



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

**REDES NEURONALES Y MEMORIAS ASOCIATIVAS
EN ARREGLOS DE ANTENAS ADAPTATIVOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

MARCO ANTONIO ACEVEDO MOSQUEDA

DIRECTORES DE TESIS:

DR. OLEKSIY POGREBANYAK



MÉXICO, D.F.

10 de marzo de 2014

DEDICATORIA

A mi hermosa familia:

A mi esposa María Adelaida

Por ser mí esposa, amiga y compañera en todo momento.
Por brindarme tú apoyo en los momentos más difíciles de mi vida.

A mi hijo Sebastián

Por ser mí amigo y la parte más importante de mi vida.
Me siento orgulloso de ti.

A mi hija Mariana

Por ser mi princesa y mi mayor alegría.
Porque entre el cielo y tú, yo me quedo contigo.

AGRADECIMIENTOS

Dra. María Elena Acevedo Mosqueda

Un especial agradecimiento por tú invaluable guía, colaboración y ayuda en la elaboración de este trabajo. Es un orgullo y honor ser tú hermano.

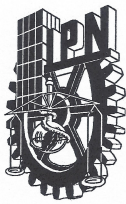
Dr. Oleksiy Pogrebnyak

A mi asesor, por ser la guía a lo largo del desarrollo de este proyecto de tesis, por su dedicación y su gran paciencia.

A los profesores

Dr. Sergio Suárez Guerra, Dr. Cornelio Yáñez Márquez, Dr. Oscar Camacho Nieto y al Dr. Amadeo José Argüelles Cruz, por revisar y enriquecer con sus observaciones este trabajo de tesis.

IMPOSIBLE... Nunca me ha detenido



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 12:00 horas del día 24 del mes de Abril de 2013 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

Centro de Investigación en Computación

para examinar la tesis titulada:

“REDES NEURONALES Y MEMORIAS ASOCIATIVAS EN ARREGLOS DE ANTENAS ADAPTATIVOS”

Presentada por el alumno:

ACEVEDO

Apellido paterno

MOSQUEDA

Apellido materno

MARCO ANTONIO

Nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	0	9	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis




Dr. Oleksiy Pogrebnyak



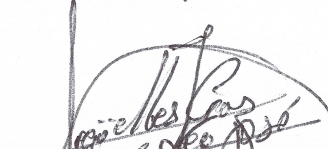
Dr. Sergio Suárez Guerra



Dr. Cornelio Yáñez Márquez

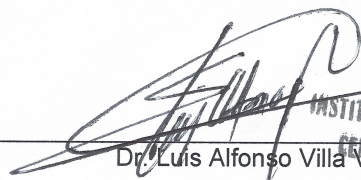


Dr. Oscar Camacho Nieto

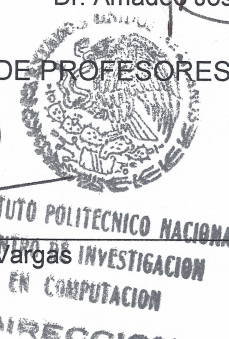


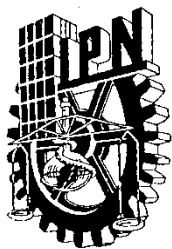
Dr. Amadeo José Argüelles Cruz

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES



Dr. Luis Alfonso Villa Vargas





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 05 del mes de agosto del año 2013, el que suscribe Marco Antonio Acevedo Mosqueda alumno del Programa de Doctorado, con número de registro A030095, adscrito al **Centro de Investigación en Computación**, manifiesto que es el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Oleksiy Pogrebnyak** y cede los derechos del trabajo titulado “REDES NEURONALES Y MEMORIAS ASOCIATIVAS EN ARREGLOS DE ANTENAS ADAPTATIVOS”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones macevedo@ipn.mx y olek@cic.ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Marco Antonio Acevedo Mosqueda.

RESUMEN

En este trabajo se propone una alternativa para inicializar los pesos en el algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa para formar el patrón de radiación de un arreglo de antenas faseados. Se utiliza una memoria asociativa bidireccional Alfa-Beta para formar el patrón con el objetivo de reducir el número de iteraciones que se requieren, por ejemplo, para introducir nulos en las direcciones del jitter. Es importante reducir el número de iteraciones ya que el patrón de radiación se puede adaptar en el menor tiempo posible. También, la propuesta para la inicialización de los pesos se basa en el método de ventaneo utilizado para reducir los lóbulos secundarios en arreglos de antenas fijos. En este trabajo se utilizan también los coeficientes de un filtro FIR pasa bajas para inicializar el vector de pesos de la red perceptrón multicapa y el algoritmo LMS. Como primer paso se modifica el patrón de radiación del arreglo agregando un nulo en la dirección de una señal de interferencia conocida a priori. Para verificar la reducción en el número de iteraciones, fueron calculados el error cuadrático medio, la relación señal a ruido más interferencia y se grafica el patrón de radiación. Además, fue calculada la correlación cruzada normalizada entre la señal deseada y la salida de la red en cada iteración. Los resultados obtenidos muestran que con la metodología propuesta para la formación de haz que utiliza memorias asociativas bidireccionales Alfa-Beta se logra la adaptación del patrón de radiación de en menor tiempo y cumple con el objetivo de eliminar señales de interferencia con un proceso simple y en menor tiempo de procesamiento.

ABSTRACT

In this work, a new proposal to initialize the weights in LMS algorithm and multilayer perceptron neuronal network to form the directivity pattern of a faded antenna array is proposed. An Alpha-Beta bidirectional associative memory is used to form the pattern to reduce the number of iterations required, for example, to introduce zeroes in the jitter directions. It is important to reduce the number of iterations since the radiation pattern can be adaptive in the shortest possible time. The proposed method also based on the window method to reduce the secondary lobes in fixed antenna arrays. Low-pass FIR filter coefficients are employed to initialize the weighting vector in the multilayer perceptron and LMS algorithm as well. The radiation pattern is modified by introducing a null in the direction which corresponds to a priory known interference.

To test the proposal, mean square error, and signal to noise relation plus interference were calculated, and the obtained radiation patterns were graphed; additionally, the normalized cross-correlation between the desired and output signal at each iteration were calculated. The obtained results show that the proposed methodology for beam forming based on the use of the Alpha-Beta bidirectional associative memories permits to adapt the radiation pattern faster and achieves the objective of eliminating interference signals with a simple and faster processing.

Índice General

	Pág.
Resumen	i
Abstract	ii
Índice general	iii
Índice de tablas	vi
Índice de figuras	iv
Capítulo 1: Introducción	1
1.1 Contexto	1
1.2 Problema a resolver	1
1.3 Objetivo	2
1.4 Contribuciones	3
1.5 Organización del documento	3
Capítulo 2: Antecedentes	4
2.1 Sistemas de radar	4
2.2 Sistema adaptativo de antenas	7
2.3 Optimización de pesos usando señal de referencia	10
2.4 Estado del arte	12
Capítulo 3: Marco teórico	14
3.1 Arreglo de antenas fijo	14
3.1.1 Arreglo de antenas tipo dipolo	15
3.1.2 Factor de arreglo	16
3.2 Sistema adaptativo de antenas	18
3.2.1 Filtro adaptativo	22
3.2.2 Procesadores adaptativos de señales	24
3.3 Redes neuronales	28
3.3.1 Reseña histórica	29
3.3.2 Modelo biológico	30
3.3.3 Modelo neuronal	31
3.3.4 Funciones de activación y transferencia	33
3.3.5 Arquitectura de redes neuronales	36

3.3.6 Aprendizaje de redes neuronales	38
3.3.7 perceptrón multicapa	39
3.4 Algoritmo LMS	41
3.4.1 Reseña histórica del LMS	42
3.4.2 Convergencia de la media del vector de pesos	44
3.4.3 Constantes de tiempo y curvas de aprendizaje	47
3.4.4 Desajustes con la adaptación LMS	48
3.4.5 La adaptación del algoritmo MODO II	49
3.4.6 La adaptación del algoritmo MODO I	51
3.5 Memorias Asociativas	52
3.5.1 Conceptos básicos	52
3.5.2 Memorias asociativas $\alpha - \beta$	54
3.5.2.1 Memorias heteroasociativas Alfa-Beta	58
3.5.2.2 Memorias autoasociativas Alfa-Beta	60
3.5.3 Memorias asociativas bidireccionales Alfa-Beta	61
3.5.4 Tipos de ruido	64
3.5.5 Código Johnson-Möbius modificado	64
Capítulo 4: Modelo propuesto	66
4.1 Filtros FIR y ventanas	67
4.2 Reducción de lóbulos secundarios	70
4.3 Red neuronal perceptrón multicapa modificada	71
4.4 Algoritmo LMS modificado	77
4.5 Aplicación de las memorias asociativas α - β para la eliminación de lóbulos secundarios	82
Capítulo 5: Resultados	84
5.1 Filtros FIR y ventanas propuestas	84
5.2 SINR, MSE y correlación cruzada normalizada	86
5.3 Gráficas del patrón modificado	89
5.3.1 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° con LMS	89
5.3.2 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a -45.5° con LMS	93
5.3.3 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 24° con LMS	96
5.3.4 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a -24° con LMS	100
5.3.5 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° con perceptrón multicapa	103
5.3.6 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a -45.5° con perceptrón multicapa	106

5.3.7 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 24° con perceptrón multicapa	108
5.3.8 Patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a -24° con perceptrón multicapa	111
5.3.9 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° con 5 iteraciones	113
5.3.10 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° con 7 iteraciones	116
5.3.11 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° con 9 iteraciones	118
5.3.12 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° con 12 iteraciones	121
5.3.13 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 24° con 5 iteraciones	123
5.3.14 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 24° con 7 iteraciones	126
5.3.15 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 24° con 9 iteraciones	128
5.3.16 Comparación de los patrones de radiación en la eliminación del lóbulo secundario a 24° con 12 iteraciones	131
5.4 BAM Alfa-Beta	133
5.5 Análisis de complejidad de algoritmos	136
5.5.1 BAM Alfa-Beta	137
Conclusiones y trabajo futuro	141
Conclusiones	141
Trabajo futuro	142
Relación de publicaciones propias	143
Referencias	144
Apéndice	I



Índice de Tablas

	Pág.	
2.1	Clasificación del radar basada en la frecuencia operativa.	5
5.1	Coeficientes usados para la inicialización del proceso adaptativo	85
5.2	Resultados del error cuadrático medio para la inserción del nulo a $\pm 24^\circ$	86
5.3	Resultados de la relación señal a ruido más interferencia para la inserción del nulo a $\pm 24^\circ$	87
5.4	Resultados de la correlación cruzada normalizada (%) para la inserción del nulo a $\pm 24^\circ$	87
5.5	Resultados del error cuadrático medio para la inserción del nulo a $\pm 45.5^\circ$	88
5.6	Resultados de la relación señal a ruido más interferencia para la inserción del nulo a $\pm 45.5^\circ$	88
5.7	Resultados de la correlación cruzada normalizada (%) para la inserción del nulo a $\pm 45.5^\circ$	89
5.8	Resultados de la BAM Alfa-Beta	134



Índice de Figuras

	Pág.	
2.1	Diagrama a bloques simplificado de un sistema de radar de pulsos	6
2.2	Diagrama a bloques simplificado de un sistema de radar de pulsos con arreglo adaptativo	7
2.3	Sistema del arreglo adaptativo de antenas	8
2.4	Sistema del arreglo adaptativo de antenas usando señal de referencia	11
3.1	Representación física del arreglo lineal de n elementos	15
3.2	Patrón de radiación de un sistema adaptativo de 7 elementos	16
3.3	Arreglo asimétrico de antenas tipo dipolo	17
3.4	Se coloca un nulo en la dirección del ruido a 45.5°	19
3.5	Representación lineal de un arreglo antenas	24
3.6	Representación de un elemento adaptativo de procesamiento de señal	24
3.7	Estructura de la neurona biológica	30
3.8	Modelo de una neurona artificial	32
3.9	Representación gráfica de la función tangente hiperbólica	34
3.10	Representación gráfica de la función logística	35
3.11	Representación gráfica de la función Gaussiana	35
3.12	Red neuronal de una sola capa	36
3.13	Red neuronal multicapa	37
3.14	Red neuronal recurrente	37
3.15	Aprendizaje supervisado	38
3.16	Aprendizaje no supervisado	39

3.17	Red neuronal multicapa a utilizar	41
3.18	Inyección de una señal piloto a un arreglo de antenas	50
3.19	Inyección de una señal piloto a un arreglo de n antenas	50
3.20	Adaptación del modo simple con la señal piloto	52
3.21	Esquema de una memoria asociativa	53
3.22	Esquema general de la BAM Alfa-Beta	62
3.23	Etapas 1 y 2 de la fase de aprendizaje de la BAM Alfa-Beta en la dirección $x \rightarrow y$	62
3.24	Tipos de ruido	64
4.1	Diagrama a bloques del modelo propuesto para la cancelación de interferencias en señales de radar.	66
4.2	Respuesta en frecuencia de filtros ideales	68
4.3	Respuesta en magnitud normalizada $ W(e^{j\omega}) $	70
4.4	Arquitectura de la red neuronal perceptrón multicapa	76
4.5	Arquitectura de la red neuronal con 14 neuronas de entrada, 1 capa oculta y una capa de salida	77
4.6	Ejemplo de configuración de un arreglo para la eliminación de ruido	79
4.7	Algoritmo LMS modificado	82
4.8	Fase de aprendizaje y recuperación de la BAM Alfa-Beta	83
5.1	Vector de pesos propuestos para la inicialización	85
5.2	Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 5 iteraciones	90
5.3	Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 10 iteraciones	91
5.4	Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 12 iteraciones	92
5.5	Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 25 iteraciones	93
5.6	Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 5 iteraciones	94
5.7	Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 10 iteraciones	94
5.8	Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 12 iteraciones	95
5.9	Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 25 iteraciones	96
5.10	Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 5 iteraciones	97
5.11	Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 10 iteraciones	98
5.12	Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 12 iteraciones	99
5.13	Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 25 iteraciones	100
5.14	Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 5 iteraciones	101
5.15	Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 10 iteraciones	101
5.16	Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 12 iteraciones	102
5.17	Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 25 iteraciones	103
5.18	Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 5 iteraciones	104
5.19	Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 10 iteraciones	104
5.20	Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 12 iteraciones	105
5.21	Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 25 iteraciones	105
5.22	Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 5 iteraciones	106
5.23	Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 10 iteraciones	107
5.24	Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 12 iteraciones	107
5.25	Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 25 iteraciones	108
5.26	Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 5 iteraciones	109
5.27	Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 10 iteraciones	109
5.28	Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 12 iteraciones	110
5.29	Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 25 iteraciones	110

5.30	Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 5 iteraciones	111
5.31	Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 10 iteraciones	112
5.32	Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 12 iteraciones	112
5.33	Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 25 iteraciones	113
5.34	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana triangular	114
5.35	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana rectangular	114
5.36	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana Hamming	115
5.37	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana FPb	115
5.38	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana triangular	116
5.39	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana rectangular	117
5.40	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana Hamming	117
5.41	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana FPb	118
5.42	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana triangular	119
5.43	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana rectangular	119
5.44	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana Hamming	120
5.45	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana FPb	120
5.46	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana triangular	121
5.47	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana rectangular	122
5.48	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana Hamming	122
5.49	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana FPb	123
5.50	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana triangular	124
5.51	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana rectangular	124
5.52	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana Hamming	125
5.53	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana FPb	125
5.54	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana triangular	126

5.55	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana rectangular	127
5.56	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana Hamming	127
5.57	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana FPb	128
5.58	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana triangular	129
5.59	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana rectangular	129
5.60	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana Hamming	130
5.61	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana FPb	130
5.62	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana triangular	131
5.63	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana rectangular	132
5.64	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana Hamming	132
5.65	Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana FPb	133
5.66	Gráfica de $f(n)$ y $O(n^2)$. Se comprueba la desigualdad, por lo tanto, el algoritmo es $O(n^2)$.	140

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 CONTEXTO

1

En el mundo existen diversos trabajos alrededor de las señales radar. Los temas que se abarcan van desde el diseño de filtros hasta el estudio de propagación de ondas en diversos medios, y las áreas del conocimiento que participan son muchas. Estos sistemas de comunicación requieren de algoritmos de procesamiento digital de señales tanto para el diseño de filtros, cancelación de ruido y rotación de patrón de radiación. Estas áreas han sido estudiadas por diversos grupos de trabajo que han realizado el análisis de estos problemas utilizando herramientas como lo son las wavelets y la teoría de arreglos de antenas.

Por otro lado, las investigaciones de arreglos de antenas utilizados en el procesamiento de señales de radar este tipo de sistemas de comunicaciones sólo se basan en el uso de arreglos de antenas tipo dipolo, principalmente. Aunque la teoría de este tipo de arreglos se utilizará en este trabajo, la principal diferencia radica es que se definirá el factor de arreglo de antenas lo que permitirá definir el tipo de elementos.

1.2 EL PROBLEMA A RESOLVER

Los sistemas de radar han sido estudiados e implementados ampliamente alrededor del mundo. Dichos estudios van desde el diseño de arreglos de antenas hasta el procesamiento digital de señales radar. Algunos de los principales problemas son la elección del arreglo de antenas para definir un patrón de radiación adecuado para la formación de la imagen radar y la reducción de ruido e interferencias. Debido a que el patrón de radiación de los arreglos lineales de antenas no son los ideales para usarse en radares, es necesario adaptar dichos patrones a las necesidades de diseño, para ello se hace uso de filtrado en los dominios de espacio y frecuencia con el fin de mejorar los sistemas de antenas adaptativos. Con esto es posible reducir la sensibilidad del sistema de recepción, a las fuentes de ruido direccional para el sistema de radar.

Cuando en un sistema de radar se genera una señal, después de haber realizado un recorrido completo (tiempo que tarda la señal en ir y regresar), lo que se espera encontrar de forma ideal es la señal radar generada. Sin embargo esto no es posible, ya que durante su trayectoria la señal puede encontrar diversos obstáculos que pueden estar o no en movimiento y que le provocan, al ser reflejada por estos, una distorsión (ruido) y cambio incluso en su frecuencia de operación. Es precisamente esta señal contaminada de ruido la que es de interés en los sistemas de radar, porque proporciona la información necesaria para reconocer y dar seguimiento al blanco detectado.

El primer paso y de gran importancia consiste en reducir el ruido que conlleva la señal radar reflejada y evitar las interferencias de otras fuentes. Actualmente se logra evitar las interferencias modificando el lóbulo del patrón de radiación utilizando antenas inteligentes. Existen algoritmos que realizan la adaptación del patrón de radiación, de entre los más utilizados están el algoritmo LMS (*Least Mean*

Squares) y las redes neuronales. En ambos casos se requiere iniciar un vector de pesos, entre otros parámetros, para que los algoritmos comiencen su proceso de adaptación. Este proceso actualmente puede tomar entre algunas decenas o centenas de iteraciones dependiendo de la inicialización de los pesos. El tiempo que tardan los algoritmos en encontrar la solución óptima de los pesos es esencial cuando se trata de procesos que se ejecutan en tiempo real. Es por eso que existen algunas formas para la inicialización de este vector de pesos, entre las usadas se tiene: iniciar los pesos con un valor igual a uno o a cero, tomar valores aleatorios entre cero y uno [1] u obtener la matriz de autocorrelación de señal de entrada para proponer los valores del vector [2] (en esta última además se tiene que tomar en cuenta el tiempo de cálculo de la matriz).

Debido a lo anterior, en este trabajo se hacen dos propuestas, la primera es una nueva forma para la inicialización de los pesos. En este caso, se utiliza la técnica de los arreglos fijos de antenas, la cual se modifica para proponer una nueva forma rápida y sencilla que obtiene los valores iniciales de los pesos, y que además, permite obtener los valores óptimos de los pesos en un menor número de iteraciones, comparando con las técnicas mencionadas. Esta propuesta se implementa en el algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa usando un arreglo de antenas de 7 elementos. La segunda idea es utilizar memorias asociativas para obtener los coeficientes óptimos que permiten la cancelación de lóbulos secundarios basándose en el conocimiento anticipado de estos coeficientes y sus ángulos correspondientes.

1.3 OBJETIVO

"Desarrollar una metodología nueva de procesamiento de señales para la adaptación de patrones de radiación de antenas de radar para la reducción de ruido en menos tiempo de procesamiento."

Objetivos Particulares

- Implementar los algoritmos en arreglos fijos y de antenas adaptativos que modifican el patrón de radiación, el algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa.
- Proponer una alternativa para la inicialización de los pesos en arreglos adaptativos de antenas.
- Desarrollo del algoritmo para la cancelación de interferencias modificando el patrón de radiación del arreglo de antenas radar, utilizando el algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa.
- Implementar las memorias asociativas bidireccionales para la obtención de los coeficientes óptimos para la eliminación de lóbulos secundarios.
- Realizar un análisis comparativo de resultados de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa utilizando la inicialización con ceros (trabajo original) con la propuesta en este trabajo para verificar si alguno ofrece mejores resultados.

1.4 CONTRIBUCIONES

En la inicialización convencional del vector de pesos en el algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa se utilizan ceros o valores aleatorios, para lograr la adaptación del patrón de radiación.

En este trabajo se obtienen dos productos originales:

- a. En primer lugar, se ha demostrado que en general el uso de los coeficientes de diferentes ventanas para arreglos fijos, se puede utilizar para inicializar el vector de pesos en el algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa. Esta inicialización ayuda a reducir el número de iteraciones que requieren estos algoritmos para insertar nulos en el patrón de radiación y disminuir la relación señal a ruido e interferencia.
Por otro lado, se propone utilizar los coeficientes de un filtro pasa bajas normalizado como opción de inicializar el vector de pesos de los algoritmos mencionados.
- b. La segunda aportación es la utilización de modelos asociativos para la eliminación de lóbulos secundarios. En este trabajo se propone un patrón de radiación que puede ser utilizado en un sistema radar ya que se eliminan las posibles interferencias recibidas en los lóbulos secundarios.

1.5 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

En el Capítulo 2 se presentan los conceptos que definen un sistema de radar. Se describe la arquitectura de un sistema adaptativo de antenas y se presenta el estado del arte, describiendo de manera cronológica los trabajos que abordan los algoritmos que pretenden resolver problemas similares al tratado en este documento.

En el Capítulo 3, se describen las herramientas necesarias para el desarrollo de la presente propuesta. Se definen las redes neuronales y se presenta el diseño de los parámetros que permiten obtener la arquitectura de una red neuronal. Posteriormente, se aborda, nuevamente, el tópico de los sistemas adaptativos de antenas (SSA) pero enfocado, particularmente, al desarrollo de nuestra propuesta. Se describe el algoritmo LMS que permite llevar a cabo el proceso de adaptación de los SSA y, por último, se introduce el tema de memorias asociativas.

En el Capítulo 4, se presenta el modelo propuesto para la eliminación de ruido en sistemas de radar. Se describen cada una de las etapas, teniendo como base los algoritmos descritos en el Capítulo 3, pero introduciendo las modificaciones necesarias que implementan las contribuciones de esta tesis.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos de esta nueva propuesta.

Posteriormente, se describen las conclusiones obtenidas de la aplicación de este nuevo algoritmo.

Finalmente, se presentan los trabajos futuros derivados de este trabajo.

Capítulo 2

ANTECEDENTES

En este capítulo se presenta la definición del sistema radar y se hace énfasis en el arreglo de antenas. Este sistema radiador sirve para transmisión y recepción de las ondas electromagnéticas, independientemente de la modulación o de la clase del radar. Sin embargo, su desempeño afecta de manera considerable a todo el sistema radar, ya que el patrón de radiación del arreglo de antenas define el área de cobertura del radar y recibe las señales deseadas así como las señales de ruido e interferencias. Para reducir la recepción las señales no deseadas, se puede modificar el patrón de radiación y así evitar disminuir la relación señal a ruido expresada en dB. Como primer punto se presenta la definición y clasificación del radar así como los elementos que lo conforman. Posteriormente, se muestra un radar de pulsos que utiliza un sistema adaptativo de antenas y se explica cómo modificar el patrón del arreglo utilizando pesos en los elementos de antena. Finalmente, se muestra la forma de calcular los pesos óptimos usando una señal de referencia.

4

2.1 SISTEMAS DE RADAR

La palabra radar es una abreviación de *Radio Detection and Ranging* (radio detección y rastreo). En general, los sistemas de radar utilizan señales moduladas y antenas directivas para transmitir energía electromagnética en un volumen específico en el espacio para buscar objetos.

Los objetivos dentro del volumen de búsqueda reflejarán porciones de esta energía (pulsos de retorno o ecos) de regreso al radar. Estos ecos son procesados por el radar para extraer información del objeto como rango (alcance), posición angular u otras características relacionadas con el objetivo.

Los radares pueden ser clasificados por su tipo en sistemas de radar para aeronaves, barcos, naves espaciales y con base en tierra. También pueden ser clasificados en numerosas categorías basadas en las características específicas del radar, como la banda de frecuencia, tipo de antena y forma de onda utilizada.

Otra clasificación se hace de acuerdo a la funcionalidad del radar. Esto incluye clima, adquisición y búsqueda, rastreo, control de fuego, alarma temprana, sobre el horizonte, rastreador de terreno. Los radares de selección de fase utilizan antenas de selección de fase, también son llamados radares de multifunción. Una selección de fase es una antena compuesta, formada por dos o más radiadores básicos. Este tipo de antena sintetiza el espectro directivo, que puede ser dirigido mecánica o electrónicamente. La dirección electrónica se logra controlando la fase de la corriente con la cual es alimentado.

Los radares a menudo son clasificados por el tipo de formas de onda que usan o por su frecuencia operativa. Considerando primero la forma de onda, los radares pueden ser de onda continua (CW, *Continuous Wave*) o radares pulsados (PR, *Pulse Radar*). Los radares CW emiten continuamente energía electromagnética y usan antenas transmisoras y receptoras separadas. Los radares CW no modulados pueden medir con precisión la velocidad radial del objeto (frecuencia Doppler) y posición angular. La información del rango de los objetivos no puede ser extraída sin utilizar algunas formas de

modulación. El uso primario de los radares CW no modulados es rastrear y buscar la velocidad de objetivos y también se utiliza como guía de misiles. Los radares pulsados utilizan trenes de pulso (principalmente con modulación). En esta categoría los sistemas de radar pueden ser clasificados con base en a la frecuencia de repetición de pulsos (PRF, *Pulse Recurrence Frequency*), como de PRF bajo, PRF mediano y PRF alto.

Los radares de PRF bajo son principalmente usados para rangos donde la velocidad del objeto no interesa. Los radares de PRF alto son utilizados para medir la velocidad del objeto. Los radares de onda continua, como los radares pulsados pueden medir el rango del objeto y la velocidad radial utilizando diferentes esquemas de modulación.

En la tabla 2.1 se presenta una clasificación de los radares en función de su frecuencia de operación. Se debe mencionar que dependiendo de esta frecuencia de operación es la aplicación que tendrá el radar. Como se mencionó este trabajo considera un radar pulsado, pero no se acota a alguna aplicación en particular. Por lo que las dimensiones del arreglo de antenas se expresarán en función de la longitud de onda. Esto permite aplicar los algoritmos propuestos a la frecuencia de operación que se requiera.

Tabla 2.1. Clasificación del radar basada en la frecuencia operativa.

DESIGNACIÓN DE BANDA	FRECUENCIA (GHZ)	NUEVA DESIGNACIÓN DE BANDA
HF	0.003 – 0.03	A
VHF	0.03 – 0.3	A<0.25; B>0.25
UHF	0.3 – 1.0	B<0.5; C>0.5
Banda L	1.0 – 2.0	D
Banda S	2.0 – 4.0	E<3.0; F>3.0
Banda C	4.0 – 8.0	G<6.0; H>6.0
Banda X	8.0 – 12.5	I<10.0; J>10.0
Banda Ku	12.5 – 18.0	J
Banda K	18.0 – 26.5	J<20.0; K>20.0
Banda Ka	26.5 – 40.0	K
MMW	Normalmente > 34.0	L<60.0; M>60.0

Por ejemplo, los radares de alta frecuencia utilizan ondas electromagnéticas reflejadas fuera de la ionosfera para detectar objetos más allá del horizonte. Las bandas de muy alta frecuencia (VHF) y ultra alta frecuencia (UHF) son usadas en rangos muy largos y en radares de alerta temprana (EWR, *Early Warning Radar*).

La figura 2.1 muestra un diagrama a bloques simplificado de un radar de pulsos. El bloque de control de tiempo genera las señales de sincronización del sistema, una señal modulada es generada y enviada a la antena a través del bloque transmisor/modulador. La conmutación entre el modo de recepción y transmisión de la antena es controlada por el duplexor. El duplexor permite que la antena sea usada tanto en transmisión como en recepción. Durante la transmisión, el duplexor dirige la energía electromagnética hacia la antena, alternativamente, en la recepción dirige el eco de radar recibido hacia el receptor. El receptor amplifica la señal recibida y la prepara para el procesamiento correspondiente. La extracción de la información del objetivo es llevada a cabo por el bloque de procesamiento.

