed FSTPD over the classical PD structure supplied with the STA and a PDF with the derivative part obtained by a linear filter. A first example to stabilize a simple pendulum was developed applying the FSTPD. A second example for solving a tracking control problem was designed for a robot manipulator with six degrees of freedom. In both cases, the FSTPD showed better performance and a significant reduction of the control energy.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Proportional Derivative (PD) controllers have become the most successful approach implemented in industrial applications. A PD provides a simple structure and a certain degree of accuracy for systems described by a suitable mathematical model. PD controllers can reduce the overshoot, rise time, settling time and it can force better steady state behavior of the system in closed loop (Khalil, 2002; Kuo, 2005).

Since the first successful application of fuzzy sets in control systems (Mohan and Patel, 2002; Zadeh, 1965), fuzzy logic control (FLC) in engineering has attracted the attention of many researchers. The main idea working with FLC is devoted to control complicated nonlinear systems with a fixed set of control rules, usually derived from the knowledge of an expert. Several works regarding the application of FLC as a PD structure have been presented obtaining remarkable results (Su et al., 2004; Mudi and Pal, 1999), (Malki et al., 1994). The stability analysis of FLC have been made in terms of bounded input–bounded output (BIBO) stability and Lyapunov theory (Mohan and Patel, 2002; Tang et al., 2001).

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [ijesusr@gmail.com](mailto:ijesusr@gmail.com) (I. Salgado), [jchairez@ctrl.cinvestav.mx](mailto:jchairez@ctrl.cinvestav.mx) (I. Chairez).

A classical PD controller is composed by proportional and derivative terms. Most of the applications where a PD controller is involved assume the complete access to the state vector and the full description of the mathematical model. However, these assumptions are difficult to fulfill in many real situations. Among others, working with mechanical systems, where the available output is usually described by the position of the nonlinear system, a tachometer must be implemented to obtain the velocity of the system and then be able to apply a PD controller (Su et al., 2004). Unfortunately, in other real applications, the on-line measurement of the signal error derivative is not available or the cost of implementation is raised. That means, inherit to PD controllers, there exists an associated problem, the signal differentiation.

Several attempts have been proposed to deal with the problem of signal differentiation (Su et al., 2004; Dridi et al., 2010; Mboup et al., 2007; Levant, 1998). The most useful tools are based on linear filters and observers (Yu and Ortiz, 2005). However, the main problem arises when the signal to be differentiated contains high frequency disturbances or the mathematical description of the signal is unknown (Levant, 1998). Luenberger state estimators are also applied but the exact model of the signal is a requirement for implementing this approach (Dridi et al., 2010). Moreover, the observer parameters are not tuned to reduce sensitivity to measurement noises or perturbations (Atassi and Khalil, 2000). Another approach was given in terms of an  $H^\infty$  problem for LTI systems, but it offers only sufficient

# Adaptive identifier for uncertain complex-valued discrete-time nonlinear systems based on recurrent neural networks

M. Alfaro-Ponce · I. Salgado · A. Arguelles ·  
I. Chairez

© Springer Science+Business Media New York 2015

**Abstract** Recently, the study of dynamic systems and signals in the frequency domain motivates the emergence of new tools. In particular, electrophysiological and communications signals in the complex domain can be analyzed but hardly, they can be modeled. This problem promotes an attractive field of researching in system theory. As a consequence, adaptive algorithms like neural networks are interesting tools to deal with the identification problem of this kind of systems. In this study, a new learning process for recurrent neural network applied on complex-valued discrete-time nonlinear systems is proposed. The Lyapunov stability framework is applied to obtain the corresponding learning laws by means of the so-called Lyapunov control functions. The region where the identification error converges is defined by the power of uncertainties and perturbations that affects the nonlinear discrete-time complex system. This zone is obtained as an alternative result of the same Lyapunov analysis. An off-line training algorithm is derived in order to reduce the size of the convergence zone. The training is executed using a set of some off-line measurements coming from the uncertain system. Numerical results are developed to prove the efficiency of the methodology proposed in this study. A first example is oriented to identify the dynamics of a nonlinear discrete time complex-valued system and the second one to model the dynamics of an electrophysiological signal separated in magnitude and phase.

**Keywords** Complex-valued systems · Non-parametric modeling · Recurrent neural networks · Lyapunov control functions

---

M. Alfaro-Ponce · I. Salgado · A. Arguelles  
Neural networks and non-conventional computing laboratory, Instituto Politecnico Nacional, Centro de Investigacion en Computacion, Ciudad de Mexico, Mexico

I. Chairez (✉)  
Bioprocess Department, Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnologia, Instituto Politecnico Nacional, Ciudad de Mexico, Mexico  
e-mail: isaac\_chairez@yahoo.com