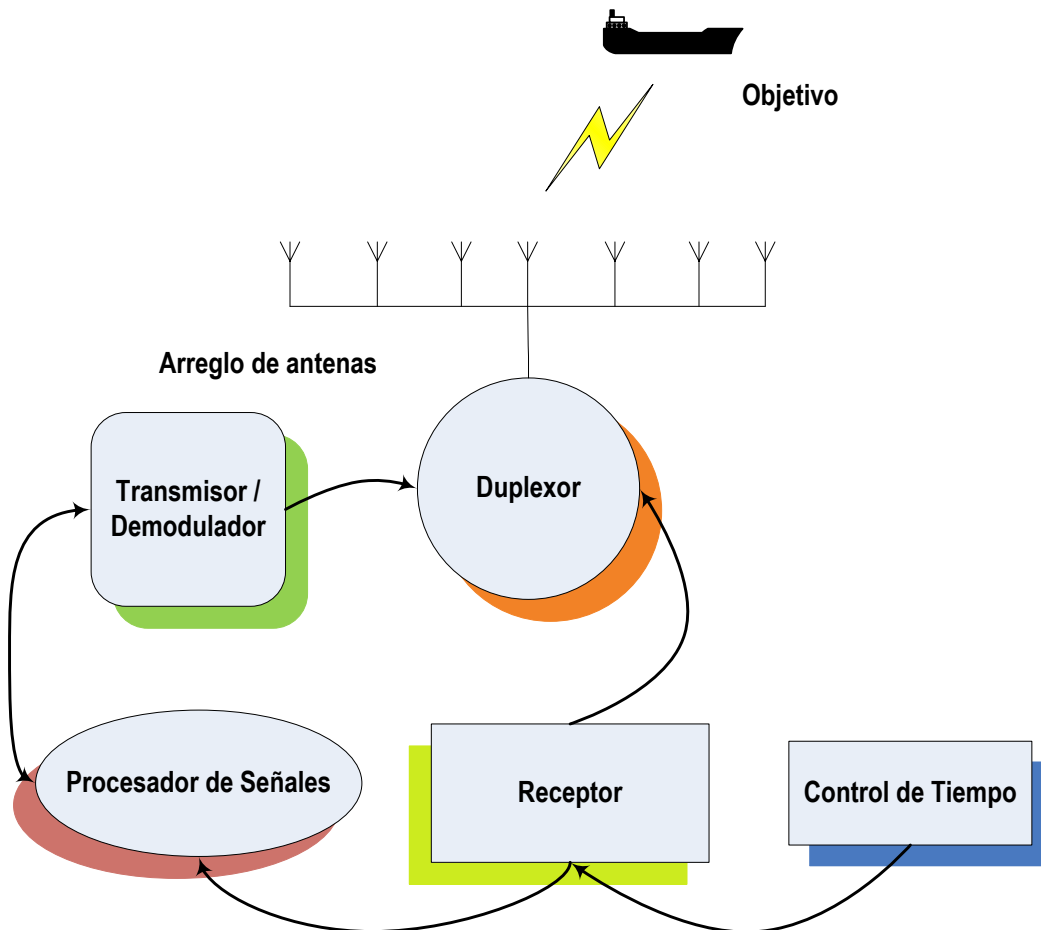


Figura 2.1 Diagrama a bloques simplificado de un sistema de radar de pulsos.

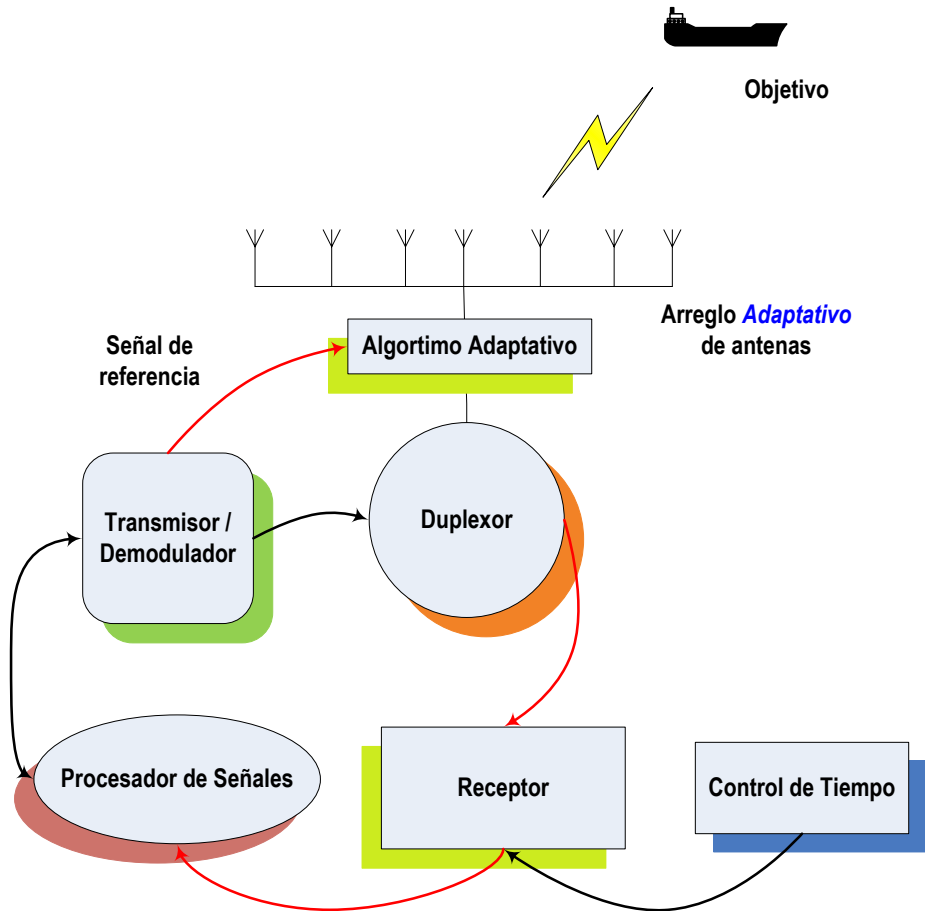


Figura 2.2 Diagrama a bloques simplificado de un sistema de radar de pulsos con arreglo adaptativo.

Uno de los propósitos específicos de este trabajo es la formación del haz de radar por arreglo de antenas. En la figura 2.2 se puede observar que tiene un nuevo bloque denominado Algoritmo Adaptativo. Al colocar este algoritmo se tiene la posibilidad de modificar el patrón de radiación del arreglo para evitar señales de interferencia, por lo que ahora se tiene un arreglo de antenas adaptativo o antenas inteligentes. Una característica principal en los algoritmos propuestos (LMS y perceptrón multicapa) es que para su implementación se requiere el conocimiento de una señal deseada o señal de referencia, esta señal se obtiene del transmisor. Esta señal se utiliza para entrenar al algoritmo en la búsqueda de los pesos que modifican el patrón de radiación y debe estar presente en todo momento, por supuesto cuando se transmite y obligatoriamente cuando se recibe. Esta modificación permite al receptor tener una señal más limpia al haberse eliminado señales de interferencia. Esto ayuda en la etapa de procesar las señales y obtener la información que se requiera.

2.2 SISTEMA ADAPTATIVO DE ANTENAS.

Considere el arreglo de antenas de L elementos mostrado en la figura 2.3 donde se muestra que cada señal recibida por cada elemento es multiplicada por un peso complejo y finalmente todas se suman para formar la salida del arreglo. En esta figura no se muestran componentes como preamplificadores,

filtros pasa banda y otros componentes electrónicos que forman el radar. La salida del arreglo puede obtenerse como:

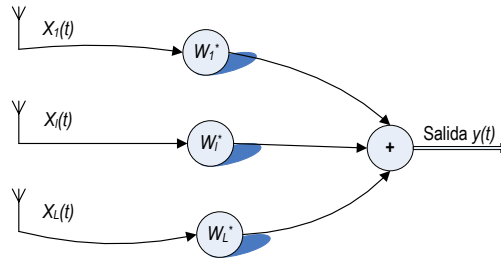


Figura 2.3 Sistema del arreglo adaptativo de antenas.

$$y(t) = \sum_{l=1}^L w_l^* x_l(t) \tag{2.1}$$

donde w_l^* es el conjugado complejo de w_l .

Los pesos del arreglo de antenas se representan mediante el siguiente vector:

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_L]^T \tag{2.2}$$

Y la señal de entrada del arreglo como:

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)] \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{x}^T(t)$ significa la transpuesta del vector $\mathbf{x}(t)$. La señal de salida del arreglo de antenas se obtiene:

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \tag{2.4}$$

donde \mathbf{w}^H es la Hermitiana transpuesta del vector \mathbf{w} . Se puede observar que para obtener la señal de salida se debe multiplicar cada señal por su peso correspondiente. Mientras que en la notación vectorial, esta operación se realiza tomando el producto interno entre el vector de pesos y la señal de entrada como se indica en la ecuación (2.4).

La potencia de salida del arreglo en cualquier momento está dada por el cuadrado de la magnitud de la señal de salida, esto es:

$$P(t) = |y(t)|^2 = y(t)y(t)^* \tag{2.5}$$

Sustituyendo $y(t)$ de la ecuación (2.4), la potencia de salida se convierte en:

$$P(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w} \tag{2.6}$$

Si las componentes de $\mathbf{x}(t)$ se pueden modelar como procesos estacionarios de media cero, entonces para un \mathbf{w} dado la potencia media de salida del arreglo se obtiene tomando la esperanza condicional sobre $\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{w}) &= E[\mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w}] \\
 &= \mathbf{w}^H E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)] \mathbf{w} \\
 &= \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $E[\cdot]$ es el operador de esperanza y \mathbf{R} es la matriz de correlación del arreglo expresada como:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)] \tag{2.8}$$

9

Cada elemento de esta matriz es la correlación entre varios elementos. Por ejemplo, R_{ij} es la correlación entre el i -ésimo y el j -ésimo elemento del arreglo.

Se considerará que existe una fuente de una señal deseada en presencia de una interferencia no deseada y ruido aleatorio. El ruido aleatorio incluye tanto el ruido electrónico como el ruido de fondo. Se define $\mathbf{x}_S(t)$ como el vector de la señal deseada, $\mathbf{x}_I(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ como la señal de interferencia no deseada y el ruido aleatorio, respectivamente. Debido a estas señales, a la salida del sistema se tienen $y_S(t)$, $y_I(t)$ y $y_n(t)$ que se obtienen al calcular el producto interno entre el vector de pesos y $\mathbf{x}_S(t)$, $\mathbf{x}_I(t)$ y $\mathbf{n}(t)$, dadas por:

$$y_S(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}_S(t) \tag{2.9}$$

$$y_I(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}_I(t) \tag{2.10}$$

$$y_n(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{n}(t) \tag{2.11}$$

Las matrices de correlación del arreglo debido a la señal deseada, la interferencia y el ruido aleatorio se definen como:

$$R_S = E[\mathbf{x}_S(t) \mathbf{x}_S^H(t)] \tag{2.12}$$

$$R_I = E[\mathbf{x}_I(t) \mathbf{x}_I^H(t)] \tag{2.13}$$

$$R_n = E[\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t)] \tag{2.14}$$

Se debe observar que R es la suma de las tres matrices, por lo que:

$$R = R_S + R_I + R_n \tag{2.15}$$

Por lo que la potencia media de salida P_S , P_I , y P_n debido a la señal deseada, a la interferencia y al ruido aleatorio, respectivamente, están dadas por:

$$P_S = \mathbf{w}^H R_S \mathbf{w} \tag{2.16}$$

$$P_I = \mathbf{w}^H R_I \mathbf{w} \tag{2.17}$$

$$P_n = \mathbf{w}^H R_n \mathbf{w} \tag{2.18}$$

La potencia media a la salida del arreglo debida a la interferencia y al ruido aleatorio P_N , está dada por:

$$P_N = P_I + P_n \quad (2.19)$$

Se define a P_N como la potencia media de ruido a la salida del arreglo. Aquí se considera que la señal de ruido contiene el ruido aleatorio y las contribuciones de todas las fuentes diferentes a la señal deseada. Esto a veces se refiere como ruido más interferencia. Sustituyendo 2.17 y 2.18 en 2.19,

$$\begin{aligned} P_N &= \mathbf{w}^H R_I \mathbf{w} + \mathbf{w}^H R_n \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H (R_I + R_n) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ahora se define a R_N como la matriz de correlación de ruido del arreglo, esto es,

$$R_N = R_I + R_n \quad (2.21)$$

Entonces P_N se puede expresar en términos del vector de pesos y R_N como

$$P_N = \mathbf{w}^H R_N \mathbf{w} \quad (2.22)$$

Por lo que la relación señal a ruido de salida (SNR, *Signal-to-Noise Ratio*), algunas veces referida como la relación señal a ruido más interferencia (SINR, *Signal to Interference plus Noise Ratio*), se define como la relación entre la potencia media de salida debido a la señal deseada P_S y la potencia media de ruido a la salida del arreglo P_N , quedando como,

$$SINR = \frac{P_S}{P_N} \quad (2.23)$$

Sustituyendo 2.16 y 2.22 en 2.23 se tiene que

$$SINR = \frac{\mathbf{w}^H R_S \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H R_N \mathbf{w}} \quad (2.24)$$

Los pesos del arreglo determinan el desempeño del sistema de antenas. En este trabajo se utilizan dos algoritmos para determinar los pesos del sistema. Uno será el algoritmo LMS y el otro la red neuronal perceptrón multicapa. Ambos métodos pueden introducir un nulo en la dirección de la señal de interferencia para aumentar la relación señal ruido.

En ambos casos, se inicializará el vector de pesos con una nueva propuesta para reducir el número de iteraciones y encontrar los pesos finales que adaptan el patrón de radiación.

2.3 OPTIMIZACIÓN DE LOS PESOS USANDO SEÑAL DE REFERENCIA

Una estructura de banda angosta de un formador de haz que emplea una señal de referencia para calcular los pesos se muestra en la figura 2.4.

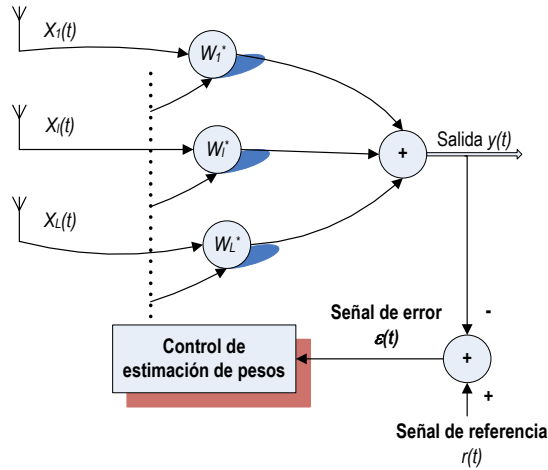


Figura 2.4 Sistema del arreglo adaptativo de antenas usando señal de referencia.

Se puede observar que a la señal de salida del arreglo se le resta la señal de referencia (como se mencionó esta señal de referencia se toma del bloque del transmisor/demodulador) para formar la señal de error $\varepsilon(t) = r(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ que se utilizará para la estimación de pesos. Los pesos se ajustan de tal manera que se minimiza el error cuadrático medio entre la señal de salida del arreglo y la señal de referencia. El error cuadrático medio $\xi(\mathbf{w})$ para un vector de pesos es

$$\begin{aligned}
 \xi(\mathbf{w}) &= E[|\varepsilon(t)|^2] \\
 &= E[\varepsilon(t)\varepsilon(t)^*] \\
 &= E\left[\left\{r(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)\right\} \left\{r(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)\right\}^*\right] \\
 &= E\left[r(t)r(t)^* + \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)r(t)^* - r(t)\mathbf{x}^H(t)\mathbf{w}\right] \\
 &= E\left[r(t)r(t)^*\right] + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{z} - \mathbf{z}^H \mathbf{w}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

donde

$$\mathbf{z} = E[\mathbf{x}(t)r(t)^*]
 \tag{2.26}$$

es la correlación cruzada entre la señal de referencia y el vector de la señal de entrada $\mathbf{x}(t)$. La superficie del error cuadrático medio (MSE) es una función cuadrática de \mathbf{w} y se puede minimizar al igualar a cero el gradiente con respecto a \mathbf{w} , esta solución proporciona el vector de pesos óptimos, esto es

$$\left. \frac{\partial \xi(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{MSE}}} = 0
 \tag{2.27}$$

Al realizar la derivada en ambos lados de la ecuación 2.25 se obtiene el gradiente del MSE con respecto a \mathbf{w} , quedando

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{z}
 \tag{2.28}$$

Sustituyendo 2.28 en 2.27 y resolviendo, se obtiene la solución de la ecuación bien conocida de Wiener-Hoff para los pesos óptimos

$$\hat{\mathbf{w}}_{MSE} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \quad (2.29)$$

A este proceso para la obtención de pesos también se le conoce como filtro de Wiener. Al sustituir 2.28 en 2.25 se obtiene el mínimo MSE

$$\hat{\xi} = E[|r(t)|^2] - \mathbf{z}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \quad (2.30)$$

Este esquema se utiliza para obtener una señal débil en presencia de una señal fuerte de interferencia (*jammer*), haciendo la señal deseada igual a cero e inicializando los pesos para lograr un patrón omnidireccional. Este proceso comienza por cancelar la señal de interferencia y después la señal débil. Cuando se utiliza un esquema adaptativo, la señal de interferencia se cancela ajustando los pesos para colocar un nulo en la dirección de la interferencia, proporcionando una relación señal a ruido, incluyendo la interferencia, más elevada. Los arreglos que utilizan la señal deseada igual a cero para ajustar los pesos son llamados arreglos adaptativos de inversión de potencia. Los algoritmos propuestos en este trabajo utilizan el método del gradiente del MSE, para obtener la solución de la ecuación conocida de Wiener-Hoff o filtro de Wiener. Como se mencionó, ambos algoritmos ajustan los pesos del arreglo para colocar un nulo en la dirección de la interferencia, por lo que ambos requieren de un vector inicial de pesos. En este trabajo no se inicializarán los pesos para obtener un patrón de radiación omnidireccional, se partirá de un patrón diferente que haga mínimos los lóbulos secundarios desde un inicio.

2.4 ESTADO DEL ARTE

En esta sección se presentan los trabajos más importantes relacionados con la propuesta de esta tesis. Los trabajos están enfocados a la eliminación de los fenómenos de *clutter* y *jammer*.

Año	Autor y Nombre	Característica distintiva
1980	Gabriel, Adaptive Array [3]	Se realiza una analogía entre la técnica de máxima entropía y el LMS en arreglos de antenas para la cancelación de lóbulos. Otra analogía es el método de Máxima Probabilidad A posteriori con el método de Ganancia de Orden Zero.
1982	Johnson, <i>Spectral Estimation Methods</i> [4]	Se utilizan varios métodos para la solución del problema del sonar pasivo, que consiste en la localización de una fuente acústica utilizando un arreglo de antenas. Los métodos utilizados son: Probabilidad Máxima, Predicción Lineal, Eigenvectores y Máxima Entropía.
1995	Ward, <i>Partially Adaptive STAP</i> [5]	La adaptación parcial permite la reducción en tiempo de cómputo y la cantidad necesaria de información para el procesamiento
1996	Haimovich, <i>Eigencanceler</i> [6]	Utiliza los eigenvectores de la matriz de correlación espacio-tiempo que contiene la información de la distribución espacio-tiempo de las interferencias y obligan al vector de pesos adaptativo a caer en el subespacio de ruido. Utilizado para PRF medio.
1996	Raspanti <i>et al</i> , Cramér-Rao Bounds [7]	Basados en el hecho de que el <i>clutter</i> se comporta como ruido impulsivo, se propone el uso de este método para la estimación del <i>clutter</i> y de esta forma realizar la detección de objetos.
1998	Kogon <i>et al</i> , <i>Coherent Multipath</i> [8]	Hace uso de las señales terrenas reflejadas por el <i>jammer</i> . Estas señales producen un espectro espacial de coherencia que permite predecir y, por tanto, suprimir la señal directa del <i>jammer</i> de la señal principal.
2000	Peckham <i>et al</i> , <i>Reduced-Rank STAP</i> [9]	Usando STAP, la dimensión del vector de pesos adaptativo se incrementa cuando la dimensión de los datos se crece, además de incrementarse el tiempo de estimación. Se proponen métodos para la

		reducción del rango de la matriz de covarianza y acelerar el tiempo de estimación, así como la eficiencia.
2001	Sarkar <i>et al</i> , <i>D³ Least-Square STAP</i> [10]	Métodos convencionales de STAP usan enfoques estadísticos y necesitan de datos secundarios para su procesamiento. Este método tiene en dos enfoques: uno basado en el cálculo del eigenvalor generalizado de la potencia de la señal; el otro se basa en que la matriz del sistema de ecuaciones del filtro tiene una estructura del tipo Hankel, la cual puede resolverse mediante la FFT.
2006	Seliktar <i>et al</i> , <i>Monopulse Technique</i> [11]	Cuando los ángulos del <i>jammer</i> y del objetivo son muy cercanos o iguales, las técnicas de STAP no presentan buenos resultados, además de ser lentos en la estimación. La técnica de monopulso utilizada en este trabajo, presenta mejoras en los resultados y en el tiempo de cálculo.
2006	Kihira <i>et al</i> , <i>Blind Extraction of Signal Subspace</i> [12]	La señal pura del jamming se puede obtener al dejar de transmitir, durante un período constante, la señal del radar. Los datos obtenidos se utilizan para estimar el número de señales de jamming y, con esto, se suprimen estas señales de la señal deseada.
2007	Xuexia Li <i>et al</i> , <i>New beamforming method based on radial-basis function neural network processing in SaSG distribution noise environments</i> . [51]	Se aplica un algoritmo basado en la separación ciega de fuentes (blind source separation, BSS) en un esquema de comunicaciones secretas, el cual brinda mayor seguridad y precisión para señales fuente recuperadas incluso cuando el ruido de canal es muy alto.
2008	Xing Song <i>et al</i> , <i>Robust adaptive beamforming algorithm base on neural network</i> [52]	El modelado explícito de incertidumbre en la respuesta de señal deseada y una red de función de base radial neuronal de tres capas (RNFBR), que pertenece a la clase de enfoques de carga diagonales. En el algoritmo propuesto, el cálculo del vector de peso óptima es visto como un problema de asignación, que puede ser modelado utilizando una RNFBR entrenado con pares de entrada / salida.
2009	Rübsamen <i>et al</i> , <i>Fourier Domain MUSIC</i> [13]	<i>Multiple Signal Classification</i> (MUSIC) es un algoritmo para estimar la dirección de llegada de señales de múltiples fuentes. La función obtenida del espectro nulo de MUSIC es periódica en ángulo. Se utilizan las series de Fourier truncadas para la expansión de esta función de manera que se pueda hacer la estimación de las direcciones mediante una búsqueda de raíces polinomiales en vez de una búsqueda espectral.
2009	Gureken <i>et al</i> , <i>Neural network based beamforming using a cylindrical patch array</i> [53]	El arreglo cilíndrico con <i>M (microstrip patch antenna)</i> MPA elementos directivos tiene una cobertura total de 360 grados. Dividiendo la cobertura angular total de 360 grados en 12 zonas de 30 grados cada una y tomando solo algunos de los MPA elementos en las zonas mencionadas, se reducen los modelos de entrenamiento y se mejora el rendimiento del beamformer.
2011	Papari <i>et al</i> , <i>Robust adaptive beamforming algorithm based on Sampling Function Neural Network</i> [54]	El desempeño de las técnicas de beamforming adaptativo puede verse seriamente afectado por desajustes entre los vectores de dirección de la señal real y supuesta. Éste problema puede solucionarse al utilizar una red neuronal. Sampling function neural network (SFNN) es un algoritmo basado en un robusto beamforming adaptativo, el cual trata el problema de calcular los pesos de una red de antenas adaptativas como un problema de asignación.
2012	Abhishek <i>et al</i> , <i>Neural network applications in smart antenna arrays: A review</i> [55]	Las técnicas usadas en la síntesis de arreglos de antenas usualmente consideran un factor de arreglo pero no la interacción entre los elementos del arreglo y los problemas en tiempo real, lo cual provoca un error en el patrón de radiación resultante. Al utilizar redes neuronales se pueden evitar estos errores al establecer una relación entre los patrones de radiación deseados, proporcionando detalles acerca del arreglo de antenas.
2013	Zaharis <i>et al</i> , <i>Design of a novel antenna array beamformer using neural networks trained by modified adaptive dispersion invasive weed optimization based data</i> [56]	Se presenta un nuevo arreglo de antenas beamformer basado en redes neuronales. El NN entrenado se utiliza como un beamformer adaptativo que permite que el lóbulo principal de un arreglo lineal de antenas se dirija a la señal deseada, colocando los respectivos valores nulos hacia varias señales de interferencia y suprimiendo los lóbulos laterales (LSS).

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

La propuesta de este trabajo hace uso de la teoría de los arreglos fijos de antenas y adaptativos, así como de herramientas de inteligencia artificial y de procesamiento digital de señales, como lo son: redes neuronales artificiales, algoritmo LMS (Least-Mean Square) y filtros adaptativos, por lo que en este capítulo se describirá la teoría que respalda cada uno de estos conceptos.

3.1 ARREGLO DE ANTENAS FIJO

Un arreglo de antenas es un conjunto de antenas simples unidas bajo ciertas condiciones, generalmente iguales y orientadas en la misma dirección, las cuales son acomodadas en una disposición física determinada, relativamente cercanas unas respecto a otras, y además cada antena es manejada por un mismo sistema de separación (o combinador) de señal. Además, son capaces de concentrar la radiación en direcciones deseadas. En muchas aplicaciones para el diseño de antenas con un patrón directivo determinado es necesario aumentar el tamaño eléctrico de la antena o la formación de una nueva configuración de múltiples elementos de características idénticas separadas por una distancia fija llamada arreglo. El campo total del arreglo está determinado por la suma vectorial de los campos radiados de los elementos individuales. A continuación se definen los parámetros utilizados en los arreglos de antenas:

- *Patrón de radiación.* Es la representación de la radiación o recepción de la antena de los campos eléctricos en el espacio.
- *Factor de arreglo.* Es el patrón de radiación del arreglo asumiendo que los elementos usados son antenas isotrópicas.
- *Ancho de haz.* Es la apertura angular del lóbulo principal medido en un determinado nivel de potencia constante.
- *Directividad.* Es la medida constante del arreglo y es el radio de la potencia radiada por el arreglo en la dirección deseada a la potencia media radiada por el arreglo en todas las direcciones.
- *Red de lóbulos.* Son los lóbulos laterales que tienen una intensidad igual a la del lóbulo principal.

Un arreglo lineal es un arreglo compuesto de varios elementos en línea recta. Se considera como un filtro espacial que pasa las señales de una cierta dirección y rechaza las señales provenientes de otras direcciones. En un arreglo lineal de n elementos, las señales de cada elemento se multiplican por los pesos complejos W y se suman para formar la salida del arreglo.

3.1.1 ARREGLO DE ANTENAS TIPO DIPOLO.

Para la generación del patrón de radiación se necesita calcular el factor del arreglo y es necesario conocer el número de elementos y espaciamento entre cada uno de los elementos del arreglo lineal.

En la figura 3.1 se muestra el arreglo lineal de n elementos con un espaciamento de $0.5 \lambda_0$.

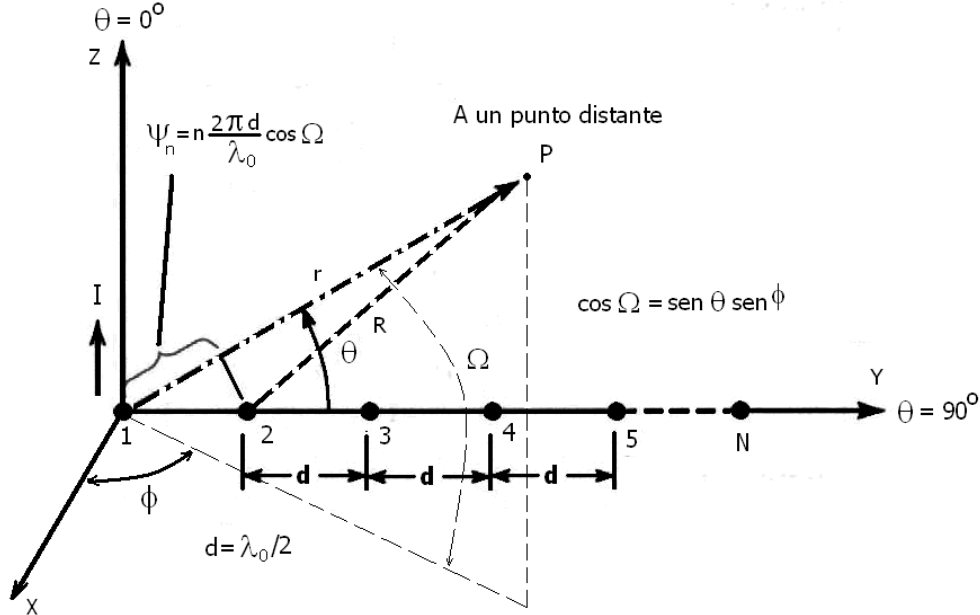


Figura 3.1. Representación física del arreglo lineal de n elementos.

El sistema capaz de cancelar interferencias se muestra en la figura 3.2.

Se puede observar en la figura 3.2, un arreglo de antenas de 7 elementos equidistantes. Los elementos de antena pueden ser considerados como fuentes isotrópicas, cuyo campo radiado está dado por la multiplicación del campo total del elemento simple por el factor de arreglo y se aplica únicamente a arreglos de elementos idénticos [2]. Como se puede apreciar, el patrón de radiación generado está formado por un lóbulo principal y una serie de lóbulos secundarios. Este patrón será la base del sistema de radar, ya que éste determinará la dirección y la distancia del objeto detectado por el radar.

Los lóbulos secundarios o laterales por lo general son lóbulos no deseados, ya que radian información o energía electromagnética en una o más direcciones, así que es necesario eliminar dichos lóbulos. Como se muestra en la figura 3.2 el primer lóbulo secundario se encuentra a 24° con respecto al máximo valor del lóbulo principal. Supóngase que la señal recibida a un ángulo de 45.5° , que coincide con el segundo lóbulo secundario, es una señal de interferencia o ruido y se desea eliminarla. Para lograrlo se usan filtros adaptativos, los cuales hacen nulos estos lóbulos, eliminando así la interferencia generada por las posibles fuentes de ruido, donde se refleja la energía radiada por los lóbulos secundarios del radar.

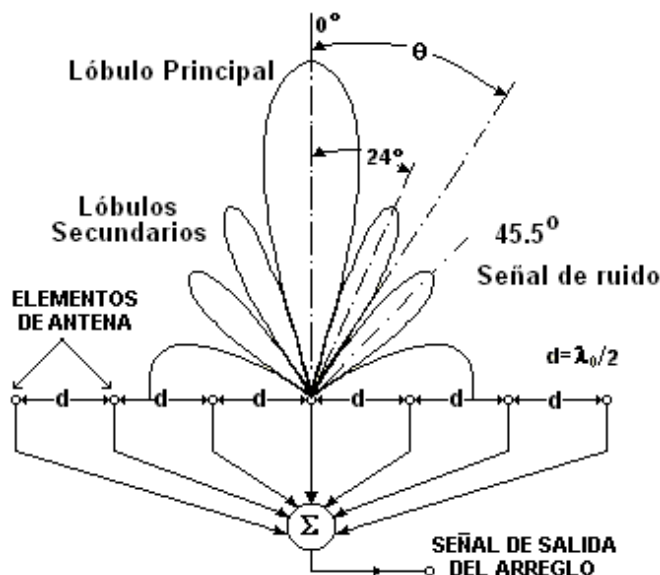


Figura 3.2. Patrón de radiación de un sistema adaptativo de 7 elementos.

Esta acción de modificar el patrón de radiación también proporciona la posibilidad de rotarlo. Es decir, no sólo se puede modificar para eliminar las interferencias sino que, además, se puede utilizar un procesamiento para dirigirlo a determinada dirección.

3.1.2 FACTOR DE ARREGLO

El factor de arreglo es la contribución de la señal de cada uno de los elementos de la antena para formar el patrón de radiación, por tanto, es importante obtener las ecuaciones que describen el factor de arreglo.

El arreglo de antenas que se utilizará en este trabajo se muestra en la figura 3.3.

A continuación se obtiene el factor de arreglo del arreglo de antenas de la figura 3.3 para graficar el patrón de radiación, los pesos W_u del arreglo fijo son iguales a uno [1,2]. Partiendo de este arreglo asimétrico:

$$\begin{aligned}
 FA(\theta) = & w_1 e^{(-6jkd \sin \theta)} e^{j\omega_0 t} + w_2 e^{(-6jkd \sin \theta)} e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + w_3 e^{(-4jkd \sin \theta)} e^{j\omega_0 t} + \\
 & w_4 e^{(-4jkd \sin \theta)} e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + w_5 e^{(-2jkd \sin \theta)} e^{j\omega_0 t} + w_6 e^{(-2jkd \sin \theta)} e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + w_7 e^{j\omega_0 t} + \\
 & w_8 e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + w_9 e^{(2jkd \sin \theta)} e^{j\omega_0 t} + w_{10} e^{(2jkd \sin \theta)} e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + w_{11} e^{(4jkd \sin \theta)} e^{j\omega_0 t} + \\
 & w_{12} e^{(4jkd \sin \theta)} e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + w_{13} e^{(6jkd \sin \theta)} e^{j\omega_0 t} + w_{14} e^{(6jkd \sin \theta)} e^{(j\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $k=2\pi/\lambda_0$, $d=\lambda_0/2$ y $\omega_0=2\pi/\lambda_0$.

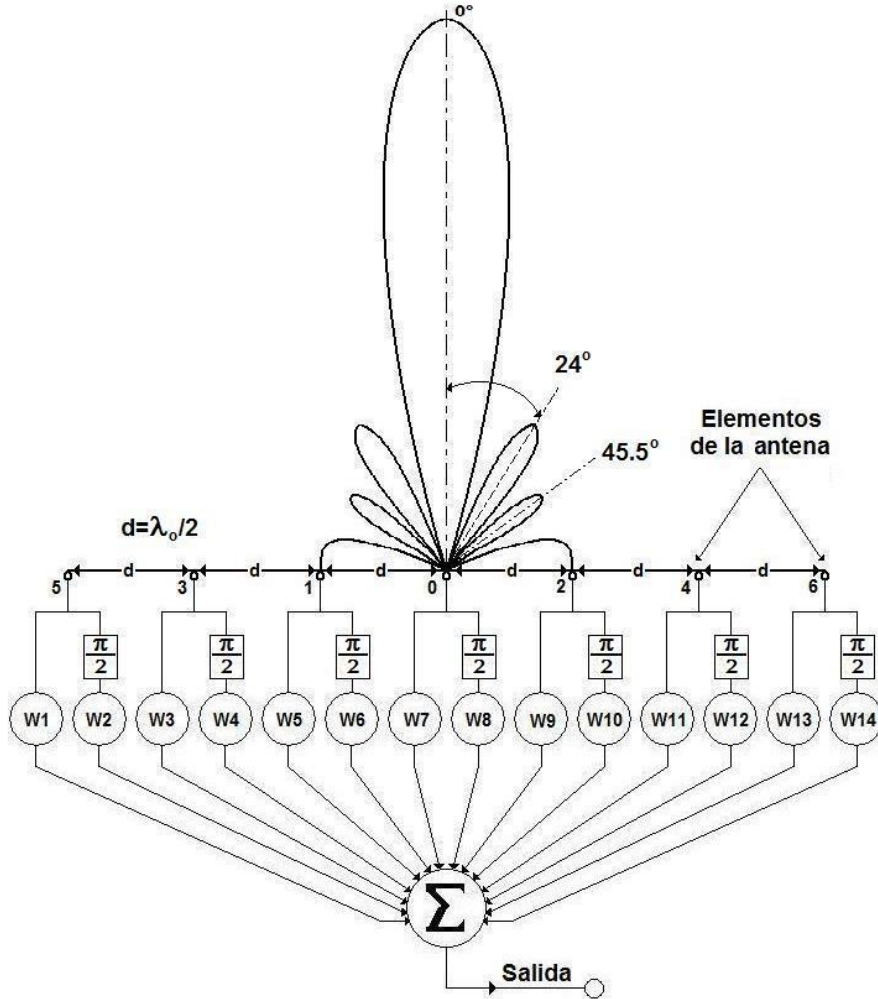


Figura 3.3. Arreglo asimétrico de Antenas tipo dipolo.

Entonces el campo producido por el arreglo de antenas está dado por:

$$E_{\theta} = \frac{jk\eta I_0 L e^{-jkr}}{4\pi r} \text{sen } \theta * FA(\theta) \tag{3.2}$$

Donde L es la longitud del dipolo, η es la impedancia intrínseca del medio, θ es el ángulo como medida del eje z en coordenadas esféricas, r es la distancia de la antena a un punto de referencia.

En dicho arreglo, se puede apreciar el patrón de radiación generado, el cual está formado por un lóbulo principal en 0° y lóbulos secundarios laterales a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45.5^\circ$ con respecto al eje vertical. Los lóbulos secundarios o laterales por lo general son lóbulos no deseados, ya que radian energía electromagnética en una o más direcciones, así que es necesario reducir o eliminar dichos lóbulos.

Una forma de reducir los lóbulos secundarios en arreglos fijos, es el cálculo de los pesos utilizando ventanas y filtros [14,15]. Los pesos toman los valores de la respuesta al impulso de las ventanas y

filtros. En el caso particular cuando los pesos son iguales a uno se tiene la respuesta el impulso de la ventana rectangular.

3.2 SISTEMA ADAPTATIVO DE ANTENAS

Un sistema adaptativo de antenas (SAA) enfoca su energía de transmisión a la dirección de un receptor. Cuando se comporta como receptor, se enfoca en la dirección de transmisión del dispositivo. La técnica utilizada por el SAA se conoce como *beamforming*, *beamsteering* or *beamshaping*, la cual le permite ajustar la amplitud y el ángulo del patrón de radiación.

18

Un sistema adaptativo de antenas está formado por un arreglo de antenas (sistema lineal de elementos) y un procesador adaptativo, el cual mejora el filtrado en los dominios de espacio y frecuencia, reduciendo de este modo la sensibilidad del sistema de recepción e interfiriendo así las fuentes de ruido direccional.

Este tipo de sistemas tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, un SAA permite a los operadores de redes incrementar la capacidad de una red inalámbrica [16] en donde existe una gran cantidad de tráfico debido al incremento de usuarios, a la enorme cantidad de datos transmitidos y las aplicaciones. Además, este tipo de sistemas, ofrece el potencial incremento en la eficiencia del espectro, extender el rango de cobertura y una tasa más alta en la reutilización de la frecuencia.

Por otro lado, los sistemas adaptativos de antenas son ampliamente utilizados en los sistemas de radar. Los sistemas de radar son los medios más empleados para la localización de objetivos, ya sean aéreos, marítimos o terrestres, y cuentan con gran variedad de aplicaciones. Para un sistema de radar, las fuentes de ruido pueden ser ocasionadas por arrecifes de coral, pequeñas embarcaciones, aves marinas, etc. Gran parte de estos sistemas dependen de medios mecánicos para poder rotar el patrón de radiación producido por una antena, por tanto, en sistemas modernos es necesario sustituir dichos medios por un solo arreglo de antenas. Esto facilita adecuar el patrón de radiación, producido por dicho arreglo, de acuerdo a las necesidades de trabajo. Esta modificación del patrón de radiación da la posibilidad de eliminar interferencias del medio en donde se encuentre instalado el radar. Para esto, se debe proponer el tipo de arreglo de antenas adecuado al problema. Después, necesitamos encontrar el procesador adaptativo que permita la eliminación de interferencias adaptándose al movimiento del objetivo. Este proceso de adaptación se basa en la minimización del error cuadrático medio mediante el algoritmo LMS. Este sistema opera con el conocimiento de la dirección de llegada y el espectro de la señal [1,2,17], pero sin el conocimiento de la señal de ruido.

El término “adaptativo” se usa para describir un sistema el cual extrae una señal desconocida del ruido, donde la forma de onda de la señal se repite frecuentemente en intervalos aleatorios de tiempo. Estas señales se utilizan para el cálculo de pesos, los cuales se obtienen por un procesador adaptativo (LMS) eliminando así el ruido que incide en el arreglo de antenas. El sistema para rotar el patrón de radiación y eliminar el ruido puede ser el que se muestra en la figura 3.3.

El filtro adaptativo de ejemplo está formado por 7 entradas, la señal recibida por cada una de los elementos de antena tiene una frecuencia f_0 y produce un cambio en fase de $\pi/2$ en la señal recibida y multiplicada por un peso. El arreglo de la figura 3.3 utiliza un cambio de fase de $\pi/2$, ya que esto no

modifica el patrón de radiación original. Sin embargo, se puede utilizar otro cambio de fase (retardo δ) para rotar el patrón de radiación como lo muestra la figura 3.4. Si se requiere rotar el patrón de radiación para orientar el lóbulo principal a la dirección deseada basta con cambiar los retardos δ e igualar todos los pesos a 1. También se puede dejar el patrón de radiación sin rotar y hacer el cálculo de los pesos para colocar un nulo en la dirección del segundo lóbulo secundario eliminado así la señal de ruido o interferencia [1].

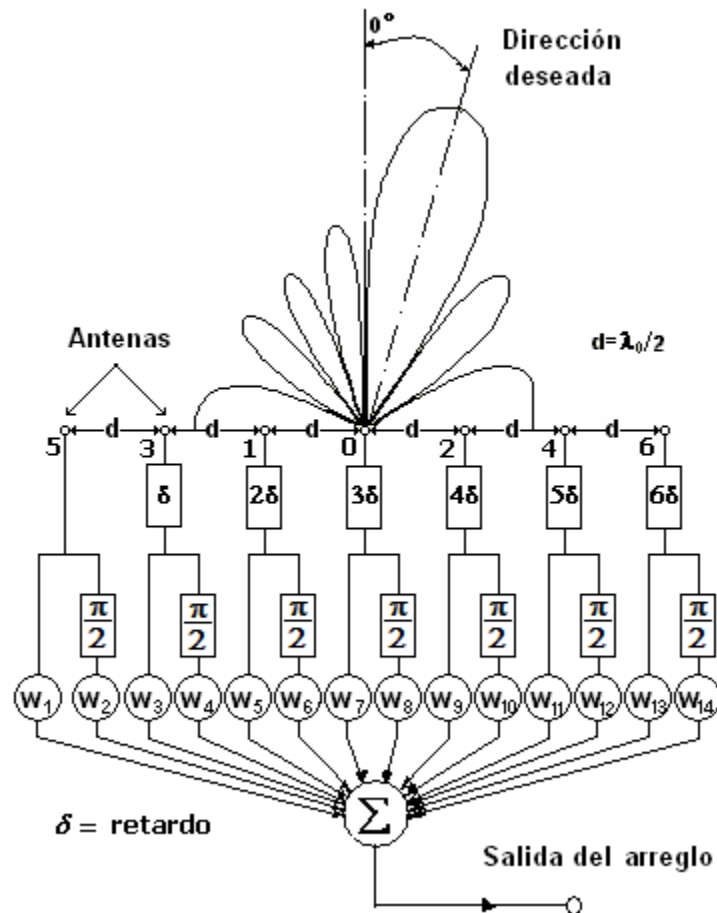


Figura 3.4. Se coloca un nulo en la dirección del ruido a 45.5° .

De la figura 3.4 se debe hacer notar que los elementos del arreglo están ordenados del centro hacia fuera. A la derecha se tienen los elementos pares y a la izquierda los elementos impares. Se deben respetar este orden ya que la fase y su ubicación geométrica pueden modificar el patrón de radiación.

Para obtener el patrón de radiación utilizando 7 elementos tipo dipolo como los mostrados en la figura 3.4, primero se obtiene el campo total utilizando el principio de superposición y tomando como referencia la figura 3.1. El principio de superposición de los campos establece que el campo producido por un conjunto de fuentes es la suma de los campos de las fuentes individuales. El factor que representa las características direccionales debidas a la superposición de los campos de las antenas se le conoce como factor de arreglo (FA).

El factor de arreglo se obtiene considerando a los elementos como fuentes isotópicas, no obstante si no son fuentes isotópicas el factor de arreglo se puede obtener multiplicando el campo total del elemento simple por el factor de arreglo; esta es la regla del factor de multiplicación, y se aplica únicamente a arreglos de elementos idénticos [4].

$$\bar{E}_T(\theta) = \bar{E}_0(\theta) \sum_{n=0}^N a_n e^{j\psi_n} \quad (3.3)$$

Donde E_0 es la magnitud de campo eléctrico del elemento simple, los coeficientes a_n son en general números complejos, en este caso se toman valores reales ya que la fase de alimentación será progresiva, y el factor del arreglo está dado por la siguiente ecuación [4]:

$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^N a_n e^{j\psi_n} \quad (3.4)$$

donde $\Psi_n = n\beta d \cos\Omega + \alpha_n$, es el desfaseamiento total, $n\beta d \cos\Omega$ es el desfaseamiento debido a la distancia para cada campo, n es el número de elemento, d es la distancia entre elementos (para el presente caso $d=0.5 \lambda_0$), $\beta = 2\pi/\lambda_0$ es el número de onda y α_n es la diferencia de fase de la corriente de la antena n con respecto a la de la antena 0.

De la expresión anterior puede observarse que existen dos tipos de desfaseamiento, uno de los cuales depende de la diferencia de fase en las corrientes de alimentación de las antenas y está dado por la expresión:

$$I_n = K_n I_0 e^{j\alpha_n} \quad (3.5)$$

Siendo K_n la relación entre las magnitudes de las corrientes:

$$K_n = \left| \frac{I_n}{I_0} \right| \quad (3.6)$$

El otro tipo de desfaseamiento presente es el que existe entre las radiaciones de ambas antenas debido a su posición con respecto a un punto P como se muestra en la figura 3.1. Este desfaseamiento está dado por $n\beta d \cos\Omega$. El ángulo Ω es el ángulo formado entre el plano de las antenas (línea del arreglo) y la línea trazada de la antena correspondiente al punto de observación.

En la figura 3.4 se mostró el patrón de radiación para 7 elementos, es un arreglo lineal uniforme y se tiene una fase progresiva y las amplitudes de las corrientes en todos los elementos son iguales, con

estos elementos se formará el factor de arreglo y se utilizarán en la implementación del algoritmo LMS. Una fase progresiva implica que la fase en el elemento n es $n\alpha$ de modo que:

$$\alpha_n = n\alpha$$

De acuerdo a la ecuación (3.4) a la entrada de los elementos del arreglo de antenas para 7 elementos se tiene:

$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^N a_n e^{jn\beta d \cos\Omega + \alpha_n} = a_0 e^{j0\beta d \cos\Omega + 0\alpha} + a_1 e^{j1\beta d \cos\Omega + 1\alpha} + \dots + a_6 e^{j6\beta d \cos\Omega + 6\alpha}$$

De acuerdo a la figura 3.4 y respetando la ubicación de cada elemento de antena:

$$FA(\psi) = a_5 e^{-j3\beta d \cos\Omega - 3\alpha} + a_3 e^{-j2\beta d \cos\Omega - 2\alpha} + a_1 e^{-j\beta d \cos\Omega - \alpha} + a_0 + a_2 e^{j\beta d \cos\Omega + \alpha} + a_4 e^{j2\beta d \cos\Omega + 2\alpha} + a_6 e^{j3\beta d \cos\Omega + 3\alpha}$$

Inmediatamente después de los elementos de antena se debe aplicar un retardo en tiempo δ , para esto:

$$FA(\psi) = a_5 e^{-j3\beta d \cos\Omega - 3\alpha} e^{j\omega_0 t} + a_3 e^{-j2\beta d \cos\Omega - 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta)} + a_1 e^{-j\beta d \cos\Omega - \alpha} e^{j(\omega_0 t - 2\delta)} + a_0 e^{j(\omega_0 t - 3\delta)} + a_2 e^{j\beta d \cos\Omega + \alpha} e^{j(\omega_0 t - 4\delta)} + a_4 e^{j2\beta d \cos\Omega + 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - 5\delta)} + a_6 e^{j3\beta d \cos\Omega + 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - 6\delta)}$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ y t es el tiempo.

Para poder rotar el patrón de radiación a otro ángulo $\theta \neq 0$ se debe calcular el retardo δ , de acuerdo a la figura 3.1:

$$\delta = \frac{d \operatorname{sen}\left(\frac{\theta \pi}{180}\right)}{c}$$

Después, el factor de arreglo se verá afectado por un nuevo desfaseamiento de $\pi/2$, y multiplicado por los pesos $w_1, \dots, w_i, \dots, w_n$.

$$\begin{aligned}
 FA(\psi) = & w_1 a_5 e^{-j3\beta d \cos\Omega - 3\alpha} e^{j\omega_0 t} + w_2 a_5 e^{-j3\beta d \cos\Omega - 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta_2)} + w_3 a_3 e^{-j2\beta d \cos\Omega - 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta)} + \\
 & w_4 a_3 e^{-j2\beta d \cos\Omega - 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta - \delta_2)} + w_5 a_1 e^{-j\beta d \cos\Omega - \alpha} e^{j(\omega_0 t - 2\delta)} + w_6 a_1 e^{-j\beta d \cos\Omega - \alpha} e^{j(\omega_0 t - 2\delta - \delta_2)} + \\
 & w_7 a_0 e^{j(\omega_0 t - 3\delta)} + w_8 a_0 e^{j(\omega_0 t - 3\delta - \delta_2)} + w_9 a_2 e^{j\beta d \cos\Omega + \alpha} e^{j(\omega_0 t - 4\delta)} + w_{10} a_2 e^{j\beta d \cos\Omega + \alpha} e^{j(\omega_0 t - 4\delta - \delta_2)} + \\
 & w_{11} a_4 e^{j2\beta d \cos\Omega + 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - 5\delta)} + w_{12} a_4 e^{j2\beta d \cos\Omega + 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - 5\delta - \delta_2)} + w_{13} a_6 e^{j3\beta d \cos\Omega + 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - 6\delta)} + \\
 & w_{14} a_6 e^{j3\beta d \cos\Omega + 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - 6\delta - \delta_2)}
 \end{aligned}$$

donde δ_2 es el retardo de $1/(4f_0)$, mismo que produce un cambio en fase de $\pi/2$:

Considerando que $a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 1$, la salida del arreglo es:

$$\begin{aligned}
 FA(\psi) = & w_1 e^{-j3\beta d \cos\Omega - 3\alpha} e^{j\omega_0 t} + w_2 e^{-j3\beta d \cos\Omega - 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta_2)} + w_3 e^{-j2\beta d \cos\Omega - 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta)} + \\
 & w_4 e^{-j2\beta d \cos\Omega - 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - \delta - \delta_2)} + w_5 e^{-j\beta d \cos\Omega - \alpha} e^{j(\omega_0 t - 2\delta)} + w_6 e^{-j\beta d \cos\Omega - \alpha} e^{j(\omega_0 t - 2\delta - \delta_2)} + \\
 & w_7 e^{j(\omega_0 t - 3\delta)} + w_8 e^{j(\omega_0 t - 3\delta - \delta_2)} + w_9 e^{j\beta d \cos\Omega + \alpha} e^{j(\omega_0 t - 4\delta)} + w_{10} e^{j\beta d \cos\Omega + \alpha} e^{j(\omega_0 t - 4\delta - \delta_2)} + \\
 & w_{11} e^{j2\beta d \cos\Omega + 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - 5\delta)} + w_{12} e^{j2\beta d \cos\Omega + 2\alpha} e^{j(\omega_0 t - 5\delta - \delta_2)} + w_{13} e^{j3\beta d \cos\Omega + 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - 6\delta)} + \\
 & w_{14} e^{j3\beta d \cos\Omega + 3\alpha} e^{j(\omega_0 t - 6\delta - \delta_2)}
 \end{aligned}$$

Se puede observar que el factor de arreglo ahora depende de los valores de los pesos. Es decir, si $w_1, \dots, w_i, \dots, w_n$ son iguales a uno, se obtendrá el patrón original del arreglo de antenas, Pero si estos valores se modifican el patrón de radiación cambia su forma. Por ejemplo, para el caso de arreglos de antenas fijos utilizados en la telefonía celular, en algunas ocasiones requiere modificar el patrón de radiación reduciendo la magnitud de los lóbulos secundarios. Mientras que en aplicaciones como el radar los valores de los pesos cambian continuamente para evitar interferencias. La diferencia entre las aplicaciones es que en la primera aplicación el cálculo de los pesos sólo se realiza una vez y no se vuelven a modificar los valores de los pesos. En la aplicación del radar los pesos son adaptados continuamente y es deseable que este cálculo se realice en el menor tiempo posible.

3.2.1 FILTRO ADAPTATIVO

El filtro que se utiliza para eliminar las fuentes de ruido, es un filtro adaptativo con una respuesta al impulso finita (FIR). Cuando se habla de filtrado se refiere a un proceso lineal diseñado para alterar el contenido espectral de una señal de entrada, el término "Filtrado Adaptativo" implica que los parámetros que caracterizan al filtro, tales como el ancho de banda cambien con el tiempo, así como también los coeficientes del filtro.

Es necesario tener coeficientes variables cuando no se conocen a priori las características estadísticas de la señal a filtrar, o cuando se conocen y se sabe que son cambiantes con el tiempo.

La ecuación de salida de un filtro adaptativo con respuesta al impulso infinita (IIR) es:

$$s(j) = \sum_{i=0}^N W_i(j) x[j-i] - \sum_{l=1}^M b_l(j) s[j-l] \quad (3.7)$$

Para señales y filtros causales $j \geq 0$. Donde $s(j)$ y $x(j)$ son las muestras de salida y entrada respectivamente, en el instante j , $W_i(j)$ y $b_i(j)$ son los coeficientes o pesos del filtro i -ésimo y j -ésimo en el instante j , $N+M+1$ es el número total de coeficientes del filtro. Si en lugar de usar $W_i(j)$ y $b_i(j)$ se utilizan W_i y b_i , los coeficientes ya no serían variantes con el tiempo, y se tendría un filtro fijo en lugar de un filtro adaptativo. Si $b_i(j) = 0$ para $1 < i < M$, resulta un filtro adaptativo FIR.

$$s(j) = \sum_{i=0}^N W_i(j)x(j-i) \quad n \geq 0 \quad (3.8)$$

Los pesos W_i que se encuentran para formar el filtro adaptativo son los mismos pesos que se utilizarán en el factor de arreglo para modificar la forma del patrón de radiación.

Una configuración de un arreglo adaptativo para procesamiento de señales de banda angosta se muestra en la figura 3.5. Como se puede observar cada elemento individual de la antena se conecta por un lado a un peso variable y por otro a un retardo de tiempo de un cuarto de período cuya salida es conectada a otro peso variable. Finalmente ambas señales se suman, como se muestra en la figura. Se puede suponer que la señal recibida por las antenas es una señal monocromática o de banda angosta. Esta señal es recibida por cada elemento de antena y es ponderada por un factor de ganancia complejo $Ae^{j\phi}$. Se puede elegir cualquier ángulo de fase $\phi = -\tan^{-1}(w_2/w_1)$ ajustando los dos valores de peso, la magnitud del factor de ganancia complejo $A = (w_1^2 + w_2^2)^{1/2}$ puede tomar un amplio intervalo de valores limitado solo por los dos pesos individuales permitidos. La magnitud de A puede tomar valores positivos y negativos.

De este modo los dos pesos y el retardo de tiempo $(1/4f_0)$ proporciona completamente el procesamiento lineal ajustable para señales de banda angosta recibidas por cada elemento de antena. El arreglo de la figura 3.5 representa la forma general de combinar las señales de elementos-antena en una estructura lineal ajustable cuando la señal recibida y el ruido son de banda angosta. Se debe notar que la misma generalidad (para señales de banda angosta) se puede obtener aún cuando los retardos de tiempo no resulten en un cambio de fase de exactamente $\pi/2$ a la frecuencia central f_0 . Es deseable mantener los cambios de fase cercanos a $\pi/2$ para obtener valores de peso pequeños, pero no es necesario en principio.

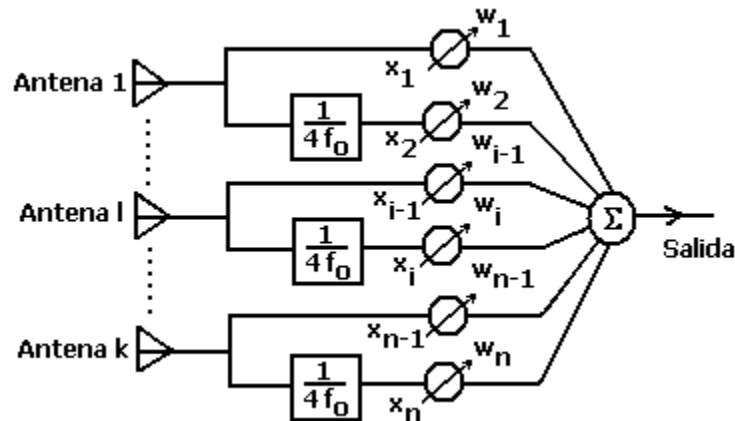


Figura 3.5. Representación lineal de un arreglo antenas.

3.2.2 PROCESADORES ADAPTATIVOS DE SEÑALES[1]

El siguiente paso es desarrollar un procedimiento de adaptación el cual puede ser usado para ajustar automáticamente el valor de los pesos para alcanzar el filtrado espacial y de frecuencia deseado.

El procedimiento deberá proporcionar una ganancia de arreglo en la dirección deseada mientras simultáneamente se anulan las fuentes de ruido. La figura 3.6 muestra un elemento adaptativo de procesamiento de señal.

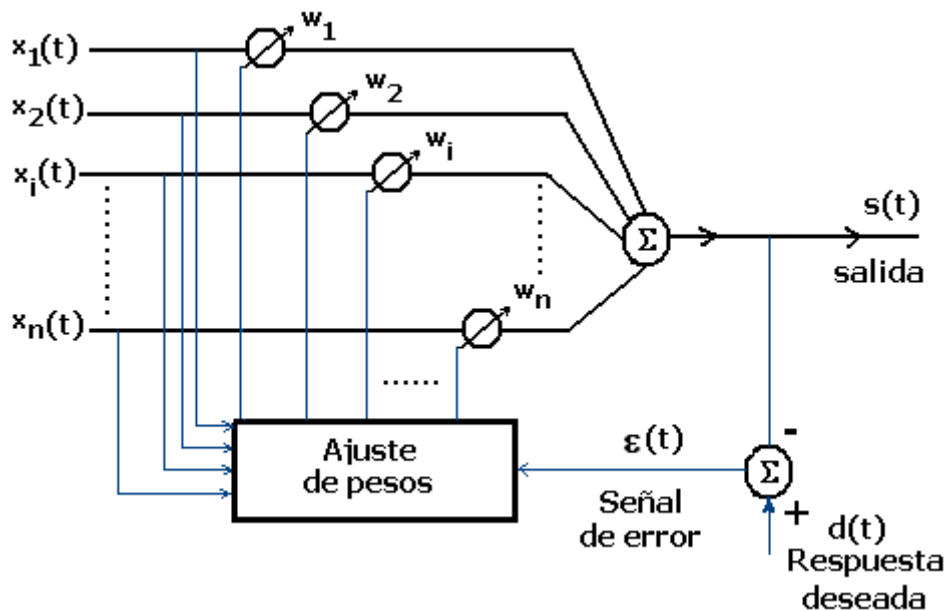


Figura 3.6. Representación de un elemento adaptativo de procesamiento de señal

En la figura 3.6 las señales de entrada $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ son las mismas señales que son multiplicadas por los pesos $w_1, \dots, w_i, \dots, w_n$ mostrados en la figura 3.5. Se puede observar las rutas del flujo de la señal en líneas gruesas negras; y las líneas delgadas en azul del “ajuste de pesos” están relacionadas al cambio de pesos o adaptación de procesos. La señal de salida $s(t)$ en la figura 3.6 es la suma de las señales ponderadas :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)w_i \quad (3.9)$$

donde n es el número de pesos; usando notación vectorial

$$s(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t) \quad (3.10)$$

donde \mathbf{W}^T es la traspuesta del vector de peso:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

y el vector de la señal de entrada es

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para sistemas digitales, las señales de entrada son en tiempo discreto y la salida se escribe como:

$$s(j) = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) = \mathbf{X}(j)^T \mathbf{W} \quad (3.13)$$

donde el índice j indica la j -ésimo instante de muestreo.

Para comenzar a realizar la adaptación de los pesos se debe introducir una señal de “respuesta deseada”, $d(t)$ en tiempo continuo o $d(j)$ en tiempo discreto.

La diferencia entre la respuesta deseada y la respuesta de salida forman la señal de error $\varepsilon(j)$:

$$\varepsilon(j) = d(j) - s(j) = d(j) - \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) \quad (3.14)$$

Esta señal se usa como una señal de control para el ajuste de pesos \mathbf{W}_n de la figura 3.6.

El propósito del proceso adaptativo es encontrar un ajuste de pesos que permita a la respuesta de salida de cada elemento ser igual o tan cercano como sea posible a la respuesta deseada en cada instante de tiempo j . Para cada vector de señal de entrada $\mathbf{X}(j)$, el error $\varepsilon(j)$ de (3.14) debe hacerse tan pequeño como sea posible.

Considere el conjunto finito de ecuaciones lineales simultáneas

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}^T \mathbf{X}(1) = d(1) \\ \mathbf{W}^T \mathbf{X}(2) = d(2) \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) = d(j) \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{W}^T \mathbf{X}(N) = d(N) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

donde N es el número total de vectores de la señal de entrada; cada vector es una medida de un proceso aleatorio n -dimensional. Existen N ecuaciones, que corresponden a N instantes de tiempo en los cuales los valores de la respuesta de salida son de interés; y hay n valores “desconocidos” correspondientes a los n pesos los cuales forman las componentes de \mathbf{W} . En la presente aplicación, se tiene un amplio suministro de datos de entrada, es usual que $N \gg n$.

Cuando N es muy grande comparada con n , es de interés obtener una solución del conjunto de N ecuaciones [cada ecuación en la forma de (3.14)] las cuales minimizan la suma del cuadrado de los errores. Esto significa, que se encuentra un conjunto de pesos \mathbf{W} para minimizar:

$$E\{\varepsilon^2(j)\} \rightarrow \min \quad (3.16)$$

Cuando las señales de entrada se consideran como variables estocásticas estacionarias, usualmente se encuentra un ajuste de pesos para minimizar el error de mínimos cuadrados (MSE). La cantidad de interés es el valor esperado del cuadrado del error, el error de mínimos cuadrados está dado por:

El conjunto de pesos que minimiza el error cuadrático medio puede ser calculado elevando al cuadrado ambos lados de (3.14) lo cual da:

$$\varepsilon^2(j) = d^2(j) + \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) \mathbf{X}(j)^T \mathbf{W} - 2d(j) \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) \quad (3.17)$$

y entonces tomando el valor esperado de ambos lados de (3.18)

$$\begin{aligned} E[\varepsilon^2(j)] &= E[d^2 + \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) \mathbf{X}(j)^T \mathbf{W} - 2\mathbf{W}^T d(j) \mathbf{X}(j)] \\ E[\varepsilon^2(j)] &= E[d^2] + \mathbf{W}^T \Phi_{xx} (\mathbf{W} - 2\mathbf{W}^T \Phi_{xd}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donde:

$$\Phi_{xx} \stackrel{\Delta}{=} E[\mathbf{X}(j) \mathbf{X}^T(j)] = E \begin{bmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & & & \\ x_n x_1 & & & x_n x_n \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

y

$$\Phi_{xd} \stackrel{\Delta}{=} E[\mathbf{X}(j) d(j)] = E \begin{bmatrix} x_1 d \\ x_2 d \\ \vdots \\ x_i d \\ \vdots \\ x_n d \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La matriz simétrica Φ_{xx} es una matriz de auto correlaciones de las señales de entrada para el elemento adaptativo, y el vector Φ_{xd} es el conjunto de correlaciones cruzadas entre las n señales de entrada y la señal de respuesta deseada.

El error cuadrático medio definido en (3.18) es una función cuadrática de los valores de peso. Los componentes del gradiente de la función de error cuadrático medio son las derivadas parciales del error cuadrático medio con respecto a los valores de peso. Derivando a (3.18) con respecto a \mathbf{W} se produce el gradiente $\nabla E[\varepsilon^2]$, una función lineal de pesos,

$$\nabla E[\varepsilon^2] = 2\Phi_{xx} \mathbf{W} - 2\Phi_{xd} \quad (3.21)$$

Cuando la elección de los pesos es óptima, el gradiente es cero. Entonces:

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} \mathbf{W} &= \Phi_{xd} \\ \mathbf{W} &= \Phi_{xx}^{-1} \Phi_{xd}\end{aligned}\tag{3.22}$$

El vector de peso óptimo \mathbf{W} es el que minimiza el error cuadrático medio. La ecuación (3.22) es la ecuación de Wiener-Hopf.

Se debe resolver la ecuación (3.22) para encontrar el ajuste óptimo de valores de peso. Esta solución $\mathbf{W} = \Phi_{xx}^{-1} \Phi_{xd}$ es generalmente sencilla, pero presenta serios problemas de cálculo cuando el número de pesos n y el número de datos son grandes. Además, de la necesidad de inversión de una matriz $n \times n$, este método podría requerir $n(n+1)/2$ auto correlaciones y correlaciones cruzadas para obtener los elementos de $\Phi_{xx}(j)$ $\mathbf{W} = \Phi_{xd}(j)$.

Por otro lado, este proceso generalmente necesita repetirse continuamente en la mayoría de las situaciones prácticas donde la señal de entrada es estática y cambia lentamente. No existe una solución perfecta de (3.22), en la práctica es posible, debido al hecho de que una muestra estadística infinita puede ser requerida para estimar perfectamente los elementos de la correlación de matrices.

En la sección 3.4 se presenta un método para encontrar una solución aproximada de (3.22). Su exactitud está limitada por la medida de las muestras estadísticas, puesto que se encuentran valores de peso basados sobre medidas de tiempo finito de las señales de entrada. Este método no requiere medidas explícitas de las funciones de correlación o inversión de matriz. Está basado en técnicas de búsqueda de gradientes aplicadas a la función del error cuadrático medio. Este algoritmo llamado LMS, no necesita elevar al cuadrado, promediar, o derivar para utilizar los gradientes de las funciones del error cuadrático medio.

3.3 REDES NEURONALES

En este apartado se introducen los conceptos concernientes en el diseño de redes neuronales artificiales (RNA). Se abordará el tema desde sus orígenes, evolución, principales arquitecturas, clasificación de las mismas hasta los diferentes tipos de redes neuronales artificiales existentes, además se presenta la descripción del algoritmo de aprendizaje del perceptrón multicapa el cual es implementado para el desarrollo de la red neuronal propuesta en esta tesis.

3.3.1 RESEÑA HISTÓRICA

La investigación en redes neuronales artificiales ha experimentado tres períodos de extensa actividad. El primero de ellos conocido como de surgimiento se presenta a mediados de la década de los 40's y termina a mediados de la década de los 60's, ésta se dio debido al trabajo iniciado por McCulloch y Pitts [18]. Otros resultados relevantes de esta primera etapa fueron el modelo del perceptrón y el modelo ADALINE (*Adaptative Linear Element*), ambos desarrollados alrededor de los años 60's y con características muy similares. El primero fue propuesto por Frank Rosenblatt y el segundo por Bernard Widrow y Hoff [19]. La aparición del perceptrón generó un gran interés, debido a que imitaba fuertemente el comportamiento de una neurona biológica y tenía algoritmos de aprendizaje bien definidos. Se especuló mucho sobre cómo los sistemas inteligentes podrían ser construidos usando como bloques de construcción los perceptrones. Estos resultados fueron muy significativos y a partir de su descubrimiento se ha acordado en general el nacimiento de las disciplinas en redes neuronales e inteligencia artificial [20].

La publicación del libro en 1969 llamado *Perceptrons, An Introduction to Computational Geometry* por Minsky y Papert [21] fue una de las causas, sino la principal, que llevó al segundo período, al cual comúnmente se le conoce como el período oscuro. En 1969 ellos analizaron las capacidades computacionales de este modelo y señalaron sus limitaciones claves, de esta manera quedó demostrado que tales redes neuronales no constituían un modelo computacional de propósito general. Los resultados de Minsky y Papert desalentaron el entusiasmo de la mayoría de los investigadores, especialmente aquellos de la comunidad de ciencia de la computación, sin embargo, el período es oscuro pero no inactivo, como se pensaba en ese entonces. De esta etapa son significativos los trabajos de Steven Grossberg y Gail Carpenter sobre el modelo conocido como *Adaptive Resonance Theory* (ART) en la Universidad de Boston y de Teuvo Kohonen de la Universidad de Helsinki sobre el modelo conocido por *Self-Organizing Maps*. Un resultado de trascendencia posterior fue el alcanzado por Paul Werbos a inicios de los años 70's mientras estudiaba problemas en el campo de las ciencias sociales, Werbos descubrió el principio matemático que permitió posteriormente desarrollar el algoritmo de aprendizaje de retropropagación del error (*Perceptron multicapa*) para redes neuronales multicapas, desarrollado en la mitad de los años 80's por David Rumelhart, Hinton y Williams [22].

El tercer período y actual tiene entre los factores que le dieron origen al trabajo publicado en 1982 por John Hopfield [23]. En este trabajo se presentó un modelo de cálculo neuronal que se basa en la interacción de las neuronas. Hopfield argumentó que hay capacidades computacionales emergentes a nivel de la red que no existen a nivel de neurona. Esta clase de red neuronal se conoce actualmente como red de Hopfield. En el mismo año Kohonen publicó un artículo sobre mapas autoorganizativos usando una estructura de malla unidimensional o bidimensional, que fue diferente en algunos aspectos al trabajo previo de Willshaw y Malsburg. En 1983, Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi [24] describieron un nuevo procedimiento llamado *Simulated Annealing*, para resolver problemas de optimización combinatorial, esta idea posteriormente fue empleada en 1985 por Ackley, Hinton, y Sejnowski en el desarrollo de máquinas estocásticas conocidas como *Boltzmann Machine*, como factor determinante es el resultado, ya mencionado, alcanzado por Rumelhart y sus colegas, y que permitió superar las limitaciones señaladas por Minsky y Papert al modelo del Perceptrón de la década de los 60's. En 1988, Broomhead y Lowe describen la red neuronal *Radial Basis Functions* (RBF). En 1990, Vapnik *et al* inventan una clase computacionalmente poderosa de redes neuronales de aprendizaje

supervisado, llamadas *Support Vector Machines*. Se pueden resumir las razones principales que motivaron el reinicio de los trabajos sobre redes neuronales en los años 80's de la forma siguiente:

1. Descubrimiento de algoritmos de aprendizaje potentes, especialmente los que permiten entrenar redes con capas ocultas, como el de retropropagación del error publicado en 1986. Esto permitió crear redes que pudieran modelar cualquier tipo de región de decisión, incrementando de esta manera el poder funcional y las aplicaciones de las redes neuronales artificiales.
2. Avances tecnológicos alcanzados, entre ellos la aparición de computadoras más rápidas sobre las cuales es posible simular grandes redes neuronales.
3. Necesidad actual de modelos computacionales paralelos.

3.3.2 MODELO BIOLÓGICO

El cerebro humano se compone de decenas de billones de neuronas interconectadas entre sí formando circuitos o redes que desarrollan funciones específicas.

Una neurona o célula nerviosa es una célula biológica especial que procesa información como se observa en la figura (3.7). Entre las propiedades que las distinguen están: la forma, la membrana exterior capaz de generar impulsos nerviosos y la sinapsis para transferir información de una neurona a otra. No hay dos neuronas idénticas en forma, sin embargo, sus formas generalmente comparten rasgos estructurales que hacen posible distinguir tres partes en la célula:

El cuerpo de la célula cuyo diámetro es de 5 a 100 micrómetros, del cual parten unas fibras principales: el axón y numerosas fibras secundarias, tiene un núcleo que contiene información acerca de rasgos hereditarios y un plasma que sostiene el equipo molecular para producir material necesario para la neurona.

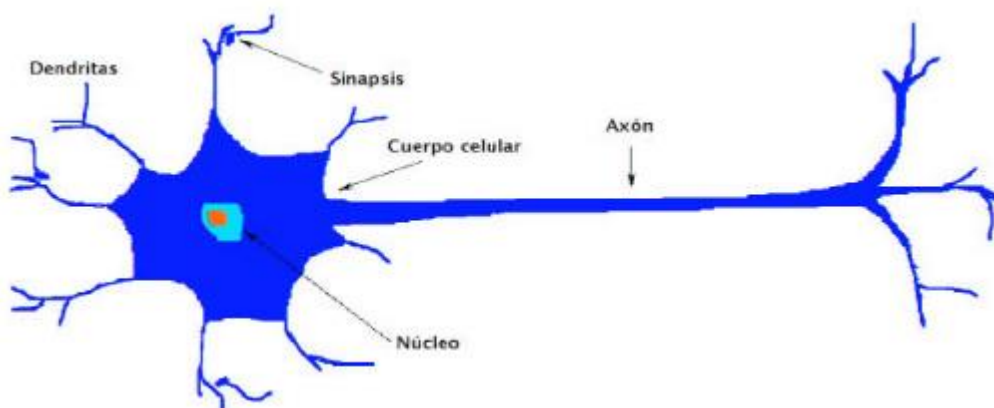


Figura 3.7. Estructura de la neurona biológica

Las dendritas son extensiones parecidas a tubos que tienden a ramificarse repetidamente y forman un árbol con muchas ramificaciones alrededor del cuerpo de la célula. Ellas ofrecen la principal superficie física sobre la cual la neurona recibe las señales.

El axón se extiende desde el cuerpo de la célula y constituye el camino sobre el cual las señales pueden viajar desde el cuerpo hasta largas distancias hacia otros puntos del cerebro. El axón difiere de las dendritas en la estructura y las propiedades de su membrana exterior. La mayoría de los axones son más largos y finos que las dendritas y tienen un patrón de ramificación diferente: mientras las ramas de las dendritas tienden a aparecer cerca del cuerpo de la célula, las ramas del axón tienden a surgir al final de la fibra, donde el axón se comunica con otras neuronas.

Una neurona recibe señales (impulsos) de otras neuronas a través de sus dendritas (receptores) y transmite señales generadas por su cuerpo celular a lo largo del axón (transmisor), el cual eventualmente se divide en ramales y subramales, en los extremos de estos ramales se encuentran las sinapsis. Una sinapsis es una interconexión entre dos neuronas. La efectividad de la sinapsis puede ser ajustada por las señales que pasan a través de ella de tal manera que las sinapsis pueden aprender de las actividades en las que participan. Esta dependencia actúa como una memoria, la cual es posiblemente responsable de la memoria humana. [25]

En las neuronas biológicas, hay dos comportamientos que son importantísimos para poder entender el funcionamiento de las mismas y aplicarlos para el desarrollo de las neuronas artificiales, las cuales se muestran a continuación:

- El impulso que llega a una sinapsis y el que sale de ella no son iguales en general. El tipo de pulso que saldrá depende sensiblemente de la cantidad de neurotransmisores. Esta cantidad de neurotransmisores cambia durante el proceso de aprendizaje, es aquí donde se almacena la información, de esta manera una sinapsis modifica el pulso ya sea reforzándolo o debilitándolo.
- En el soma se suman las entradas de todas las dendritas. Si estas entradas sobrepasan un cierto umbral, entonces se transmitirá un pulso a lo largo del axón, en caso contrario no transmitirá. Después de transmitir un impulso, la neurona no puede transmitir durante un tiempo de entre 0.5 ms. a 2 ms. A este tiempo se le conoce como período refractario.

Con base en estas dos características, se construye el modelo de la red neuronal artificial.

3.3.3 MODELO NEURONAL

Las neuronas artificiales se modelan mediante unidades de proceso (neuronas). Cada unidad de proceso se compone de una red de conexiones de entrada, una función de red (de propagación), encargada de procesar la entrada total combinada con todas las conexiones, un núcleo central de proceso, encargado de aplicar la función de activación, y la salida, por dónde se transmite el valor de activación a otras unidades, la función de red es típicamente una suma ponderada, mientras que la función de activación suele ser generalmente alguna función de umbral, como por ejemplo la función sigmoidea, escalón, tangente, etc. A continuación se describe brevemente las principales características que se deben de tomar en cuenta en la estructura de una red neuronal.

- *Función de propagación o de red:* Calcula el valor de base o entrada total a la unidad, generalmente como simple suma ponderada de todas las entradas recibidas, es decir, de las entradas multiplicadas por el peso o el valor de las conexiones. Es equivalente a la combinación de las señales de excitación e inhibitoras de las neuronas biológicas.
- *Función de activación:* es una de las características principales de la neurona, la que mejor define el comportamiento de la misma. Se emplean diferentes tipos de funciones pudiendo ser estas lineales o no lineales, su función es calcular el nivel o estado de activación de la neurona en función de la entrada total.
- *Conexiones ponderadas:* hacen el papel de las conexiones sinápticas, el peso de la conexión equivale a la fuerza o efectividad de la sinapsis. La existencia de conexiones determina si es posible que una unidad influya sobre otra, el valor de los pesos y el signo de los mismos definen el tipo (excitatorio/inhibitorio) y la intensidad de la influencia.
- *Salida:* calcula la salida de la neurona en función de la activación de la misma.

Se tiene un esquema de neurona artificial en la figura (3.8). Este modelo neuronal incluye un sesgo (bias), aplicado como otra entrada, x_0 , denotado por b_j , que tiene el efecto de incrementar o reducir la entrada neta de la función de activación. Recordando que en el soma de la neurona biológica se sumaban las entradas provenientes de todas las dendritas, por lo tanto, en términos matemáticos, se puede describir la neurona j por el siguiente par de ecuaciones:

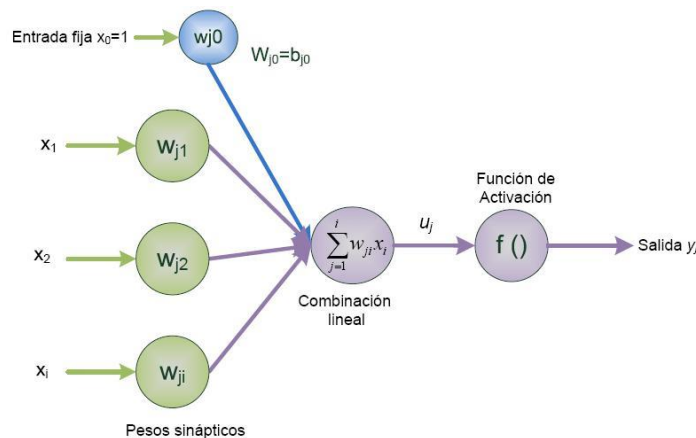


Figura 3.8. Modelo de una neurona artificial

$$u_j = \sum_{j=1}^i w_{ij} x_i \tag{3.23}$$

$$y_j = \varphi(u_j + b_j) \tag{3.24}$$

donde x_1, x_2, \dots, x_i son las señales de entrada, $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{ji}$ son los pesos sinápticos de la neurona j , lo que hace cada peso sináptico es simplemente multiplicar a su entrada correspondiente y define la importancia relativa de cada entrada, u_j es la salida de la combinación lineal obtenida debido a las

señales de entrada, b_j es el sesgo (bias), $\varphi(\cdot)$ es la función de activación y y_j es la señal de salida de la neurona. El uso del sesgo tiene el efecto de aplicar una transformación a la entrada neta u_j , esto es:

$$y_j = \varphi(u_j + b_j) \quad (3.25)$$

donde u_j es llamado campo local inducido o potencial de activación. Se formulan las siguientes ecuaciones, contando con b_j como parámetro externo a la neurona j :

$$u_j = \sum_{i=0}^l w_{ij} x_i \quad (3.26)$$

$$y_j = \varphi(u_j) \quad (3.27)$$

en donde se agrega una nueva sinapsis, siendo su entrada y su peso, respectivamente:

$$x_0 = +1 \quad (3.28)$$

$$w_{j0} = b_j \quad (3.29)$$

Como se mencionó, la neurona se activa si la entrada total supera un cierto umbral, entonces se aplica una función de activación sobre y_j .

3.3.4 FUNCIONES DE ACTIVACIÓN Y TRANSFERENCIA

Todas las neuronas que componen a la RNA se encuentran entre dos posibles estados, reposo o excitación, a los que se denominará estados de activación y a cada uno de los cuales se le asigna un valor, los valores de activación pueden ser continuos o discretos. Es aquí donde la función de activación definida por $\varphi(x)$, juega un papel muy importante ya que es la que define finalmente la salida de cada neurona en términos de su patrón de entrada x . Las funciones de activación típicas que determinan estos valores de activación [21,26] para distintos tipos de neuronas se pueden definir como:

- *Función lineal ó identidad:* tiene la forma $\varphi(x) = x$, este tipo de funciones se emplea cuando no se desea acotar la salida de la neurona.
- *Función escalón:* La función escalón adopta la forma:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

sólo se utiliza cuando las salidas de la red son binarias (dos valores posibles). La función de transferencia escalón se asocia a neuronas binarias en las cuales, cuando la suma de las entradas es mayor o igual que el umbral de la neurona, la activación es 1, si es menor la activación es 0 ó -1. En la literatura es habitual encontrársela con el nombre de función de Heaviside.

- *Sigmoidal:* Las funciones sigmoideas son un conjunto de funciones crecientes, monótonas y acotadas que provocan una transformación no lineal de su argumento, para este tipo de

funciones la mayoría de los valores del estímulo de entrada (variable independiente) al evaluarse en la función el resultado es cercano a uno de los valores asintóticos. Una de las más utilizadas es la función tangente hiperbólica definida por:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3.31)$$

La función tangente hiperbólica se encuentra acotada entre $[-1, 1]$. La figura (3.9) muestra su representación gráfica en un rango de $[-10, 10]$, una de las características de este tipo de función es que para cada punto en el cual sea mapeada existirá su derivada, presenta un comportamiento estable dos unidades a la izquierda y dos unidades a la derecha después del origen, estas características permiten un buen desempeño en la actualización de los pesos por medio de la retropropagación del error en la etapa del entrenamiento de la red neuronal.

34

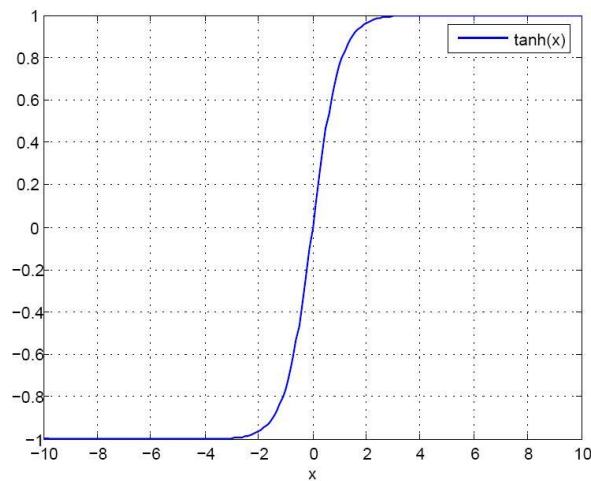


Figura 3.9. Representación gráfica de la función tangente hiperbólica.

Otras de las funciones típicas de esta clasificación es la función logística definida por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (3.32)$$

en este caso, la función está acotada entre el intervalo $[0, 1]$, como se puede observar en la figura (3.10).

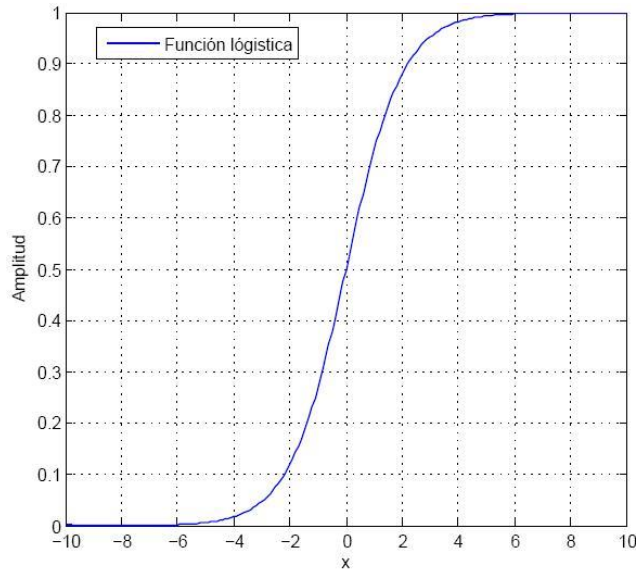


Figura3.10 Representación gráfica de la función logística.

- *Función de base radial*: Las más habituales son funciones Gaussianas no monótonas del tipo:

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.33)$$

donde σ define la anchura y μ define el centro. Como se observa en la figura (3.11), la función alcanza su valor máximo cuando la entrada es cero. Una de las características más importantes es que los centros y anchuras de estas funciones pueden ser adaptados lo cual las hace más adaptativas que las funciones sigmoideas. Mapeos que suelen requerir dos niveles ocultos utilizando neuronas con funciones de transferencia sigmoideas, algunas veces se pueden realizar con un solo nivel en redes con funciones Gaussianas, claro esto depende del tipo de problema que se quiera resolver.

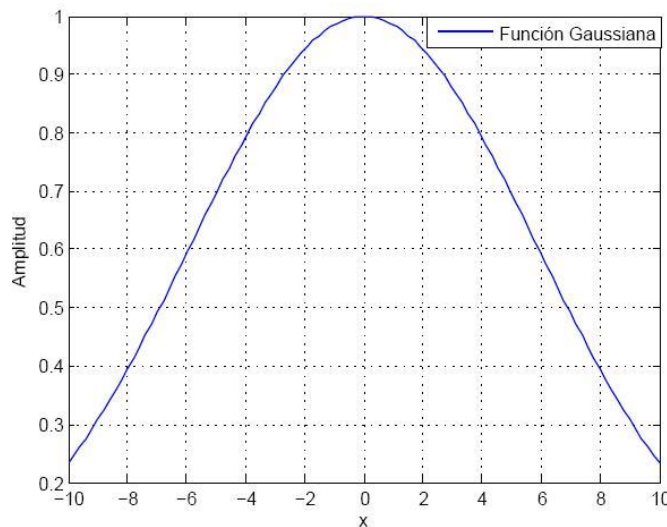


Figura 3.11. Representación gráfica de la función Gaussiana.

3.3.5 ARQUITECTURA DE REDES NEURONALES

La topología o arquitectura de una red consiste en la organización y disposición de las neuronas en la red, las redes neuronales por su arquitectura se clasifican en tres diferentes grupos las cuales son:

- *Redes de una sola capa con alimentación hacia adelante:* En las redes neuronales con alimentación hacia adelante las neuronas se encuentran organizadas en forma de capas. Una capa de entrada de nodos que se proyecta en una capa de salida de neuronas, pero no viceversa, como se puede observar en la figura (3.12). Esta red es conocida como una red de una sola capa refiriéndose a la capa de salida compuesta por neuronas o nodos, siendo el perceptrón simple la red de este tipo más representativa.

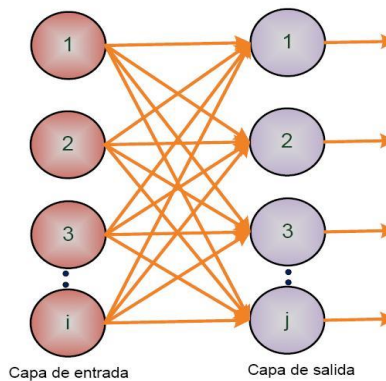


Figura 3.12 Red Neuronal de una sola capa.

- *Redes multicapa con conexiones hacia adelante:* El segundo grupo de redes neuronales con alimentación hacia adelante se distingue por la presencia de una o más capas ocultas, cuyos nodos son llamados neuronas ocultas. La función de estas neuronas es intervenir entre la entrada y la salida de la red. Los nodos de la capa de entrada de la red suministran los elementos respectivos del patrón de activación (vector de entrada), los cuales constituyen las señales de entrada aplicadas a las neuronas en la segunda capa (esto es, la primera capa oculta). Las señales de salida de la segunda capa son usadas como entradas de la tercera capa, y así sucesivamente para el resto de la red. Las neuronas en cada capa de la red tienen solamente como entradas las señales de salida de la capa anterior. El conjunto de señales de salida de las neuronas en la capa de salida (última capa) de la red constituyen la respuesta total de la red al patrón de activación recibido a través de los nodos en la capa de entrada (primera capa). Una red de este tipo se muestra en la figura (3.13) para el caso de una única capa oculta. Esta red está totalmente conectada en el sentido de que cada nodo de la red está conectado a cada uno de los nodos restantes en la capa siguiente.

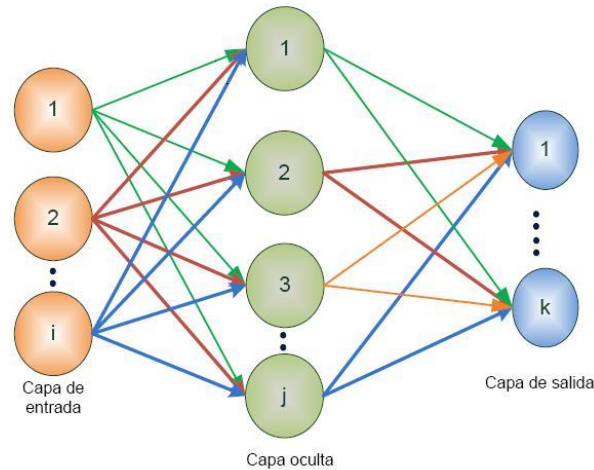


Figura 3.13. Red neuronal multicapa.

- *Redes recurrentes:* Se distinguen de las redes con alimentación hacia adelante en que éstas tienen por lo menos un ciclo de retroalimentación. Por ejemplo, una red recurrente puede consistir de una única capa de neuronas, con cada neurona alimentando su señal de salida hacia las entradas del resto de neuronas. En este caso, no existen ciclos de retroalimentación de la salida de una neurona hacia su misma entrada. Otro caso es el de redes en las que existen capas ocultas, en las que las conexiones de retroalimentación pueden ser originadas desde las neuronas ocultas o también desde las neuronas de salida, como se observa en la figura (3.14). Los ciclos de retroalimentación implican el uso de bifurcaciones particulares compuestas por elementos de retardo denotados por z^{-1} , lo cual resulta en un comportamiento dinámico no lineal, asumiendo que la red neuronal contiene unidades no lineales.

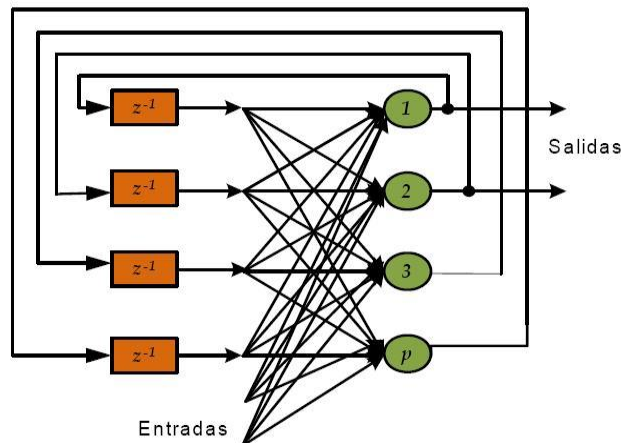


Figura 3.14. Red neuronal recurrente.

Las redes con alimentación hacia adelante son estáticas, esto es, que producen solamente un conjunto de valores de salida en vez de una secuencia de valores a partir de una entrada dada. Las redes con alimentación hacia adelante no tienen memoria, en el sentido de que su respuesta a una entrada es independiente del estado anterior de la red. Las redes recurrentes o retroalimentadas, por otra parte, son sistemas dinámicos, cuando un nuevo patrón de entrada se presenta, se calculan las salidas de las neuronas, como se tienen enlaces

retroalimentados las entradas a cada neurona se modifican, lo cual lleva a la red a cambiar de estado de acuerdo al patrón de entrada.

3.3.6 APRENDIZAJE DE REDES NEURONALES

La capacidad de aprender es una de las tantas condiciones que se requiere para definir a alguien o algo como inteligente, si bien dar una definición precisa de aprendizaje es una tarea difícil, el proceso de aprendizaje en el contexto de redes neuronales artificiales puede entenderse como el problema de modificar la arquitectura de la red y el peso de sus conexiones, de tal forma que la red pueda desarrollar una tarea específica de manera eficiente, con la finalidad de aprender el conjunto de conexiones sinápticas a partir de un conjunto de patrones de entrenamiento propuestos.

Esta habilidad de las redes neuronales artificiales de aprender a partir de ejemplos las hace particularmente interesantes desde el punto de vista biológico, y útiles desde el punto de vista computacional.

Para entender o para diseñar procesos de aprendizaje, se debe primero tener un modelo de medio ambiente en el cual la red tendrá que operar. En otras palabras, se debe conocer qué tipo de información puede usar la red neuronal. Este modelo usualmente se conoce cómo paradigma de aprendizaje. En segundo lugar, se debe de entender como la red va a actualizar su arquitectura y sus conexiones sinápticas. Un algoritmo de aprendizaje es precisamente un procedimiento por el cual podemos ajustar repetidamente los pesos sinápticos.

Existen básicamente tres tipos de aprendizaje los cuales son: supervisado, no supervisado e híbrido.

- *Aprendizaje supervisado:* También llamado aprendizaje con un maestro. Consiste en introducir una serie de patrones de entrada a la red y a su vez mostrar la salida que se quiere obtener para cada patrón de entrenamiento, el esquema de este aprendizaje se muestra en la figura (3.15). En términos conceptuales, se entiende que el maestro tiene un conocimiento del ambiente, siendo éste representado por un conjunto de ejemplos entrada-salida. Supongamos que el maestro y la red neuronal están expuestos a un vector de entrenamiento obtenido del ambiente de acuerdo al conocimiento existente, el maestro es capaz de proporcionar una respuesta deseada a la red neuronal de acuerdo al vector de entrenamiento.

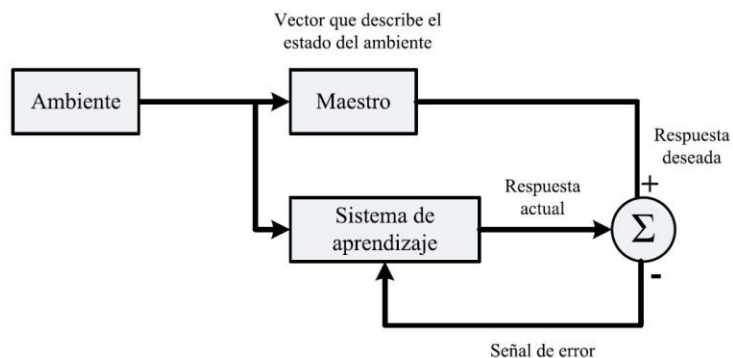


Figura 3.15. Aprendizaje supervisado.

Realmente, la respuesta deseada representa la acción óptima a ser realizada por la red neuronal. Los parámetros de la red son ajustados bajo la influencia combinada del vector de entrenamiento y la señal de error. La señal de error se define como la diferencia entre la respuesta deseada y la respuesta actual de la red.

- *Aprendizaje no supervisado*: Es conocido como aprendizaje sin un maestro, debido a que no se requiere una respuesta correcta asociada con cada patrón de entrada en el conjunto de datos de entrenamiento como se observa en la figura (3.16). Este modelo de aprendizaje se basa en las correlaciones entre los patrones, y éstos se organizan en categorías teniendo en cuenta estas correlaciones [27]. Debido a que no existe un maestro que controle el proceso, las correlaciones entre los patrones son realizadas por una medida de la calidad de representación que se requiere que la red aprenda, y los parámetros libres de la red son optimizados con respecto a esa medida. Una vez que la red se ha ajustado a las regularidades estadísticas de los datos de entrada, ésta desarrolla la habilidad de formar representaciones internas para codificar características de la entrada y de esta forma se crean nuevas clases automáticamente [26]. Un ejemplo de este tipo de aprendizaje en las redes neuronales son los mapas autoorganizados de Kohonen.



Figura 3.16. Aprendizaje no supervisado.

- *Aprendizaje híbrido*: Este tipo de aprendizaje hace referencia a los dos tipos de aprendizaje mencionados, por ejemplo en estos tipos de redes la información dada por el maestro es mínima, limitándose a indicar si la respuesta de la red es correcta o incorrecta.

3.3.7 PERCEPTRON MULTICAPA

Uno de los algoritmos de mayor eficiencia implementados en la arquitectura de las redes neuronales es el algoritmo perceptrón multicapa que fue creado mediante la generalización de la regla de aprendizaje propuesta por Widrow-Hoff [19] para redes multicapas y las funciones de transferencia diferenciables no lineales. Los vectores de entrada y los vectores correspondientes a las salidas deseadas se emplean para entrenar una red hasta cuando ella pueda aproximar una función, asociando los vectores de entrada con los vectores de salida específicos o clasificar los vectores de entrada de una manera apropiada de acuerdo a como estos hayan sido definidos.

Antecedentes

Las redes neuronales con una sola capa como lo es el caso del perceptrón o el ADALINE presentan muchas limitaciones para poder resolver diferentes tipos de aplicaciones, Minsky and Papert [21] en 1969 mostraron que 2 capas en una red neuronal pueden superar tales limitaciones, sin embargo, no

presentaron la solución al problema de cómo ajustar los pesos de entrada a las unidades ocultas. Una solución a este problema fue propuesto por Rumelhart, Hinton, and Williams, en 1986 [22].

La idea central de esta solución es que los errores para las unidades de las capas son determinados por la propagación de los errores de las unidades de la capa de salida hacia la capa de entrada. Surgiendo así el algoritmo perceptrón multicapa (retropropagación del error).

El algoritmo perceptrón multicapa es un algoritmo de gradiente descendente, como lo es la regla de aprendizaje Widrow-Hoff [19], en la cual los pesos de la red son movidos a lo largo del negativo del gradiente de la función de ejecución.

La red neuronal perceptrón multicapa es un tipo de red de aprendizaje supervisado, que emplea un ciclo propagación-adaptación de dos fases. Una vez que se ha aplicado un patrón a la entrada de la red neuronal, esta se propaga desde la primera capa a través de las capas subsecuentes de la red, hasta generar una salida, la señal de salida se compara con la salida deseada y se calcula una señal de error por cada una de las salidas.

Las salidas de error generadas se propagan hacia atrás, iniciando de la capa de salida, hacia todas las neuronas de la capa oculta las cuales sólo reciben una fracción de la señal total del error, basándose en la contribución relativa que haya aportado cada neurona a la salida original. Este proceso se repite, capa por capa, hasta que todas las neuronas de la red hayan recibido una señal de error que describa su contribución al error total. Basándose en la señal de error percibida, se actualizan los pesos de conexión de cada neurona, para hacer que la red converja hacia un estado que permita clasificar correctamente todos los patrones de entrenamiento presentados en un principio.

La importancia de este proceso consiste en que a medida que se entrena la red, las neuronas de la capa intermedia se organizan a sí mismas, de tal modo que las distintas neuronas aprenden a reconocer distintas características del espacio total de entrada. Después del entrenamiento, cuando se les presente un patrón de entrada que contenga ruido, que esté incompleto o que no pertenezca al conjunto de patrones con el cual fue entrenada la red previamente, las neuronas de la capa oculta de la red responderán con una salida activa si la nueva entrada contiene un patrón que se asemeje a aquella característica que las neuronas individuales hayan aprendido a reconocer durante su entrenamiento y a la inversa, las unidades de las capas ocultas tienen una tendencia a inhibir su salida si el patrón de entrada no contiene alguna característica a reconocer, para lo cual han sido entrenadas. Esta manera de aprender a clasificar los patrones de entrada en la red se le conoce como Generalización.

Arquitectura de la red

La arquitectura de la red se observa en la figura (3.17), en la cual la capa de salida es la capa L -ésima, y tiene y_L neuronas. La de entrada es la capa x y tiene x_0 neuronas, la capa oculta es la capa z_1 hasta la capa z_{L-1} . Por lo tanto, la red tiene L capas, a la L se le conoce como la profundidad de la red, cada capa tiene sus neuronas de ganancia (bias). En general, las neuronas de cada capa se encuentran completamente conectadas con las de la siguiente capa.

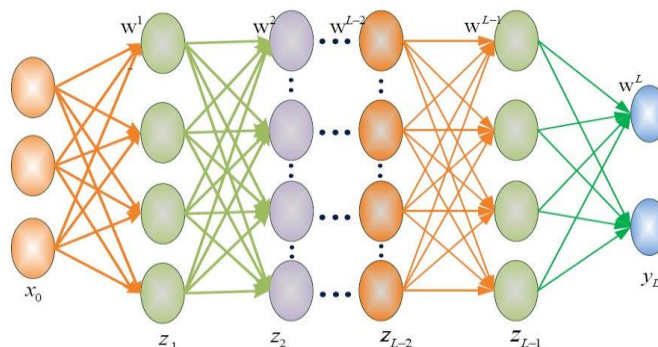


Figura 3.17. Red neuronal multicapa a utilizar.

Para el funcionamiento adecuado de la red se pasa por dos tipos de señales: las cuales son señales de función y señales de error.

1. Señales de función: Es el estímulo que entra en la capa 0, y pasa hacia adelante, capa por capa, hasta la última capa L , donde finalmente se genera la señal de salida de la red.
2. Señales de error: Después de la etapa hacia adelante, se presenta la retropropagación del error hacia atrás. Cuando se corrige la sinapsis se inicia corrigiendo la de la capa L , luego las de la capa $L-1$, y así sucesivamente hasta llegar a la primera capa. A esto se le llama señal de error, el proceso va desde la última capa hasta la primera corrigiendo sinapsis tras sinapsis.

Se nota que esta red de L capas equivale a tener L redes tipo Perceptrón en cascada, lo que significa que la salida de la primera red, es la entrada a la segunda y la salida de la segunda red es la entrada a la tercera. Cada una de las L capas puede tener diferente número de neuronas, e incluso distinta función de activación. W^1 representa la matriz de pesos para la primera capa, W^2 los pesos de la segunda capa y la misma notación se emplea para las L capas que incluya la red.

3.4 ALGORITMO LMS

En este capítulo se aborda el algoritmo LMS donde se explica en detalle su desarrollo y su implementación. Desde el inicio el LMS es aplicado a un arreglo de antenas de 7 elementos propuesto por Widrow [1] en 1967. Este mismo algoritmo se utiliza en la actualidad en los sistemas radar para colocar nulos en las direcciones de las señales de interferencia conocidas a priori. Se presenta una característica importante del algoritmo LMS, que establece que se debe iniciar con un vector de pesos para comenzar el proceso de adaptación del patrón de radiación del arreglo.

Por otro lado, una vez que se comprende la importancia de la inicialización de los pesos, se muestra la técnica de ventaneo para reducir los lóbulos secundarios en arreglos de antena fijos. Esta técnica modifica el patrón de los arreglos pero no es un proceso adaptativo como el algoritmo LMS. Sin embargo, los valores de los pesos calculados presentan una opción para la inicialización del vector de pesos en el LMS.

3.4.1 RESEÑA HISTÓRICA DEL LMS

1967. En este año B. Widrow, P.E. Mantey, [1] presenta su trabajo acerca de un Sistema Adaptativo de Antenas, donde se muestran arreglos de antenas cuyo patrón de radiación es modificado utilizando el algoritmo LMS. El objetivo de modificar dicho patrón es reducir fuentes de ruido que se encuentran en una dirección conocida a priori.

1976. En este trabajo Bernard Widrow, John M. McCool [28] presenta las características de aprendizaje estacionarias y no estacionarias del filtro adaptativo LMS. Se hace referencia a su trabajo de 1967 y se presentan los criterios para seleccionar el parámetro de convergencia μ .

1982 En este trabajo Bernard Widrow, Kenneth M. Duval [29] examina y propone criterios para eliminar el fenómeno de cancelación de señal en los sistemas adaptativos de antenas. Se utilizan el filtro supresor de frecuencia para elegir la insertar en una dirección específica un nulo en el patrón de radiación.

1984. En este trabajo Widrow y Eugene [30] actualizan el criterio para la elección del parámetro de convergencia μ , tomando como base la calidad de la solución adaptiva y la cantidad de datos que se utilizan para obtenerla.

1986. En el trabajo de Young-Lim, Tie-Jun Shan y Bernard Widrow [31] presentan la idea de realizar un procesamiento espacial en paralelo como alternativa para evitar la cancelación de señal en arreglos adaptativos. El principal objetivo de este trabajo es localizar las direcciones correctas donde se ubicarán los nulos en el patrón de radiación, tomando como base el artículo de Widrow de 1982.

2002. Es en este año donde Delores M y Allan O [32] escriben un su artículo de Procesamiento Adaptativo con Mínimos Cuadrados: Aplicaciones Militares, donde se presenta el trabajo de 1967 del Dr. Bernard Widrow utilizado por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos. Se debe recalcar que no se presenta ninguna otra referencia del trabajo de Widrow aplicado a arreglos de antenas.

2003. Bernard Widrow y Max Kamenetsky [33] realizan una comparación entre el algoritmo LMS y el algoritmo LMS/Newton, este último proporciona una mejor calidad de solución utilizando la mínima de datos. Sin embargo, ambos algoritmos proporcionan el mismo resultado cuando se trabaja con señales de entrada estadísticas no estacionarias. Por lo que en este trabajo de tesis se utiliza el algoritmo LMS.

2005 Bernard Widrow [34] utiliza una combinación entre el algoritmo LMS y la red ADALINE. Los pesos de la red neuronal son entrenados por el algoritmo LMS. Se presenta un método alternativo para el diseño de filtros. Sinmo Sung, Fredric M. Ham y Wesley Shelton [35] presentan un trabajo acerca de un nuevo método robusto usando redes neuronales para rechazar interferencias coherentes en arreglos adaptativos. En este artículo se hace una modificación al sistema propuesto por Widrow, y utiliza una capa entrada y una capa oculta utilizando una red neuronal perceptrón multicapa.

El algoritmo LMS pertenece a la familia de los algoritmos de gradiente estocástico. Con el término "estocástico" se pretende distinguir este algoritmo del método de la pendiente descendiente, que utiliza un gradiente determinista para el cálculo de los coeficientes del filtro, una característica importante del LMS es su simplicidad, no requiere medidas de las funciones de correlación, ni tampoco inversión de la matriz de auto correlación.

El algoritmo LMS comprende dos procesos básicos:

- Un proceso de filtrado, que implica el cálculo de la salida generada por un filtro transversal, y la generación de una estimación del error comparando esta salida con la respuesta deseada.
- Un proceso adaptativo, realiza el ajuste automático de los coeficientes del filtro de acuerdo con la estimación del error.

Este algoritmo está basado en el método de la pendiente descendiente el cual cambia el vector de pesos que son hechos a lo largo de la dirección estimada del vector de gradiente. Por consiguiente,

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \mu \tilde{\nabla}(j) \quad (3.34)$$

Donde:

$\mathbf{W}(j)$ = vector de pesos antes de la adaptación.

$\mathbf{W}(j+1)$ = vector de pesos después de la adaptación.

μ = Constante escalar que controla el rango de convergencia y estabilidad

$\tilde{\nabla}(j) \triangleq$ Vector del gradiente estimado de ε^2 con respecto a \mathbf{W} .

Un método para obtener el gradiente estimado de la función de error cuadrático medio es tomar el gradiente de una sola muestra de tiempo del error al cuadrado.

$$\tilde{\nabla}(j) = \nabla[\varepsilon^2(j)] = 2\varepsilon(j)\nabla[\varepsilon(j)]$$

De (3.18)

$$\nabla[\varepsilon(j)] = \nabla[d(j) - \mathbf{W}^T(j)\mathbf{X}(j)] = -\mathbf{X}(j)$$

De este modo

$$\tilde{\nabla}(j) = -2\varepsilon(j)\mathbf{X}(j) \quad (3.35)$$

El gradiente de estimación de la ecuación (3.35), es inesperado, como se muestra en el siguiente argumento. Para un vector de peso dado $\mathbf{W}(j)$. El valor esperado del gradiente de estimación es:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\nabla}(j)] &= -2E[\{d(j) - \mathbf{W}^T(j)\mathbf{X}(j)\}\mathbf{X}(j)] \\ E[\tilde{\nabla}(j)] &= -2[\Phi_{xd}(j) - \mathbf{W}^T(j)\Phi_{xx}(j)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Comparando (3.21) y (3.36), se observa que:

$$E[\tilde{\nabla}(j)] = \nabla E[\varepsilon^2]$$

Y por lo tanto, para un vector de peso dado, el valor esperado de la estimación es igual al valor verdadero. Usando la fórmula del gradiente de estimación dado en (3.36), la regla de iteración de peso (3.34) se vuelve:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - 2\mu\varepsilon(j)\mathbf{X}(j) \quad (3.37)$$

Y el siguiente vector de peso se obtiene sumando al vector de peso presente, el vector de entrada escalado por el valor del error.

El algoritmo LMS está dado por (3.37). Esta expresión puede usarse directamente para la adaptación de pesos para sistemas digitales.

3.4.2 CONVERGENCIA DE LA MEDIA DEL VECTOR DE PESOS

Ahora supóngase que el tiempo entre las iteraciones sucesivas del algoritmo LMS es suficientemente largo así que la muestra de vectores de entrada $\mathbf{X}(j)$ y $\mathbf{X}(j+1)$ no están correlacionados. Esta suposición es común en el campo de la aproximación estocástica. Porque el vector de peso $\mathbf{W}(j)$ es una función solo de los vectores de entrada $\mathbf{X}(j-1)$, $\mathbf{X}(j-2)$, ..., $\mathbf{X}(0)$ y debido a que los vectores de entrada sucesivos no están correlacionados, $\mathbf{W}(j)$ es independiente de $\mathbf{X}(j)$.

Para entradas estacionarias el proceso reúne esta condición, se puede demostrar que el valor esperado $E[\mathbf{W}(j)]$ del vector de peso después de un gran número de iteraciones converge a la solución de Wiener dada por (3.23). Tomando el valor esperado de ambos lados de (3.37) se obtiene una ecuación diferencial en el valor esperado del vector de peso.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}(j+1)] &= E[\mathbf{W}(j)] - 2\mu E[\{d(j) - \mathbf{W}^T(j)\mathbf{X}(j)\}\mathbf{X}(j)] \\ E[\mathbf{W}(j+1)] &= \mathbf{I} + 2\mu\Phi_{xx}(j)E[\mathbf{W}(j)] - 2\mu\Phi_{xd}(j) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Con un vector de peso inicial $\mathbf{W}(0)$, $j+1$ iteraciones de (3.38) produce:

$$E[\mathbf{W}(j+1)] = [\mathbf{I} + 2\mu\Phi_{xx}(j)]^{j+1} \mathbf{W}(0) - 2\mu \sum_{i=0}^j [\mathbf{I} + 2\mu\Phi_{xx}(j)]^i \Phi_{xd}(j) \quad (3.39)$$

La matriz $\Phi_{xx}(j)$ en la ecuación (3.39) se puede poner en forma diagonal usando la transformación de similitud apropiada \mathbf{Q} , esto es,

$$\Phi_{xx}(j) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{Q}$$

Donde:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & e_2 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

es la matriz diagonal de los valores propios de $\Phi_{xx}(j)$ y \mathbf{Q} es la matriz de vectores propios de Φ , puesto que $\Phi_{xx}(j)$ es positiva definida. La ecuación (3.39) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}(j+1)] &= [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{Q}]^{j+1} \mathbf{W}(0) - 2\mu \sum_{i=0}^j [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{Q}]^i \Phi_{xd}(j) \\ E[\mathbf{W}(j+1)] &= \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}]^{j+1} \mathbf{Q} \mathbf{W}(0) - 2\mu \mathbf{Q}^{-1} \sum_{i=0}^j [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}]^i \mathbf{Q} \Phi_{xd}(j) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Considerando la matriz diagonal $[\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}]$. Tan largo como sus términos diagonales y que todos de magnitud menor que la unidad

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}]^{j+1} \rightarrow 0,$$

el primer término de (3.40) desaparece ya que el número de iteraciones aumenta. El segundo término en (3.40) generalmente converge a un límite no-cero. La suma del factor

$$\sum_{i=0}^j [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}]^i$$

se convierte en:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^j [\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}]^i = \frac{1}{2\mu} \mathbf{E}^{-1}$$

Donde la fórmula para la suma de una serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} [1 + 2\mu e_p]^i = \frac{1}{1 - (1 + 2\mu e_p)} = \frac{-1}{2\mu e_p}$$

De este modo, en el límite, (3.40) se vuelve

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E[\mathbf{W}(j+1)] = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Q} \Phi(x, d)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E[\mathbf{W}(j+1)] = \Phi_{xx}^{-1}(j) \mathbf{Q} \Phi_{xd}(j)$$

La comparación de este resultado con (3.18) muestra que conforme el número de iteraciones aumenta sin límite, el valor esperado del vector de peso converge a la solución de Wiener. La convergencia del vector de peso para la solución de Wiener se asegura si y solo si la constante de proporcionalidad μ es ajustada dentro de ciertos límites.

Puesto que los términos diagonales de $[\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}]$ deben todas tener magnitudes menores que la unidad, y puesto que todos los eigen valores en \mathbf{E} son positivos, los límites sobre μ están dados por:

$$|1 + 2\mu e_{\max}| < 1$$

o

$$\frac{-1}{e_{\max}} < \mu < 0 \tag{3.41}$$

Donde e_{\max} es el máximo eigenvalor de $\Phi_{xx}(j)$. Esta condición de convergencia sobre μ se puede relacionar con la traza de $\Phi_{xx}(j)$ que es la suma de la diagonal de la matriz y representa la potencia de entrada total como sigue:

$$e_{\max} \leq \text{traza}[\Phi_{xx}(j)] \tag{3.42}$$

Donde

$$\text{traza}[\Phi_{xx}(j)] = E[\mathbf{X}^T(j) \mathbf{X}(j)]$$

$$\text{traza}[\Phi_{xx}(j)] = \sum_{i=1}^n E[x_i^2] = \text{es la potencia total de entrada}$$

Es decir, la convergencia se obtiene como

$$\frac{-1}{\sum_{i=1}^n E[x_i^2]} < \mu < 0$$

En la práctica, cuando se requiere de una adaptación lenta, usualmente μ se elige tal que:

$$\frac{-1}{\sum_{i=1}^n E[x_i^2]} \ll \mu < 0$$

3.4.3 CONSTANTES DE TIEMPO Y CURVA DE APRENDIZAJE

Los métodos de variables de estado, los cuales son ampliamente usados en la teoría del control moderno, han sido aplicados por Widrow, Koford y Groner para el análisis de estabilidad y constantes de tiempo (relacionado al rango de convergencia) del algoritmo LMS. Las simplificaciones son considerables en el análisis que ha sido realizado expresando el fenómeno transitorio del sistema de ajuste (el cual toma lugar durante el proceso de adaptación) en términos de las coordenadas normales del sistema. Como es mostrado por Widrow [1], los valores de peso sufren transitorios durante la adaptación. Los transitorios consisten de sumas de exponenciales con constantes de tiempo dadas.

$$\tau_p = \frac{1}{2(-\mu)e_p}, p = 1, 2, \dots, n \quad (3.43)$$

Donde e_p es el p -ésimo eigenvalor de la matriz de correlación de la señal de entrada $\Phi_{xx}(j)$. En el caso especial cuando todos los eigenvalores son iguales, todas las constantes de tiempo son iguales. Por consiguiente,

$$\tau = \frac{1}{2(-\mu)e} \quad (3.44)$$

Una forma muy útil para monitorear el progreso de un proceso adaptativo es trazar o visualizar su "Curva de Aprendizaje". Cuando se usa el error cuadrático medio como criterio de rendimiento, se puede visualizar el error cuadrático medio esperado en cada etapa del proceso de aprendizaje como una función de un número de ciclos de adaptación. Cuando todas las constantes de tiempo son iguales, la curva de aprendizaje del error cuadrático medio es una exponencial pura con una constante de tiempo:

$$\tau_{mse} = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{4(-\mu)e}$$

La estimación del rango de adaptación es más compleja cuando los eigenvalores no son iguales.

Cuando las curvas de aprendizaje experimentales actuales son graficadas, estas son generalmente de formas exponenciales ruidosas por el ruido inherente en la adaptación del proceso. Para una adaptación, menor será la amplitud del ruido aparente en la curva de aprendizaje.

3.4.4 DESAJUSTES CON LA ADAPTACIÓN LMS

Todo proceso adaptativo o sistemas de aprendizaje capaces de adaptarse en intervalos de tiempo real experimentan pérdidas en rendimiento debido a que sus sistemas de ajuste están basados en promedios estadísticos tomados con muestras de tamaño limitado.

Cuando se utiliza el algoritmo LMS con el elemento adaptativo básico de la figura 3.18, el nivel esperado del error cuadrático medio será mayor que el del sistema óptimo de Wiener cuyos pesos se ajustan en concordancia con la ecuación (3.23). Para conseguir el rendimiento de Wiener, es decir, para alcanzar el error cuadrático medio mínimo, se tendría que conocer las estadísticas de entrada *a priori*, y como es usual estas estadísticas son desconocidas, tendrían que ser medidas con una longitud estadística de muestra arbitraria.

Cuando se usa la adaptación del algoritmo LMS habrá un excedente del error cuadrático medio. Una medida del grado al cual el sistema adaptativo se desajusta comparado con el sistema óptimo de Wiener se determina en un sentido de rendimiento por la relación entre el excedente del error cuadrático medio y el mínimo error cuadrático medio. Esta medida adimensional de la pérdida en rendimiento se define como el “desajuste” M . Para la adaptación LMS del elemento básico adaptativo, es desajuste mostrado por Widrow es:

$$\text{Desajuste } M = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \frac{1}{\tau_p} \quad (3.45)$$

El valor del desajuste depende de las constantes de tiempo (ajustando tiempos) del filtro de ajuste de pesos. De nuevo, en el caso especial cuando todas las constantes de tiempo son iguales, M es proporcional al número de pesos e inversamente proporcional a la constante de tiempo. Esto es:

$$M = \frac{n}{2\tau} \quad (3.46)$$

$$M = \frac{n}{4\tau_{mse}}$$

Aunque los resultados anteriores específicamente se aplican a procesos estacionarios, estadísticamente, el algoritmo LMS puede también ser usado con procesos no estacionarios. Esto es

mostrado por Widrow que, bajo ciertas condiciones, el rango de adaptación se optimiza cuando la pérdida de rendimiento resultante de la adaptación rápidamente se iguala a dos veces la pérdida en rendimiento resultante de una adaptación lenta.

Si las señales radiadas recibidas por los elementos de un arreglo adaptativo de antena se componen de las señales más el ruido no deseado, la señal sería reproducida (y el ruido eliminado) lo mejor posible en el sentido de mínimo cuadrático si la respuesta deseada del procesador adaptativo fuera la señal misma. Esta señal generalmente no está disponible para propósitos de adaptación. Sin embargo, si se estuviera no habría la necesidad de un receptor y un arreglo de recepción.

En los sistemas adaptativos de antena que se manejan en este trabajo, la señal de respuesta deseada se obtiene a través del uso de una señal artificial inyectada, la "señal piloto", la cual es completamente conocida en el receptor y usualmente generada ahí. La señal piloto es construida para tener el espectro y las características direccionales similares a aquellas señales que llegan y que son de interés. Estas características podrían, en algunos casos, ser conocidas *a priori* pero, en general, representan estimaciones de los parámetros de la señal de interés.

La adaptación con la señal piloto causa que el arreglo forme un haz en la dirección de la señal piloto teniendo esencialmente una respuesta espectral plana y cambio de la fase lineal dentro de la banda de paso de la señal piloto. Además, los ruidos direccionales que afectan el arreglo de antenas, serán anulados colocando un nulo en la dirección del ruido.

La inyección de la señal piloto podría bloquear la recepción y quedar inservible su salida. Para evitar esta dificultad, se presentan dos algoritmos de adaptación, el "Modo I" y el "Modo II". El modo II procesa y adapta alternativamente a la señal piloto para formar el haz y entonces se adapta a las entradas naturales con la señal piloto apagada para eliminar el ruido. El arreglo de salida es útil durante el segundo modo, mientras la señal piloto está apagada. El algoritmo "Modo I" permite escuchar todas las señales, pero requiere más equipo para su implementación.

3.4.5 LA ADAPTACIÓN DEL ALGORITMO "MODO II"

La figura 3.18 ilustra un método para proporcionar la señal piloto la cual está siendo transmitida por una antena localizada a alguna distancia del arreglo en la dirección deseada. La figura 3.19 muestra un método más práctico para proveer la señal piloto. Las entradas al procesador son conectadas a cualquiera de los elementos actuales de salida de la antena (durante modo-II), o a un ajuste de señales retardadas derivadas del generador de la señal piloto (durante modo-I). Los filtros $\delta_1, \dots, \delta_k$ (retardos de tiempo ideales si los elementos del arreglo son idénticos) se eligen para obtener un conjunto de señales de entrada idénticas con las que aparecerían en el arreglo si se estuviera recibiendo una onda plana de la señal piloto desde la dirección deseada.

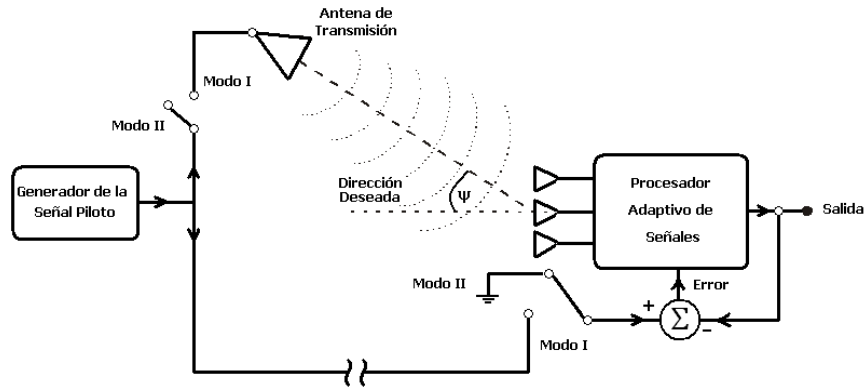


Figura. 3.18 Inyección de una señal piloto a un arreglo de antenas.

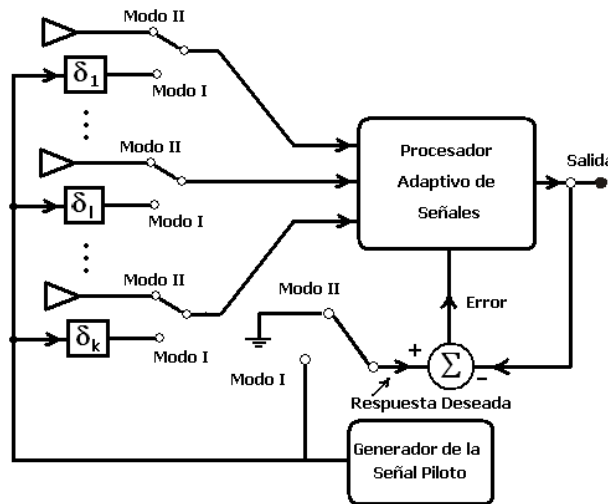


Figura 3.19 Inyección de una señal piloto a un arreglo de n antenas.

Durante la adaptación en el modo I, las señales de entrada para el procesador adaptativo se obtienen de la señal piloto, y la respuesta deseada del procesador adaptativo es la señal piloto por sí misma. Si por ejemplo se utiliza una señal piloto sinusoidal de frecuencia f_0 , los pesos se adaptarán para minimizar el error cuadrático medio, esto forzará a que la ganancia del arreglo de antena en la dirección deseada tenga una amplitud específica y un cambio de fase específico a la frecuencia f_0 .

Durante la adaptación en modo II, todas las señales aplicadas al procesador adaptativo son recibidas por los elementos de la antena del campo con ruido. En este modo, el proceso de adaptación procede a eliminar todas las señales recibidas, puesto que la respuesta deseada se ajusta a cero. La operación continua en el modo II causaría que todos los valores de peso tiendan a cero, y el sistema se apagaría por sí mismo. Sin embargo, alternando frecuentemente entre modo I y modo II y causando solo pequeños cambios en el vector de peso durante cada modo de adaptación, es posible mantener un haz en la dirección deseada y, por tanto, minimizar la recepción de la potencia del ruido incidente.

Se puede elegir la señal piloto como la suma de algunas sinusoides de frecuencias diferentes. Entonces la adaptación en modo I obliga a la ganancia y fase de la antena a tener valores específicos en cada una de las frecuencias de la señal piloto en la dirección deseada. Además, si se añaden a la vez algunas señales piloto de diferentes direcciones, sería posible obligar a la ganancia del arreglo simultáneamente en varias frecuencias y ángulos en el modo I. Esta característica proporciona algo de control de la banda ancha y el ancho del haz en la dirección deseada.

El proceso adaptativo en modo II esencialmente minimiza el valor cuadrático medio (de la potencia total) de todas las señales recibidas por los elementos de la antena los cuales no son correlacionadas con la señal piloto, sujeto a la restricción de que la ganancia y fase del haz se aproximen a los valores predeterminados en las frecuencias y ángulos dictados por las componentes de la señal piloto.

3.4.6 LA ADAPTACIÓN DEL ALGORITMO "MODO I"

En el algoritmo de adaptación del modo II el haz es formado durante el modo I, y los ruidos se eliminan en el sentido de los mínimos cuadrados (sujeto a las restricciones de la señal piloto) en el modo II. La recepción de la señal durante el modo I es imposible porque el procesador está conectado al generador de la señal piloto. Por lo tanto, la recepción puede tomar lugar solo durante el modo II. Esta dificultad se elimina en el sistema de la figura 3.20, en el cual las acciones de ambos modos pueden realizarse simultáneamente. La señal piloto y las señales recibidas entran en un procesador adaptativo auxiliar, justo como fue descrito previamente.

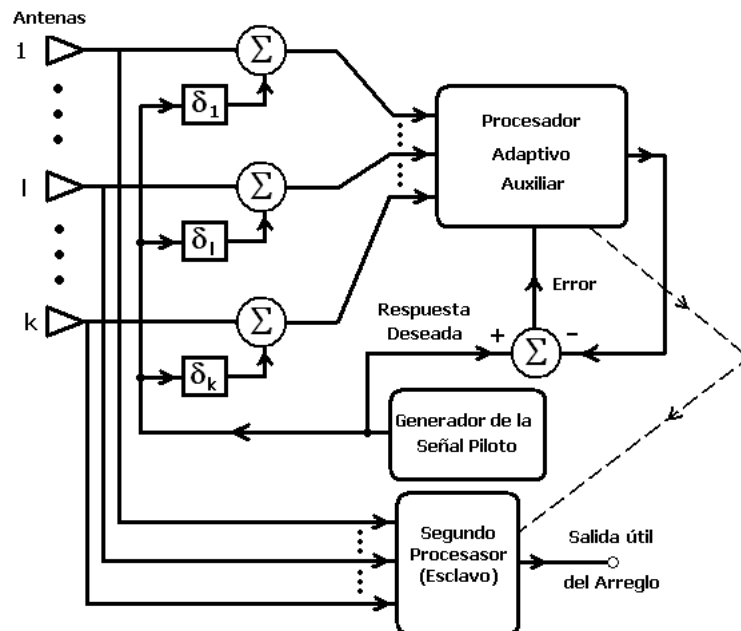


Figura 3.20 Adaptación del modo simple con la señal piloto

Para este procesador, la respuesta deseada es la señal piloto $p(t)$. Un segundo procesador de pesos (elemento lineal) genera la señal de salida real del arreglo, pero no lleva a cabo la adaptación. Sus señales de entrada no contienen la señal piloto. Es un esclavo del procesador adaptativo en tal forma que sus pesos siguen la pista de los pesos correspondientes del sistema de adaptación, así que nunca necesita recibir la señal piloto.

En el modo simple el sistema de la figura 3.20, la señal piloto es continua. La adaptación minimiza el error cuadrático medio que forzará al procesador adaptativo a reproducir la señal piloto tan detallada como sea posible, y, al mismo tiempo, a rechazar tan bien como sea posible (en el sentido del error cuadrático medio) todas las señales recibidas por los elementos de la antena los cuales no estén correlacionados con la señal piloto.

De este modo el proceso adaptativo modifica al patrón de radiación a tener un lóbulo principal apropiado en la dirección deseada en la banda de la señal piloto (satisfaciendo las restricciones de la señal piloto), y fuerza a los nulos en las direcciones de los ruidos y sus bandas de frecuencia.

3.5 MEMORIAS ASOCIATIVAS

En esta sección se abordarán los conceptos básicos de las memorias asociativas

3.5.1 CONCEPTOS BÁSICOS

El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. Los conceptos utilizados en esta sección se encuentran en las referencias [36, 37, 38].

Una **memoria asociativa** puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se presenta en la figura 3.21:

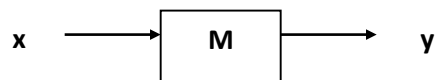


Figura 3.21 Esquema de una memoria asociativa.

En este esquema, los patrones de entrada y salida están representados por vectores columna denotados por \mathbf{x} y \mathbf{y} , respectivamente. Cada uno de los patrones de entrada forma una asociación con el correspondiente patrón de salida, la cual es similar a la una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones \mathbf{x} y \mathbf{y} del esquema anterior forman la asociación (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

No obstante que a lo largo de las dos secciones restantes del presente capítulo se respetarán las notaciones originales de los autores de los modelos presentados aquí, a continuación se propone una notación que se usará en la descripción de los conceptos básicos sobre memorias asociativas.

Los patrones de entrada y salida se denotarán con las letras negrillas, \mathbf{x} y \mathbf{y} , agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de

entrada \mathbf{x}^1 le corresponderá el patrón de salida \mathbf{y}^1 , y ambos formarán la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; del mismo modo, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa \mathbf{M} se representa mediante una matriz, la cual se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: este es el conjunto fundamental de aprendizaje, o simplemente conjunto fundamental.

El conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$$

donde p es un número entero positivo que representa la cardinalidad del conjunto fundamental.

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental se les llama patrones fundamentales. La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas:

Una memoria es autoasociativa si se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, por lo que uno de los requisitos que se debe de cumplir es que $n = m$.

Una memoria heteroasociativa es aquella en donde $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$. Nótese que puede haber memorias heteroasociativas con $n = m$.

En los problemas donde intervienen las memorias asociativas, se consideran dos fases importantes: La fase de aprendizaje, que es donde se genera la memoria asociativa a partir de las p asociaciones del conjunto fundamental, y la fase de recuperación que es donde la memoria asociativa opera sobre un patrón de entrada, a la manera del esquema que aparece al inicio de esta sección.

A fin de especificar las componentes de los patrones, se requiere la notación para dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B . Las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A , y las entradas de la matriz \mathbf{M} serán elementos del conjunto B .

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que el número de posibilidades para escoger A y B es infinito.

Por convención, cada vector columna que representa a un patrón de entrada tendrá n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A , y cada vector columna que representa a un patrón de salida tendrá m componentes cuyos valores pertenecen también al conjunto A . Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$$

La j -ésima componente de un vector columna se indicará con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$ o $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ según corresponda). La j -ésima componente del vector columna \mathbf{x}^μ se representa por: x_j^μ

Con los conceptos básicos ya descritos y con la notación anterior, es posible expresar las dos fases de una memoria asociativa:

1. **Fase de aprendizaje** (Generación de la memoria asociativa). Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz \mathbf{M} que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), \dots, (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ y $\mathbf{y}^\mu \in A^m \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria será heteroasociativa; si $m = n$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, la memoria será autoasociativa.
2. **Fase de recuperación** (Operación de la memoria asociativa). Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida \mathbf{y}^ω , cuando se opera la memoria \mathbf{M} con el patrón fundamental de entrada \mathbf{x}^ω ; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo.

Se dice que una memoria asociativa \mathbf{M} exhibe **recuperación correcta** si al presentarle como entrada, en la fase de recuperación, un patrón \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, ésta responde con el correspondiente patrón fundamental de salida \mathbf{y}^ω .

3.5.2 MEMORIAS ASOCIATIVAS α - β

Las memorias α - β [38] utilizan máximos y mínimos, y dos operaciones binarias originales α y β de las cuales heredan el nombre.

Para la definición de las operaciones binarias α y β se deben especificar los conjuntos A y B , los cuales son:

$$A = \{0, 1\} \quad \text{y} \quad B = \{0, 1, 2\}$$

La operación binaria $\alpha: A \times A \rightarrow B$ se define como:

x	y	$\alpha(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	2
1	1	1

La operación binaria $\beta: B \times A \rightarrow A$ se define como:

x	y	$\beta(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
2	0	1
2	1	1

Los conjuntos A y B , las operaciones binarias α y β junto con los operadores \wedge (mínimo) y \vee (máximo) usuales conforman el sistema algebraico $(A, B, \alpha, \beta, \wedge, \vee)$ en el que están inmersas las memorias asociativas Alfa-Beta.

Se requiere la definición de cuatro operaciones matriciales, de las cuales se usarán sólo 4 casos particulares:

Operación α_{max} : $P_{m \times r} \nabla_{\alpha} Q_{r \times n} = [f_{ij}^{\alpha}]_{m \times n}$, donde $f_{ij}^{\alpha} = \bigvee_{k=1}^r \alpha(p_{ik}, q_{kj})$

Operación β_{max} : $P_{m \times r} \nabla_{\beta} Q_{r \times n} = [f_{ij}^{\beta}]_{m \times n}$, donde $f_{ij}^{\beta} = \bigvee_{k=1}^r \beta(p_{ik}, q_{kj})$

Operación α_{min} : $P_{m \times r} \Delta_{\alpha} Q_{r \times n} = [h_{ij}^{\alpha}]_{m \times n}$, donde $h_{ij}^{\alpha} = \bigwedge_{k=1}^r \alpha(p_{ik}, q_{kj})$

Operación β_{min} : $P_{m \times r} \Delta_{\beta} Q_{r \times n} = [h_{ij}^{\beta}]_{m \times n}$, donde $h_{ij}^{\beta} = \bigwedge_{k=1}^r \beta(p_{ik}, q_{kj})$

Las operaciones $\alpha_{máx}$ y $\alpha_{mín}$ se utilizan en la fase de aprendizaje de las memorias asociativas *Máx* y *Mín*, respectivamente. La operación $\beta_{mín}$ se utiliza en la fase de recuperación de las memorias *Máx*, mientras que la operación $\beta_{máx}$ se aplica en la fase de recuperación de las memorias *Mín*.

El siguiente lema muestra los resultados obtenidos al utilizar las operaciones que involucran al operador binario α con las componentes de un vector columna y un vector fila dados.

La numeración de los lemas que se presentan en este capítulo, corresponde a la numeración original que aparece en [38].

Lema 2.1. Sean $\mathbf{x} \in A^n$ y $\mathbf{y} \in A^m$; entonces $\mathbf{y} \nabla_{\alpha} \mathbf{x}^t$ es una matriz de dimensiones $m \times n$, y además se cumple que: $\mathbf{y} \nabla_{\alpha} \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \Delta_{\alpha} \mathbf{x}^t$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \nabla_{\alpha} \mathbf{x}^t &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \nabla_{\alpha} (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \begin{pmatrix} \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_1, x_1) & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_1, x_2) & \dots & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_1, x_n) \\ \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_2, x_1) & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_2, x_2) & \dots & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_m, x_1) & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_m, x_2) & \dots & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_m, x_n) \end{pmatrix}_{m \times n} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(y_1, x_1) & \alpha(y_1, x_2) & \dots & \alpha(y_1, x_n) \\ \alpha(y_2, x_1) & \alpha(y_2, x_2) & \dots & \alpha(y_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha(y_m, x_1) & \alpha(y_m, x_2) & \dots & \alpha(y_m, x_n) \end{pmatrix}_{m \times n} \\
&= \begin{pmatrix} \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_1, x_1) & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_1, x_2) & \dots & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_1, x_n) \\ \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_2, x_1) & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_2, x_2) & \dots & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_m, x_1) & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_m, x_2) & \dots & \bigwedge_{k=1}^1 \alpha(y_m, x_n) \end{pmatrix}_{m \times n} \\
&= \mathbf{y} \Delta_{\alpha} \mathbf{x}^t
\end{aligned}$$

En efecto, resulta que $\mathbf{y} \nabla_{\alpha} \mathbf{x}^t$ es una matriz de dimensiones $m \times n$, y que $\mathbf{y} \nabla_{\alpha} \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \Delta_{\alpha} \mathbf{x}^t$.

Dado el resultado del lema anterior, es conveniente escoger un símbolo único, digamos el símbolo \otimes , que represente a las dos operaciones ∇_{α} y Δ_{α} cuando se opera un vector columna de dimensión m con un vector fila de dimensión n :

$$\mathbf{y} \nabla_{\alpha} \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \Delta_{\alpha} \mathbf{x}^t$$

La ij -ésima componente de la matriz está $\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}^t$ dada por:

$$[\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}^t]_{ij} = \alpha(y_i, x_j)$$

Dado un índice de asociación μ , la expresión anterior indica que la ij -ésima componente de la matriz $\mathbf{y}^{\mu} \otimes (\mathbf{x}^{\mu})^t$ se expresa de la siguiente manera:

$$[\mathbf{y}^{\mu} \otimes (\mathbf{x}^{\mu})^t]_{ij} = \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu})$$

Ahora se analizará el caso en el que se opera una matriz de dimensiones $m \times n$ con un vector columna de dimensión n usando las operaciones ∇_β y Δ_β . En los lemas 2.2 y 2.3 se obtiene la forma que exhibirán las i -ésimas componentes de los vectores columna resultantes de dimensión m , a partir de ambas operaciones ∇_β y Δ_β .

Lema 2.2 Sean $\mathbf{x} \in A^n$ y \mathbf{P} una matriz de dimensiones $m \times n$. La operación $\mathbf{P}_{m \times n} \nabla_\beta \mathbf{x}$ da como resultado un vector columna de dimensión m , cuya i -ésima componente tiene la siguiente forma:
 $(\mathbf{P}_{m \times n} \nabla_\beta \mathbf{x})_i = \bigvee_{j=1}^n \beta(p_{ij}, x_j)$

Demostración.-

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{m \times n} \nabla_\beta \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \nabla_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{m \times n} \nabla_\beta \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \beta(p_{11}, x_1) \vee \beta(p_{12}, x_2) \vee \cdots \vee \beta(p_{1n}, x_n) \\ \beta(p_{21}, x_1) \vee \beta(p_{22}, x_2) \vee \cdots \vee \beta(p_{2n}, x_n) \\ \vdots \\ \beta(p_{m1}, x_1) \vee \beta(p_{m2}, x_2) \vee \cdots \vee \beta(p_{mn}, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigvee_{j=1}^n \beta(p_{1j}, x_j) \\ \bigvee_{j=1}^n \beta(p_{2j}, x_j) \\ \vdots \\ \bigvee_{j=1}^n \beta(p_{mj}, x_j) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se obtiene un vector columna de dimensión m cuya i -ésima componente es

$$(\mathbf{P}_{m \times n} \nabla_\beta \mathbf{x})_i = \bigvee_{j=1}^n \beta(p_{ij}, x_j)$$

Lema 2.3 Sean $\mathbf{x} \in A^n$ y \mathbf{P} una matriz de dimensiones $m \times n$. La operación $\mathbf{P}_{m \times n} \Delta_\beta \mathbf{x}$ da como resultado un vector columna de dimensión m , cuya i -ésima componente tiene la siguiente forma:
 $(\mathbf{P}_{m \times n} \Delta_\beta \mathbf{x})_i = \bigwedge_{j=1}^n \beta(p_{ij}, x_j)$

Demostración

$$\mathbf{P}_{m \times n} \Delta_\beta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \Delta_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{m \times n} \Delta_{\beta} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta(p_{11}, x_1) \wedge \beta(p_{12}, x_2) \wedge \dots \wedge \beta(p_{1n}, x_n) \\ \beta(p_{21}, x_1) \wedge \beta(p_{22}, x_2) \wedge \dots \wedge \beta(p_{2n}, x_n) \\ \vdots \\ \beta(p_{m1}, x_1) \wedge \beta(p_{m2}, x_2) \wedge \dots \wedge \beta(p_{mn}, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigwedge_{j=1}^n \beta(p_{1j}, x_j) \\ \bigwedge_{j=1}^n \beta(p_{2j}, x_j) \\ \vdots \\ \bigwedge_{j=1}^n \beta(p_{mj}, x_j) \end{pmatrix}$$

Se obtiene un vector columna de dimensión m cuya i -ésima componente es

$$(\mathbf{P}_{m \times n} \Delta_{\beta} \mathbf{x})_i = \bigwedge_{j=1}^n \beta(p_{ij}, x_j)$$

3.5.2.1 MEMORIAS HETEROASOCIATIVAS ALFA-BETA

Se tienen dos tipos de memorias heteroasociativas Alfa-Beta: tipo \mathbf{V} máximo y tipo $\mathbf{\Lambda}$ mínimo. En la generación de ambos tipos de memorias se usará el operador \otimes el cual tiene la siguiente forma:

$$[\mathbf{y}^{\mu} \otimes (\mathbf{x}^{\mu})^t]_{ij} = \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu}); \mu \in \{1, 2, \dots, p\}, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Algoritmo memorias Alfa-Beta tipo \mathbf{V}

Fase de aprendizaje

Paso 1. Para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, a partir de la pareja $(\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{y}^{\mu})$ se construye la matriz

$$[\mathbf{y}^{\mu} \otimes (\mathbf{x}^{\mu})^t]_{m \times n}$$

Paso 2. Se aplica el operador binario máximo \vee a las matrices obtenidas en el paso 1:

$$\mathbf{V} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^{\mu} \otimes (\mathbf{x}^{\mu})^t]$$

La entrada ij -ésima está dada por la siguiente expresión:

$$v_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu})$$

Fase de recuperación

Se presenta un patrón \mathbf{x}^{ω} , con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ tipo \mathbf{V} y se realiza la operación Δ_{β} : $\mathbf{V} \Delta_{\beta} \mathbf{x}^{\omega}$.

Dado que las dimensiones de la matriz \mathbf{V} son de $m \times n$ y \mathbf{x}^ω es un vector columna de dimensión n , el resultado de la operación anterior debe ser un vector columna de dimensión m , cuya i -ésima componente es:

$$(\mathbf{V}\Delta_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^n \beta(v_{ij}, x_j^\omega)$$

Algoritmo memorias Alfa-Beta tipo Λ

Fase de aprendizaje

Paso 1. Para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, a partir de la pareja $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se construye la matriz

$$[\mathbf{y}^\mu \otimes (\mathbf{x}^\mu)^t]_{m \times n}$$

Paso 2. Se aplica el operador binario mínimo \wedge a las matrices obtenidas en el paso 1:

$$\Lambda = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \otimes (\mathbf{x}^\mu)^t]$$

La entrada ij -ésima está dada por la siguiente expresión:

$$\lambda = \bigwedge_{\mu=1}^p \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu)$$

Fase de recuperación

Se presenta un patrón \mathbf{x}^ω , con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ tipo Λ y se realiza la operación $\nabla_\beta: \Lambda \nabla_\beta \mathbf{x}^\omega$.

Dado que las dimensiones de la matriz Λ son de $m \times n$ y \mathbf{x}^ω es un vector columna de dimensión n , el resultado de la operación anterior debe ser un vector columna de dimensión m , cuya i -ésima componente es:

$$(\Lambda \nabla_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigvee_{j=1}^n \beta(\lambda_{ij}, x_j^\omega)$$

3.5.2.2 MEMORIAS AUTOASOCIATIVAS ALFA-BETA

Si a una memoria heteroasociativa se le impone la condición de que $\mathbf{y}^\mu = \mathbf{x}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ entonces, deja de ser heteroasociativa y ahora se le denomina autoasociativa.

A continuación se enlistan algunas de las características de las memorias autoasociativas Alfa-Beta:

1. El conjunto fundamental toma la forma $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$
2. Los patrones fundamentales de entrada y salida son de la misma dimensión; denotémosla por n .
3. La memoria es una matriz cuadrada, para ambos tipos, \mathbf{V} y $\mathbf{\Lambda}$. Si $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ entonces

$$\mathbf{V} = [v_{ij}]_{n \times n} \text{ y } \mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij}]_{n \times n}$$

Memorias autoasociativas Alfa-Beta tipo V

Las fases de aprendizaje y recuperación son similares a las memorias heteroasociativas Alfa-Beta.

Fase de aprendizaje

Paso 1. Para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, a partir de la pareja $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se construye la matriz

$$[\mathbf{x}^\mu \otimes (\mathbf{x}^\mu)^t]_{n \times n}$$

Paso 2. Se aplica el operador binario máximo \mathbf{V} a las matrices obtenidas en el paso 1:

$$\mathbf{V} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \otimes (\mathbf{x}^\mu)^t]$$

La entrada ij -ésima de la memoria está dada así:

$$v_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p \alpha(x_i^\mu, x_j^\mu)$$

y de acuerdo con que $\alpha: A \times A \rightarrow B$, se tiene que $v_{ij} \in B, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fase de recuperación. La fase de recuperación de las memorias autoasociativas Alfa-Beta tipo V tiene dos casos posibles. En el primer caso el patrón de entrada es un patrón fundamental; es decir, la entrada es un patrón \mathbf{x}^ω , con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. En el segundo caso, el patrón de entrada NO es un patrón fundamental, sino la versión distorsionada de por lo menos uno de los patrones fundamentales; lo anterior significa que si el patrón de entrada es \mathbf{x} , debe existir al menos un valor de índice $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, que corresponde al patrón fundamental respecto del cual \mathbf{x} es una versión alterada con alguno de los tres tipos de ruido: aditivo, sustractivo o mezclado.

Memorias autoasociativas Alfa-Beta $\mathbf{\Lambda}$

Fase de aprendizaje

Paso 1. Para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, a partir de la pareja $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se construye la matriz

$$[\mathbf{x}^\mu \otimes (\mathbf{x}^\mu)^t]_{n \times n}$$

Paso 2. Se aplica el operador binario máximo Λ a las matrices obtenidas en el paso 1:

$$\Lambda = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \otimes (\mathbf{x}^\mu)^t]$$

La entrada ij -ésima de la memoria está dada así:

$$\lambda_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p \alpha(x_i^\mu, x_j^\mu)$$

y de acuerdo con que $\alpha: A \times A \rightarrow B$, se tiene que $\lambda_{ij} \in B, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fase de recuperación. La fase de recuperación de las memorias autoasociativas $\alpha\beta$ tipo Λ tiene dos casos posibles. En el primer caso el patrón de entrada es un patrón fundamental; es decir, la entrada es un patrón \mathbf{x}^ω , con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. En el segundo caso, el patrón de entrada NO es un patrón fundamental, sino la versión distorsionada de por lo menos uno de los patrones fundamentales; lo anterior significa que si el patrón de entrada es \mathbf{x} , debe existir al menos un valor de índice $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, que corresponde al patrón fundamental respecto del cual \mathbf{x} es una versión alterada de alguno de los tres tipos: aditivo, sustractivo o mezclado.

3.5.3 MEMORIAS ASOCIATIVAS BIDIRECCIONALES ALFA-BETA

Las memorias asociativas bidireccionales (*Bidirectional Associative Memory*, BAM) Alfa-Beta tienen como principal característica la recuperación correcta de todos los patrones del conjunto fundamental [39], no presenta factor de olvido, es decir, todo lo que aprende todo lo reconoce. Este modelo está basado en los operadores α - β de los cuales heredan el nombre. En la figura 3.22 se muestra el esquema general del modelo de BAM Alfa-Beta.

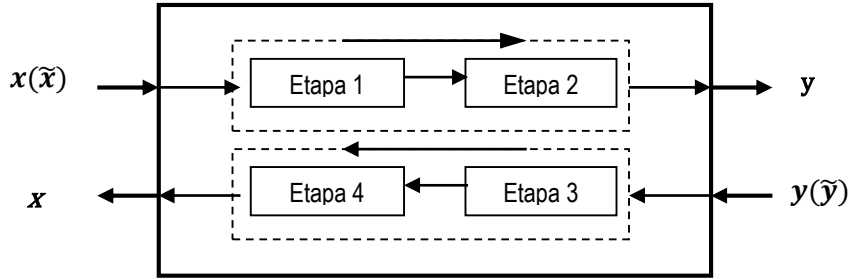


Figura 3.22 Esquema general de la BAM Alfa-Beta

La BAM Alfa-Beta consta de 4 etapas, dos para la dirección $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ y las otras dos etapas corresponden a la dirección $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$. A continuación se describen las fases de aprendizaje y de recuperación utilizadas en la dirección $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$.

Todos los conceptos utilizados a continuación están ampliamente descritos en [39].

Fase de aprendizaje

Las Etapas 1 y 2 de esta fase se muestran en la figura 3.23. En la etapa 1, a los patrones de entrada se les aplica la transformada vectorial de expansión dimensional con los correspondientes vectores One-Hot y Zero-Hot. Con estos patrones expandidos se crean dos memorias autoasociativas α - β , una *máx* y otra *mín*. La etapa 2 consiste en crear un *Linear-Associator* modificado con los vectores de salida \mathbf{y} . Cada vector \mathbf{y}^k se coloca en una columna de la matriz \mathbf{Y} .

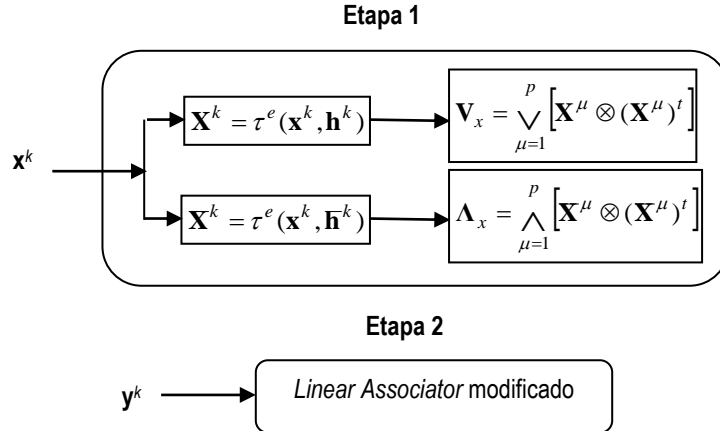


Figura 3.23 Etapas 1 y 2 de la fase de aprendizaje de la BAM Alfa-Beta en la dirección $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$.

Fase de recuperación

El algoritmo correspondiente a la fase de recuperación se presenta a continuación.

Paso 1. Presentar, a la entrada de la etapa 1, un vector del conjunto fundamental $\mathbf{x}^k \in A^n$ para algún índice $k \in \{1, \dots, p\}$

Paso 2. Construir el vector $\mathbf{u} \in A^p$

Paso 3. Aplicar la transformada vectorial de expansión del vector \mathbf{x} utilizando como argumentos el vector \mathbf{x}^k y el vector \mathbf{u} , para obtener \mathbf{F} .

Paso 4. Operar la memoria autoasociativa Alfa-Beta *max* \mathbf{V} con \mathbf{F} , para obtener un vector \mathbf{R} .

Paso 5. Aplicar la transformada de contracción del vector \mathbf{R} , cuyos argumentos son el vector \mathbf{R} , obtenido en el paso anterior, y p (número de patrones), para obtener el vector \mathbf{r} .

63

Paso 6. Si \mathbf{r} es un vector *one-hot*, entonces \mathbf{r} es el k -ésimo vector *one-hot*, \mathbf{h}^k , (Basado en el Teorema 4.2) **entonces**.

Paso 6.1 Se realiza la operación $\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{y} \cdot \mathbf{r}$, lo que resultará en el \mathbf{y}^k correspondiente. **Fin. Si no, entonces**

Paso 7. Construir el vector $\mathbf{w} \in A^p$

Paso 8. Aplicar la transformada vectorial de expansión del vector \mathbf{x} utilizando como argumentos el vector \mathbf{x}^k y el vector \mathbf{w} , para obtener \mathbf{G} .

Paso 9. Operar la memoria autoasociativa Alfa-Beta *min* $\mathbf{\Lambda}$ con \mathbf{G} , para obtener un vector \mathbf{S} .

Paso 10. Aplicar la transformada de contracción del vector \mathbf{S} , cuyos argumentos son el vector \mathbf{S} , obtenido en el paso anterior, y p (número de patrones), para obtener el vector \mathbf{s} .

Paso 11. Si \mathbf{s} es un vector *zero-hot*, entonces \mathbf{s} es el k -ésimo vector *zero-hot*, \mathbf{h}^k , (Basado en el Teorema 4.4) **entonces**.

Paso 11.1 Se realiza la operación $\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}$, lo que resultará en el \mathbf{y}^k correspondiente. **Fin. Si no, entonces**

Paso 12. Realizar la operación AND lógica entre \mathbf{r} y $\bar{\mathbf{s}}$ para obtener el vector \mathbf{t} , el cual (Basado en el Teorema 4.5) será igual al k -ésimo vector *one-hot*.

Paso 13. Realizar la operación $\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{y} \cdot \mathbf{t}$, para obtener el \mathbf{y}^k correspondiente. **Fin.**

3.5.4 TIPOS DE RUIDO

Existen tres tipos de ruido a los que se enfrenta cualquier memoria asociativa que trabaja con valores binarios, los cuales son: aditivo, sustractivo y mezclado. Las memorias asociativas α - β Máx y Mín son capaces de manejar de manera adecuada el ruido aditivo y el ruido sustractivo, respectivamente. Sin embargo, ninguno de los dos tipos de memoria es adecuado para manejar el ruido mezclado. Lo anterior se esquematiza en la figura 3.24.

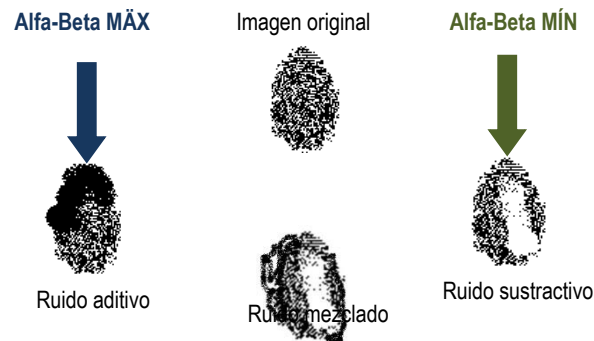


Figura 3.24 Tipos de ruido.

Estos se presentan cuando se trabaja con valores binarios: aditivo, sustractivo y mezclado. Las memorias asociativas α - β Máx soportan el ruido aditivo, mientras que las α - β Mín soportan ruido sustractivo, pero ninguno de los dos tipos puede manejar el ruido mezclado.

En la siguiente sección se presenta una alternativa para que las memorias α - β sean capaces de funcionar adecuadamente aún en presencia del ruido mezclado.

3.5.5 CÓDIGO JOHNSON-MÖBIUS MODIFICADO

Anteriormente se explicó que las memorias asociativas α - β pueden soportar ruido aditivo o sustractivo pero no ambos a la vez. Una manera de disminuir el ruido mezclado presente en los patrones es codificar los valores que representan a los patrones. Se ha demostrado que el desempeño de las memorias α - β mejora al utilizar la codificación Johnson-Möbius modificado [40]. El algoritmo de codificación se presenta a continuación, mediante un ejemplo:

Representar los números 0.2, 1.25, -0.3 y 2.147 usando el código Johnson-Möbius modificado, se tiene lo siguiente:

1. Se tiene el conjunto $r = \{0.2, 1.25, -0.3, 2.147\}$
2. Dado que existe un número negativo en el conjunto (-0.3) éste deberá restarse a todo el conjunto para obtener $t = \{0.5, 1.55, 0, 2.447\}$
3. Se escoge un número fijo $d = 1$, con el cual el número de decimales se reducirá a uno para obtener $t = \{0.5, 1.5, 0, 2.4\}$
4. Se realiza un escalamiento $10d$ para obtener $e = \{5, 15, 0, 24\}$ donde $e_m = 24$ (el número mayor del conjunto resultante).

5. Para cada número e_i del conjunto e , se generan $e_m - e_i$ ceros concatenados con e_i unos.

Los códigos correspondientes se muestran a continuación

NUMERO	Código Johnson-Möbius Modificado
5	000000000000000000011111
15	000000001111111111111111
0	000000000000000000000000
24	11111111111111111111111111

Capítulo 4

MODELO PROPUESTO

En este capítulo se abordan los algoritmos que describen el funcionamiento de las herramientas utilizadas en esta propuesta para la adaptación del patrón de radiación del modelo de arreglo de antenas empleado para la cancelación de ruido en señales de radar.

66

En la figura 4.1 se muestra el modelo a bloques propuesto por este trabajo.

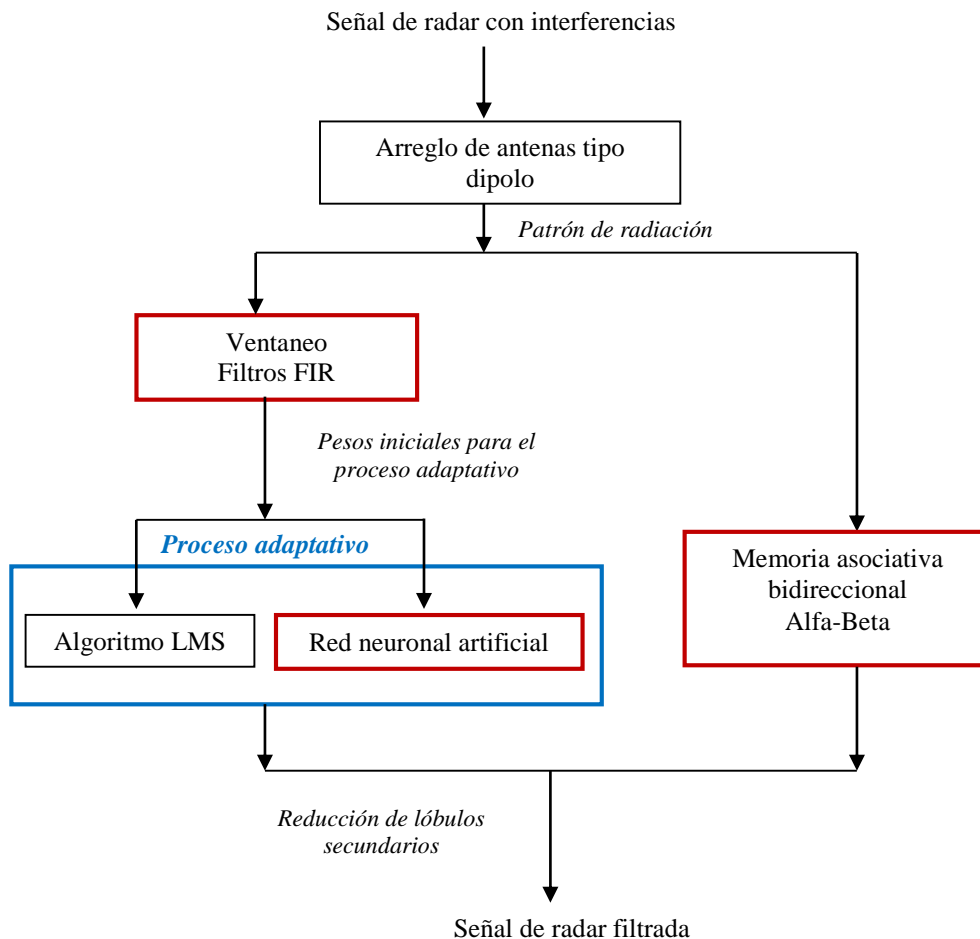


Figura 4.1 Diagrama a bloques del modelo propuesto para la cancelación de interferencias en señales de radar. Los bloques en rojo indican las contribuciones aportadas por este trabajo.

De la figura 4.1 podemos observar que el modelo tiene como entrada la señal de radar que es recibida mediante un arreglo de antenas de tipo dipolo. Al patrón de radiación del arreglo de antenas se le aplican una serie de ventaneos utilizando diferentes filtros FIR. El objetivo del ventaneo es la reducción de lóbulos secundarios, sin embargo, esta técnica se aplica a arreglos de antenas fijos, por lo que es necesario contar con un sistema adaptativo utilizado para sistemas de radar. En esta

propuesta, el sistema adaptativo está conformado por dos algoritmos opcionales: el LMS y el perceptrón multicapa. Una de las contribuciones de este trabajo, es utilizar los coeficientes resultantes del filtrado como pesos iniciales para el algoritmo LMS, lo que permite la reducción los lóbulos secundarios laterales a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45.5^\circ$ con respecto al eje vertical. La otra contribución importante de esta propuesta, es la utilización del perceptrón multicapa para llegar al mismo objetivo, utilizando los mismos coeficientes como pesos iniciales de la red. Se propone usar el perceptrón multicapa debido a que presenta un comportamiento similar al de algoritmo LMS.

Por tanto, este capítulo definirá en la primera parte la teoría establecida para los filtros FIR y la reducción de lóbulos secundarios. A continuación se describen los algoritmos correspondientes al perceptrón multicapa, al LMS y las memorias asociativas Alfa-Beta, cuyos antecedentes fueron descritos en el capítulo anterior. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del modelo propuesto en este trabajo para la eliminación de interferencias en señales de radar.

4.1 FILTROS FIR Y VENTANAS

Un filtro es un sistema, que dependiendo de algunos parámetros, realiza un proceso de discriminación de una señal de entrada obteniendo variaciones en su salida. Los filtros digitales tienen como entrada una señal digital y a su salida tienen otra señal digital, pudiendo haber cambiado en amplitud, frecuencia o fase dependiendo de las características del filtro.

Los filtros digitales de respuesta finita impulsiva o filtros FIR por sus siglas en inglés *Finite Impulse Response*, se trata de un tipo de filtros digitales en el que, como su nombre indica, si la entrada es una señal impulso la salida tendrá un número finito de términos no nulos. La estructura de señal a la salida del filtro se basa solamente en la combinación lineal de las entradas actuales y anteriores.

Para la obtención de los coeficientes que describen al filtro FIR, se comenzará por explicar la respuesta al impulso de los cuatro tipos de filtros que son filtros pasa-bajas, pasa-altas, banda de paso y banda de rechazo tal como se muestra en la figura 4.1.

En la figura 4.2a se tiene la respuesta en frecuencia de un filtro ideal pasa-bajas que tiene una respuesta en fase cero, es decir, su respuesta en fase es lineal.

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

Con su correspondiente respuesta al impulso determinada por:

$$h_{LP}[n] = \frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

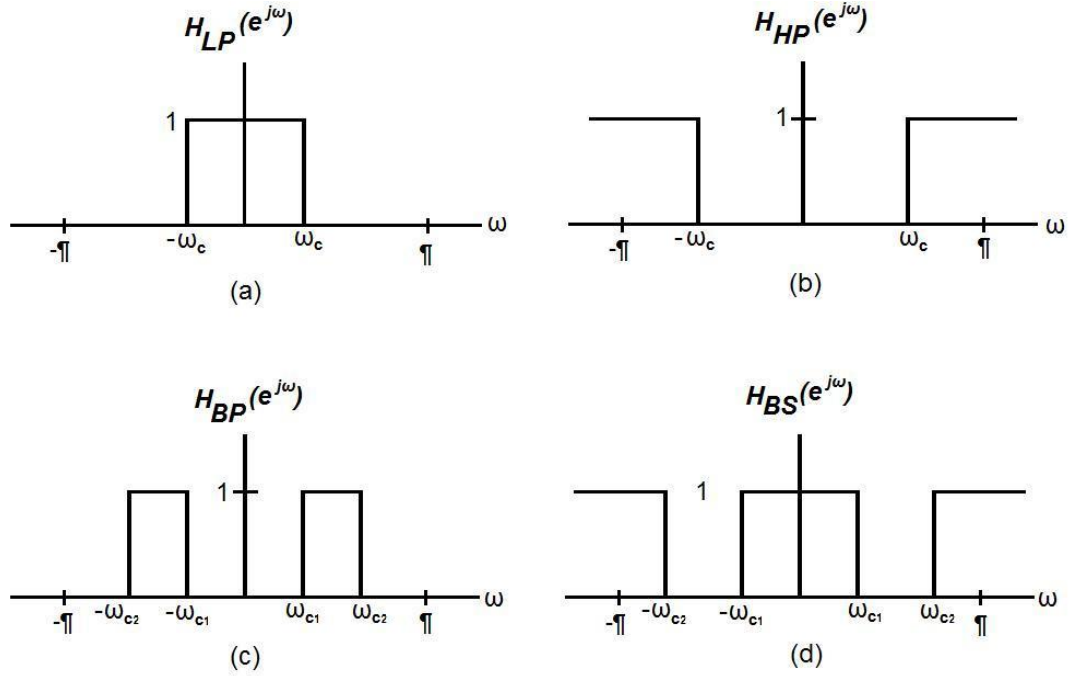


Figura 4.2. Respuesta en frecuencia de filtros ideales.

Se puede observar que la ecuación de la respuesta al impulso del filtro pasa-bajas ideal es doblemente infinita, por lo tanto no es realizable. Por lo que se pueden tomar sólo algunos valores de los coeficientes de la respuesta al impulso en el intervalo de $-M \leq n \leq M$ y fuera del intervalo son igual a cero, así se llega a una longitud finita de $N = 2M + 1$, a esto se le llama filtro truncado, así se tiene:

$$h_{PB}[n] = \begin{cases} \frac{\text{sen} \omega_c (n - M)}{\pi (n - M)}, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (4.1)$$

De la misma forma tenemos la respuesta al impulso para los demás filtros:

$$h_{PA}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{para } n = 0 \\ -\frac{\text{sen} \omega_c n}{\pi n}, & \text{para } |n| > 0 \end{cases} \quad \text{pasa-altas}$$

donde ω_c es la frecuencia de corte de los filtros.

$$h_{PB}[n] = \frac{\text{sen} \omega_{c2} n}{\pi n} - \frac{\text{sen} \omega_{c1} n}{\pi n}, \quad |n| > 0 \quad \text{pasa banda}$$

$$h_{RB}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\pi}, & \text{para } n = 0 \\ \frac{\text{sen } \omega_{c1}n}{\pi n} - \frac{\text{sen } \omega_{c2}n}{\pi n}, & \text{para } |n| > 0 \end{cases} \quad \text{rechaza banda}$$

donde ω_{c1} y ω_{c2} son las frecuencias de corte de los filtros. Existen un gran número de funciones de ventana que pueden proporcionar los pesos para el uso en arreglos lineales. En este trabajo se usarán solo las ventanas de Hamming, Hann, Triangular y Tukey. Se presentan a continuación las expresiones de las ventanas usadas

$$Kaiser = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{n-N}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, 0 \leq n \leq N, \quad I_0 = \text{función Bessel}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha - 8.7) & \alpha > 50 \\ 0.5842(\alpha - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha - 21) & 50 \geq \alpha \geq 21 \\ 0 & \alpha < 21 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$Hamming(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right), 0 \leq n \leq N \quad (4.3)$$

$$Hann(n) = 0.5 \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right)\right), 0 \leq n \leq N \quad (4.4)$$

$$Triangular(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N+1}, & 1 \leq n \leq \frac{N+1}{2} \\ \frac{2(N-n+1)}{N+1}, & \frac{N+1}{2} < n \leq N \end{cases} \quad (4.5)$$

$$Tukey(n) = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq |n| \leq \alpha \frac{N}{2} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{n - \alpha \frac{N}{2}}{2(1 - \alpha) \frac{N}{2}}\right)\right), & \alpha \frac{N}{2} \leq |n| \leq \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

Se puede observar que a diferencia de los filtros anteriores, en las ventanas no se tiene ninguna frecuencia de corte. Para el caso particular en este trabajo se usará el arreglo mostrado en la figura 3.2, con 7 elementos separados por una distancia $d = \lambda_0/2$ entre elementos. En dicho arreglo, se puede apreciar el patrón de radiación formado por un lóbulo principal en 0° y lóbulos secundarios laterales a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45.5^\circ$ con respecto al eje vertical. Los lóbulos secundarios o laterales por lo general son lóbulos no deseados, ya que radian energía electromagnética en una o más direcciones, así que es necesario reducir o eliminar dichos lóbulos. Para el caso del factor de arreglo de 7 elementos de la ecuación (3.1), se puede tomar el vector de pesos como:

$$w_u^T[n] = [w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_{14}] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \quad (4.7)$$

Los valores de los pesos del vector (w) se pueden tomar como los coeficientes de la respuesta al impulso de un filtro de ventana rectangular de 14 muestras. Al aplicar la transformada de Fourier para obtener la respuesta en magnitud del filtro:

$$|W(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=1}^{14} w_u[n] e^{-j\omega n} \right| \quad (4.8)$$

En la figura 4.3 se grafica la respuesta en magnitud del filtro donde se observar que se tiene un lóbulo principal y varios lóbulos secundarios dentro del intervalo de 0 a $\pi/2$. Se tiene un comportamiento de un filtro pasa-bajas con frecuencia de corte igual $\omega_c=0.0640\pi$.

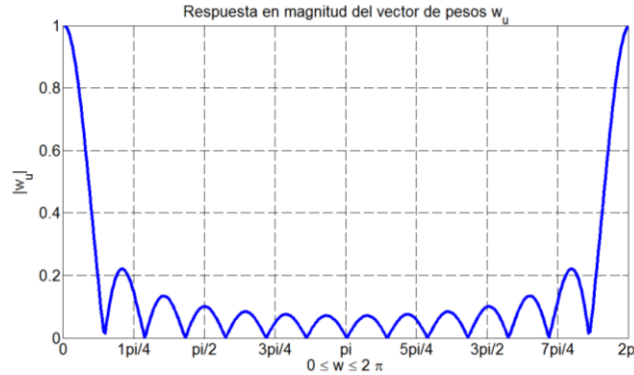


Figura 4.3. Respuesta en magnitud normalizada $|W(e^{j\omega})|$

El valor de ω_c se utilizará para el cálculo de los coeficientes del filtro pasa-bajas de la ecuación (4.2) con los que se inicializará el vector de pesos del algoritmo LMS.

4.2 REDUCCIÓN DE LÓBULOS SECUNDARIOS

De las ecuaciones (4.3), (4.4), (4.2) y (4.3) se obtienen los coeficientes de la respuesta al impulso para cada función de ventana; para obtenerlos, como se mencionó, no se requiere conocer la frecuencia de corte ω_c . Cada ventana reduce los lóbulos secundarios del factor de arreglo, pero hacen un poco más ancho el lóbulo principal. Además, dependiendo del número de coeficientes (que es igual al número de elementos de antena) el ancho del lóbulo principal en el espectro de magnitud cambia.

Tomando como referencia la respuesta al impulso de la ventana rectangular de la ecuación (4.7) y conociendo que se comporta como un filtro pasa bajas se propone calcular los coeficientes del filtro pasa bajas de la ecuación (4.1) haciendo una modificación:

$$h_{pb}[n] = \begin{cases} 2 * \frac{\sin \omega_c(n-M)}{\pi(n-M)} & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{Para otro caso} \end{cases} \quad (4.9)$$

De la ecuación anterior se puede notar que los coeficientes se han multiplicado por 2, lo que proporciona un mejor resultado en la inicialización del vector de pesos.

De acuerdo a lo anterior, para sistemas con arreglos de antena adaptativas se propone inicializar el vector de pesos utilizando los filtros mencionados, con el propósito de reducir el número de iteraciones que consume el proceso de adaptación. A continuación se describen los dos algoritmos propuestos para el proceso adaptativo.

4.3 RED NEURONAL PERCEPTRON MULTICAPA MODIFICADA

En esta sección se describe en detalle el algoritmo perceptrón multicapa utilizado en este trabajo como una de las alternativas del proceso adaptativo para la reducción de lóbulos secundarios.

Algoritmo

El algoritmo de entrenamiento de la red neuronal involucra tres etapas las cuales son: La alimentación del patrón de entrenamiento a la red, la retropropagación del error y la actualización de los pesos.

Durante la alimentación del patrón de entrenamiento, cada unidad de entrada (X_i) recibe una señal de entrada y direcciona esta señal a cada una de las unidades de la capa oculta $Z_1; \dots; Z_p$. A su vez cada unidad oculta es activada por una función de activación y envía esta señal z_j a cada unidad de salida. Cada unidad de salida Y_k es transformada por una función de activación generando así la respuesta de la red y_k al patrón de entrada dado.

Durante la etapa del entrenamiento, para cada neurona de salida se compara la salida obtenida de la red con el valor de la salida deseada t_k determinando así el error asociado del patrón de entrenamiento con la neurona de salida considerada. Basado en ese error, el factor δ_k , para $k = 1, \dots, m$, es calculado, este factor es empleado para distribuir el error de las neuronas de salida Y_k a todas las neuronas de la capa oculta que están conectadas a las neuronas de salida. De manera similar el factor δ_j , para $j = 1, \dots, p$, se calcula para cada neurona de la capa oculta Z_j .

Después de que todos los factores δ se han calculado, se procede a ajustar simultáneamente los pesos para todas las capas. El ajuste de los pesos w_{jk} correspondientes a las neuronas de la capa oculta Z_j hacia las neuronas de salida Y_k se basan en el factor δ_k y en la activación z_j de las neuronas ocultas Z_j . Para el ajuste de los pesos w_{ij} correspondientes a las neuronas de la capa de entrada X_i hacia las neuronas de la capa oculta Z_j se basan en el factor δ_j y en la activación x_i de las neuronas de entrada X_i .

Nomenclatura de la red neuronal

La notación empleada para el algoritmo de entrenamiento de la red perceptrón multicapa se muestra a continuación:

- n equivale al número de componentes del vector de entrada.
- p es el número de neuronas en la capa oculta.
- m es el número de neuronas en la capa de salida.
- x_n corresponde a la entrada de la red.
- t_n es la salida deseada para el patrón n -ésimo.
- δ_k corresponde al error en la neurona k de la capa de salida con m neuronas.
- δ_j corresponde al error en la neurona j de la capa oculta con p neuronas.
- α es la tasa de aprendizaje.

- W_{ji}^o equivale al peso que une la componente i de la capa de entrada con la neurona j de la capa oculta.
- x_i es el elemento i del vector x que contiene el patrón de entrenamiento de n elementos.
- b_j^o es el bias de la neurona j de la capa oculta.
- f^o corresponde a la función de activación de las neuronas de la capa oculta.
- W_{kj}^s es el peso que conecta la neurona j de la capa oculta con la neurona k de la capa de salida.
- z_j^o es la salida de la neurona j de la capa oculta.
- b_k^s es el bias de la neurona k de la capa de salida.
- yn_k^s es la entrada neta a la neurona k de la capa de salida.
- f^s es la función de activación de las neuronas de la capa de salida.
- Δep^2 es el gradiente negativo del error cuadrático medio.

Regla de aprendizaje

La red neuronal con el algoritmo perceptrón multicapa trabaja mediante un aprendizaje supervisado, por lo tanto, necesita un conjunto de patrones de entrenamiento que le permita describir cada salida y su valor de salida deseado de la siguiente forma:

$$x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n \quad (4.10)$$

El algoritmo debe ajustar los parámetros de la red para minimizar el error cuadrático medio. El cual se logra mediante un proceso de aprendizaje, para poder llevar a cabo este proceso se debe de tener definida la topología de la red, lo que significa que se debe de tomar en cuenta el número de neuronas en la capa de entrada el cual depende del número de elementos del vector de entrada, la cantidad de capas ocultas y número de neuronas de cada una de ellas, número de neuronas en la capa de salida el cual depende del número de componentes del vector de salida y patrones objetivos, con base en la topología escogida se asignan valores iniciales a cada uno de estos parámetros que integran a la red neuronal.

Es importante hacer énfasis en el hecho de que no existe una técnica para determinar el número de capas ocultas, ni el número de neuronas que debe contener cada una de ellas, esto se puede determinar por medio de la experimentación al diseñar la red neuronal. A continuación se muestra el procedimiento matemático de la regla de aprendizaje, para lograrlo se propone sólo emplear una red con una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida.

En la figura (3.12) se presentó una red neuronal multicapa con estas características. Para poder iniciar con el entrenamiento se le presenta a la red un patrón de entrenamiento, el cual tiene n componentes, como se observa en la ecuación (4.11),

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n] \quad (4.11)$$

Como se mencionó, al presentarle un patrón de entrenamiento a la red, éste se propaga a través de todas las conexiones existentes en el diseño de la red, generando una entrada a la cual comúnmente

se le llama entrada neta z_{nj} [26, 27], en cada una de las neuronas de las siguientes capas, la entrada neta a la neurona j de la siguiente capa debido a la presencia de un patrón de entrenamiento en la entrada está dado por la ecuación (4.12), se puede observar que la entrada neta es el valor antes de pasar por la función de transferencia, de ahí es donde se deriva su nombre.

$$zn_j^0 = W_{ji}^0 x_i + b_j^0 \quad (4.12)$$

El superíndice $(^0)$ indica la capa a la cual pertenece cada parámetro, en este caso corresponde a la capa oculta. La salida de cada una de las neuronas de la capa oculta Z_j se representa como z_j^0 , que está dada por la ecuación (4.13).

$$z_j^0 = f^0(W_{ji}^0 x_i + b_j^0) \quad (4.13)$$

Las salidas z_j^0 de las neuronas de la capa oculta son direccionadas a la próxima capa, convirtiéndose así en las entradas a los pesos de conexiones de la capa de salida, como se observa en la ecuación (4.14),

$$yn_k^s = \sum_{j=1}^p (W_{kj}^s z_j^0 + b_k^s) \quad (4.14)$$

La red al aplicarle una función de activación, produce una salida final dada por la ecuación (4.15)

$$y_k^s = f^s(yn_k^s) \quad (4.15)$$

Reemplazando (4.14) en (4.15) se obtiene la salida de la red en función de la entrada neta y de los pesos de conexión con la última capa oculta, como se ve en la ecuación (4.16).

$$y_k^s = f^s \left(\sum_{j=1}^p (W_{kj}^s z_j^0 + b_k^s) \right) \quad (4.16)$$

La salida de la red de cada neurona y_k^s se compara con la salida deseada t_k con la finalidad de calcular el error en cada unidad de salida, ver ecuación (4.17).

$$\delta_k^s = (t_k - y_k^s) \quad (4.17)$$

El error producido por cada patrón x propagado se define en (4.18).

$$ep^2 = 1/2 \sum_{k=1}^s (\delta_k)^2 \quad (4.18)$$

Este proceso se repite para el total de patrones de entrenamiento n , para poder obtener un proceso de aprendizaje exitoso. El objetivo del algoritmo es actualizar todos los pesos minimizando el error cuadrático medio descrito en (4.19).

$$e^2 = \sum_{x=1}^n ep^2 \quad (4.19)$$

Posteriormente se aplica el gradiente al error con la finalidad de obtener la dirección en la cual la función del error presentará un mayor aumento, como el objetivo del proceso de aprendizaje es minimizar el error se toma la dirección negativa del gradiente para obtener el mayor decremento del

error y poder obtener su minimización, lo cual es necesario para poder obtener y realizar la actualización de la matriz de pesos en el algoritmo perceptrón multicapa. Después de realizar esta tarea, se procede a actualizar los pesos de todas las capas empezando por la de salida, para la cual la actualización de los pesos está dada por:

$$W_{kj}(t + 1) = W_{kj}(t) - \alpha \delta_k^s \quad (4.20)$$

donde δ_k^s es el término de error para las neuronas de la capa de salida y está dado por:

$$\delta_k^s = (t_k - y_k^s) * f'^s(y_k^s) \quad (4.21)$$

Después de actualizar los pesos de la capa de salida, se continúa con la actualización de los pesos de la capa oculta con la siguiente relación:

$$W_{ji}(t + 1) = W_{ji}(t) - \alpha \delta_j^o x_i \quad (4.22)$$

donde δ_j^o es el término de error para cada neurona de la capa oculta y se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\delta_j^o = f'^o(zn_j) * \sum_{k=1}^m \delta_k^s W_{kj}^s \quad (4.23)$$

A continuación se describen las variables más importantes que actúan en el algoritmo de aprendizaje. La variación de dichas variables puede alterar de manera considerable los resultados del entrenamiento, y por lo tanto el funcionamiento de la red neuronal. Sin embargo, cabe resaltar que para ninguno de los puntos que serán citados existe una regla definida para la elección del parámetro ideal, lo adecuado es ajustarse al problema a resolver mediante la red neuronal.

Número de capas ocultas

Un aumento del número de capas ocultas se traduce en un cambio en la estructura de la red, pudiéndose obtener resultados diferentes, ya sea tanto buenos o malos de acuerdo al problema en el cual se esté aplicando la red neuronal. De acuerdo a varios investigadores se ha llegado a la conclusión de que con una capa oculta es suficiente, como se puede observar en [20, 26, 27].

Número de neuronas de la capa oculta

Generalmente un aumento en el número de neuronas ocultas aumenta la eficacia del aprendizaje. Sin embargo, hay que tener en cuenta que existe un margen óptimo en el número de neuronas ocultas, es decir, que fuera de ese intervalo los resultados pueden empeorar. Con un error elevado en la salida, un aumento del número de neuronas ocultas puede hacer que disminuya dicho error. De todas formas la tendencia es tener el menor número posible de ellas ya que esto permite que el proceso de aprendizaje se vuelva más rápido.

Número de iteraciones

Con un número elevado de ellas, se genera un entrenamiento lento y mayor probabilidad de caer en un sobre aprendizaje. Mediante el control de los otros parámetros se puede conseguir que la red se entrene con un número más reducido de iteraciones. Recordando que el objetivo del entrenamiento de una red neuronal es adaptar los pesos de las neuronas para así minimizar el error entre un conjunto de patrones dados como ejemplo y sus salidas deseadas.

Patrones de entrada

Un aumento del número de patrones de entrada y salida hace que la red tenga una mejor estabilidad en el proceso de aprendizaje, y por lo tanto cuando se le presenten a la red datos desconocidos (diferentes de los utilizados en el entrenamiento) el error en el cálculo de las salidas sea más pequeño.

Sin embargo, cuanto mayor es el número de datos de los patrones de entrada más largo es el proceso de aprendizaje de la red neuronal. Por lo tanto, es muy conveniente hacer un procesamiento previo de los datos para evitar problemas de estabilidad a la red [41]. Cuanto más definidos estén los datos más rápido aprenderá la red.

Una manera de lograr esto es por medio de la normalización de los datos ya sea en el intervalo $[-1; 1]$ ó dentro del intervalo $[0; 1]$, de acuerdo a la función de activación empleada en la red neuronal. Este proceso se lleva a cabo por medio de la ecuación (4.24). Inicialmente se propone que la media μ sea cero y la desviación estándar σ la unidad, para el patrón de entrada lo cual se logra de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$x_{nor} = \frac{x^{(i)} - \mu}{\sigma} \quad (4.24)$$

Los datos normalizados caen dentro del intervalo $[-k1; k2]$, donde $k1$ y $k2$ son números reales positivos. Para que los datos normalizados se encuentren dentro del intervalo $[-1; 1]$, se dividen por el mayor valor absoluto de $k1$ o $k2$. Para que los datos normalizados pertenezcan al intervalo $[0; 1]$ se hace lo siguiente:

- A los datos normalizados se les suma el mayor entre $k1$ y $k2$. Ahora estos datos caen dentro del intervalo $[0; k3]$, siendo $k3 = k1 + k2$.
- Finalmente los datos normalizados se dividen por $k3$, obteniéndose así el intervalo de $[0; 1]$.

Es importante normalizar previamente los datos de entrada para evitar saturaciones en las neuronas de la capa oculta, otra ventaja de esta normalización es que permite que la búsqueda del gradiente durante la etapa de aprendizaje se realice de manera más efectiva ya que las pendientes de la función del gradiente son mayores en comparación de las pendientes si los datos no estuvieran normalizados.

Tasa de aprendizaje

La tasa de aprendizaje es la encargada de acelerar el proceso de aprendizaje. Normalmente debe ser un número pequeño que esté dentro del rango (de 0:05 a 0:25) [20, 27] para asegurar la convergencia y evitar oscilaciones. Lo ideal es que la tasa de aprendizaje hasta antes de alcanzar el mínimo, el entrenamiento sea rápido mientras que en el entorno del mínimo sea lento para poder alcanzarlo plenamente. Por esta razón se emplea una tasa de aprendizaje variable, adaptativa a lo largo del proceso de entrenamiento.

Como se ha mencionado el algoritmo perceptrón multicapa fue creado mediante la generalización de la regla de aprendizaje propuesta por Widrow-Hoff [19] para redes multicapas y emplea las mismas técnicas de aproximación en pasos descendientes que emplea el algoritmo LMS. Por tales motivos no es extraño que la propuesta de inicialización de pesos propuesta en este trabajo pueda también disminuir el número de iteraciones en la red neuronal para modificar el patrón de radiación.

En la figura 4.4 se muestra la arquitectura de la red neuronal perceptrón multicapa con un elemento de antena. En la figura 4.5 se muestra la arquitectura de red neuronal con un arreglo de 7 elementos, utilizada el proceso adaptativo. Para poder comparar los resultados de esta propuesta con el algoritmo LMS, sólo se ocuparán 14 neuronas en la capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida.

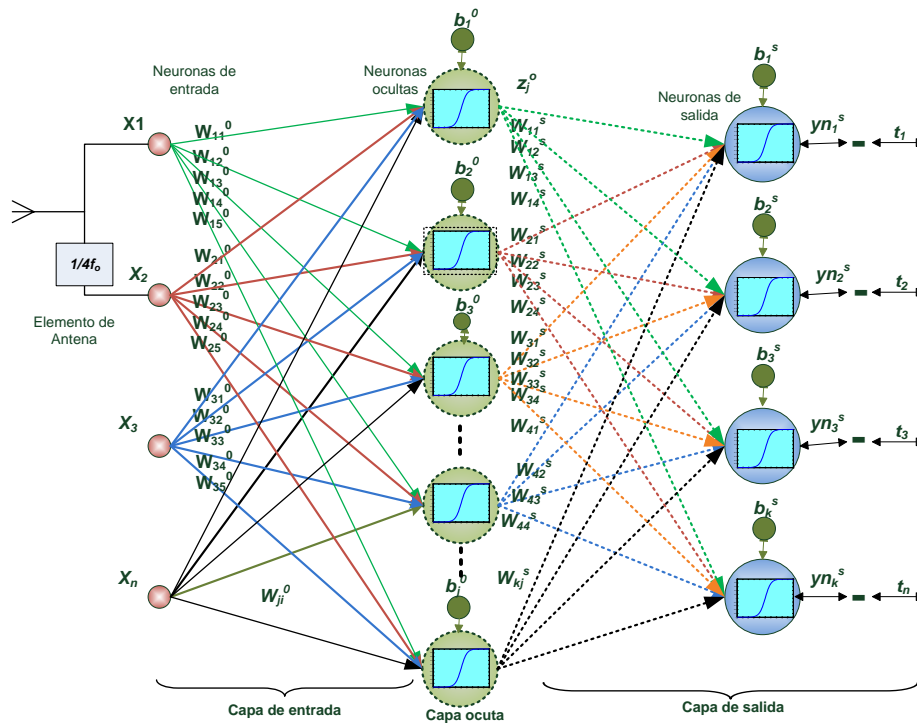


Figura 4.4 Arquitectura de la red neuronal propuesta.

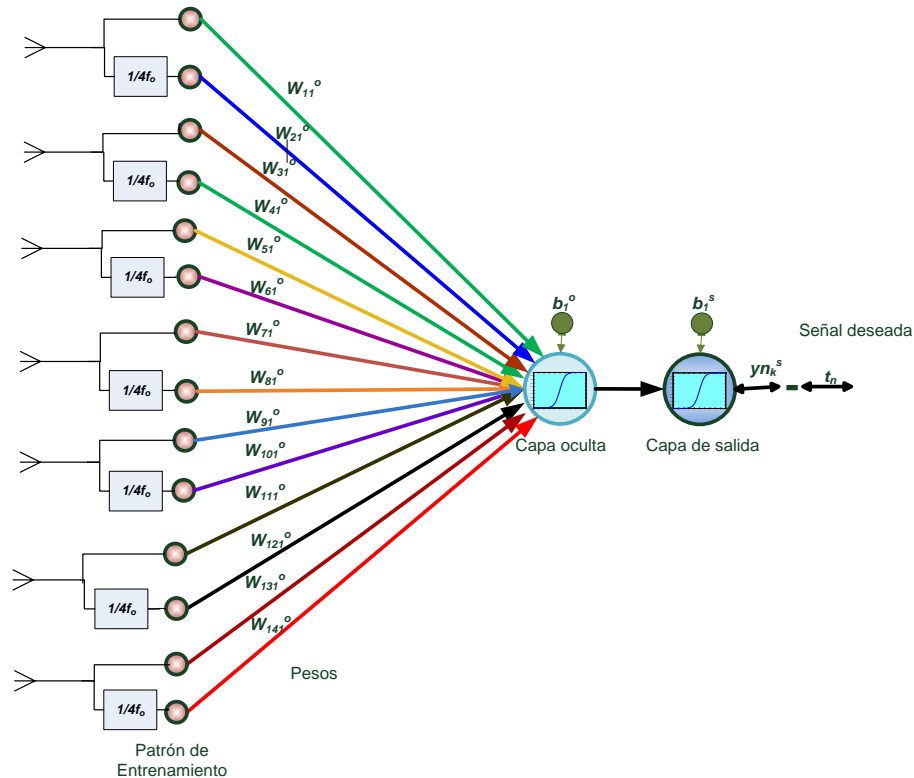


Figura 4.5 Arquitectura de la red neuronal con 14 neuronas de entrada, 1 capa oculta y una capa de salida.

Ahora se procede a describir el algoritmo LMS.

4.4 ALGORITMO LMS MODIFICADO

En este trabajo se propone una alternativa para inicializar los pesos en el arreglo de antenas que utiliza el filtro espacial LMS para reducir el número de iteraciones que el filtro LMS requiere para llegar a la solución de Wiener. Es importante reducir el número de iteraciones ya que el patrón de radiación se puede adaptar en el menor tiempo posible. Esto permitirá tener aplicaciones casi en tiempo real. Por tanto, en esta sección se describe el algoritmo general del LMS y después se muestra la modificación aplicada a este algoritmo para lograr la reducción de iteraciones en el proceso de adaptación.

Algoritmo

A continuación se describen las consideraciones generales, tomadas en cuenta, para la implementación del algoritmo LMS, con la finalidad de eliminar interferencia, provocada por una fuente de ruido conocida.

Partiendo de la expresión generalizada del algoritmo LMS para efectuar su implementación, recordando de (3.37):

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - 2\mu\epsilon(j)\mathbf{X}(j)$$

Se puede observar que $\mathbf{W}(j)$ es el vector de pesos inicial, los pesos pueden considerarse con valores aleatorios o bien por valores muy específicos. En este caso se considera un vector con valores iniciales iguales a cero, se dice iniciales debido a que cambia conforme se repita el ciclo de adaptación del algoritmo.

A continuación se tiene el vector de pesos después de la adaptación, $\mathbf{W}(j+1)$, el cual será calculado de acuerdo a la expresión mostrada. Sin embargo, este va adquiriendo valores muy específicos conforme cambia el vector de pesos inicial y el vector de gradiente estimado de ε^2 con respecto a \mathbf{W} , hasta que se tenga un valor óptimo de error.

Uno de los elementos importantes de la implementación es el factor de convergencia y estabilidad μ , el cual se obtiene a partir del eigenvalor máximo como se indicó en (3.41), y depende de la traza de la matriz simétrica de auto correlaciones $\Phi_{xx}(j)$ definida en (3.20).

Para la implementación, el valor de μ de acuerdo (3.42) es considerada como [42,43,44,45]:

$$\mu = \frac{1}{15e_{\max}}$$

que cumple con la condición de convergencia.

Ahora se considera el vector de gradiente estimado de ε^2 con respecto a \mathbf{W} :

$$\tilde{\mathbf{V}}(j) = -2\varepsilon(j)\mathbf{X}(j)$$

En donde $\varepsilon(j)$ es el error calculado con base en la ecuación (3.14). En dicha expresión $d(j)$ representa la respuesta deseada a la salida del sistema o la señal piloto en el algoritmo de adaptación, y se propone que sea una señal sinusoidal:

$$d(j) = \text{sen}(w_s n)$$

En donde $w_s = (2\pi f_0)/(8f_0)$ es la frecuencia de muestreo de la señal deseada y n es la n -ésima muestra de dicha señal. Mientras que $s(j)$ es la señal de salida del sistema dada por:

$$s(j) = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(j) = \mathbf{X}(j)^T \mathbf{W}$$

Por lo que \mathbf{W} es el vector de pesos inicial, mientras que $\mathbf{X}(j)$ es el vector de entrada en tiempo discreto.

El vector de entrada debe involucrar tanto a la señal recibida, en este caso propuesta también como una señal sinusoidal, y una señal de ruido. Esto se puede ilustrar mediante un ejemplo simple en el que muestra la existencia y cálculo de un ajuste de pesos, mismos que se obtendrán para eliminar interferencia en una dirección específica y diferente a la dirección de la señal deseada. En la figura 4.6 se puede observar que la señal incide en la dirección $\theta=0^\circ$ llamada "señal piloto" $p(t)=P\sin\omega t$,

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$, y al mismo tiempo se tiene otra señal de ruido $n(t) = N \sin \omega_0 t$, incidente para la recepción del arreglo en un ángulo $\theta = \pi/6$ radianes.

Para este ejemplo se tiene que la señal piloto y la señal de ruido tienen exactamente la misma frecuencia f_0 . En el punto intermedio entre los elementos del arreglo, se supone que la señal y el ruido están en fase. En el ejemplo mostrado, hay 2 arreglos idénticos omnidireccionales, espaciados $\lambda_0/2$. Las señales recibidas por cada elemento pasan por dos pesos variables, por un lado la señal pasa por un retardo de $1/(4f_0)$ que produce un cambio en fase de $\pi/2$ en la señal recibida y luego pasa el peso w_2 , por otro lado la señal solo pasa por el peso w_1 . Las 4 señales obtenidas se suman para formar la salida del arreglo.

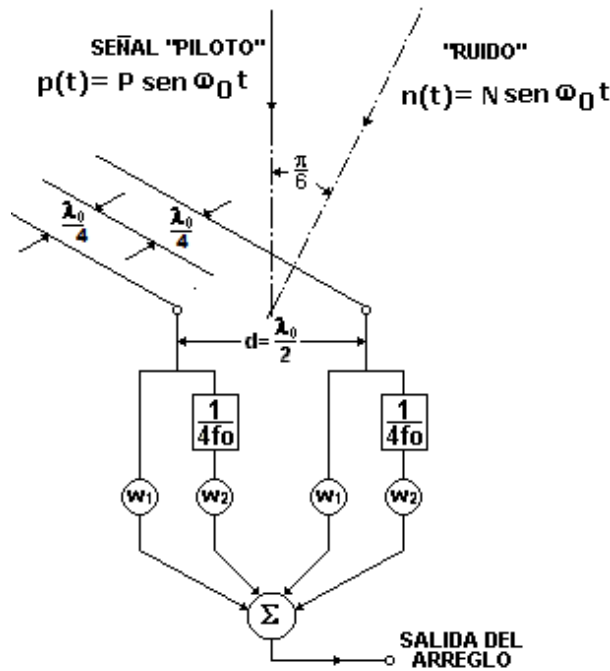


Figura 4.6 Ejemplo de configuración de un arreglo para la eliminación de ruido.

Ahora se mostrará cómo es posible obtener un ajuste de pesos para aceptar $p(t)$ y rechazar $n(t)$. Se puede ver que con cualquier ajuste de pesos diferente de cero la salida del arreglo es de la forma $A \sin(\omega_0 t + \phi)$, y existe un número de soluciones tales que harán que salida sea igual a $p(t)$. Sin embargo, la salida del arreglo debe ser independiente de la amplitud y la fase de la señal de ruido si se considera al arreglo para rechazo del ruido.

Para satisfacer esta restricción se encuentra un único ajuste de pesos determinados. Por lo tanto, tomando en cuenta las consideraciones anteriores la salida del arreglo debido a la señal piloto es:

$$w_1 P \sin(\omega_0 t) + w_2 P \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + w_3 P \sin(\omega_0 t) + w_4 P \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Factorizando se tiene que:

$$P \left[(w_1 + w_3) \text{sen}(\omega_o t) + (w_2 + w_4) \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Para que la salida del arreglo sea igual a $p(t) = P \text{sen} \omega_o t$, se debe cumplir que:

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_3 &= 1 \\ w_2 + w_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Se puede obtener un sistema de ecuaciones que permita llegar a ese resultado (mediante al cálculo de los pesos correspondientes), sin embargo, conforme aumenta el número de elementos del arreglo este método se vuelve más complicado y no es el objetivo de este trabajo. Para evitar el cálculo de los pesos a partir de un sistema de ecuaciones, se utiliza el algoritmo LMS.

Con respecto al punto medio entre los elementos de la antena, la relación de los retardos de tiempo de la señal de ruido en los 2 elementos del arreglo de antenas son $\pm [1/(4fo)] \text{sen} \pi/6 = \pm 1/(8fo) = \pm \lambda_o/(8c)$, los cuales corresponden a los cambios de fase de $\pm \pi/4$ a la frecuencia fo . El arreglo de salida debido al ruido incidente en $\theta = \pi/6$ es:

$$w_1 N \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{4} \right) + w_2 N \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + w_3 N \text{sen} \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right) + w_4 N \text{sen} \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right)$$

Reduciendo la expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} & N \left[w_1 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{4} \right) + w_2 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{3\pi}{4} \right) + w_3 \text{sen} \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right) + w_4 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ & N \left[w_1 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{4} \right) + w_2 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{3\pi}{4} \right) - w_3 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{3\pi}{4} \right) + w_4 \text{sen} \left(\omega_o t - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

De manera similar a la anterior, pero ahora para que esta respuesta sea igual a cero, puesto que es la señal de ruido que se desea eliminar, es necesario cumplir las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_4 &= 0 \\ w_2 - w_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De este modo el ajuste de los valores de los pesos que satisface los requerimientos para dejar pasar únicamente la señal piloto y eliminar la señal de ruido son:

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}, w_3 = \frac{1}{2}, w_4 = -\frac{1}{2}$$

Con estos pesos, el arreglo tendrá las propiedades de aceptar una señal en la dirección deseada, mientras rechaza una señal de ruido incluso con la misma frecuencia fo en otra dirección.

Como se ha mencionado, el método anterior de cálculo de pesos es más ilustrativo que práctico. Este método es utilizable cuando sólo hay un pequeño número de fuentes direccionales de ruido, cuando los ruidos son monocromáticos, y cuando las direcciones de los ruidos son conocidas previamente. La intención es sólo observar la forma en cómo se obtienen las ecuaciones que involucran al ruido con la señal de entrada, lo cual sirve dentro de la implementación del algoritmo LMS puesto que esta serie de ecuaciones serán consideradas como el vector de entrada $\mathbf{X}(j)$, solo que se obtendrán las ecuaciones para un número mayor de elementos. Aunque a partir de este ejemplo ya se puede observar la forma de obtener las ecuaciones para n elementos.

Ahora bien dentro de la implementación se consideran las dos fases del algoritmo, o modos de funcionamiento, llamados modo I y modo-II, ya mencionados, al inyectar la señal piloto, podría bloquear la recepción y quedar inservible su salida. El algoritmo en modo I es la fase que permite la generación del haz y adecua al arreglo adaptativo para su segunda fase. El llamado modo II procesa y adapta alternativamente a la señal piloto para formar el haz y entonces adapta a las entradas naturales con la señal piloto apagada para eliminar el ruido. El arreglo de salida es útil durante el segundo modo, mientras la señal piloto está apagada.

Modificación propuesta

Comprende dos procesos principales, un proceso de filtrado que implica el cálculo de la salida generada por un coeficiente y la generación de una estimación del error comparando esta salida con la respuesta deseada. Un proceso adaptativo, realiza el ajuste automático de los coeficientes del filtro de acuerdo con la estimación del error. Entonces el algoritmo LMS se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Inicialización del vector de pesos $w_F(n)$
2. Calcular la salida del filtro $s(n)=w^T(n)x(n)$
3. Calcular la estimación del error $\varepsilon(n)=d(n)-s(n)$
4. Calcular el siguiente filtro de vector de pesos del filtro $w(n+1)=w(n)-2\mu\varepsilon(n)$
5. Repetir el proceso desde el paso 2 hasta que los pesos converjan.

Como se ha mencionado, $s(n)$ es la salida del sistema, $d(n)$ es la señal deseada del sistema, $x(n)$ es la entrada del sistema, $\varepsilon(n)$ es el error, μ es el factor de convergencia. En la figura 4.7 se puede observar que las líneas en amarillo y los pesos $w_F(n)$ representan los valores iniciales de los pesos para comenzar el proceso de adaptación del algoritmo LMS. Esta modificación representa la aportación de este trabajo al algoritmo LMS. Cabe mencionar que la propuesta para la inicialización de los pesos tomando los valores de las cualquiera de las ventanas mencionadas arroja mejores resultados que la propuesta inicial de Widrow donde $w_n(n)$ son iguales a cero [1] (W_{Widrow}).

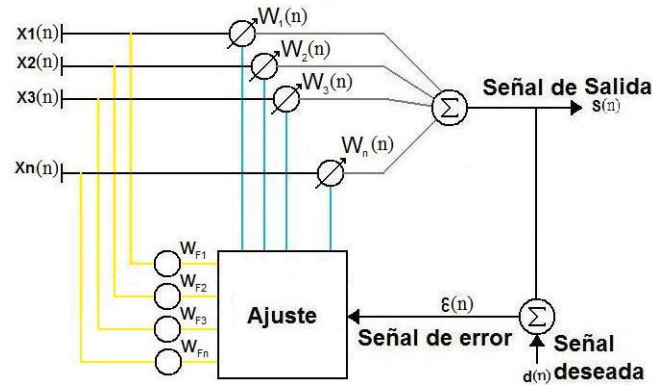


Figura 4.7 Algoritmo LMS modificado.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del proceso completo.

4.5 APLICACIÓN DE LAS MEMORIAS ASOCIATIVAS α - β PARA LA ELIMINACIÓN DE LÓBULOS SECUNDARIOS

Recordemos que son los lóbulos secundarios localizados a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45.5^\circ$ los que deseamos que sean eliminados, principalmente. Para aplicar las memorias asociativas α - β a la solución de este problema, es necesario conocer de antemano los pesos $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{14}\}$ que van a modificar la ecuación del factor de arreglo para permitir la inserción de los nulos en las direcciones antes mencionadas.

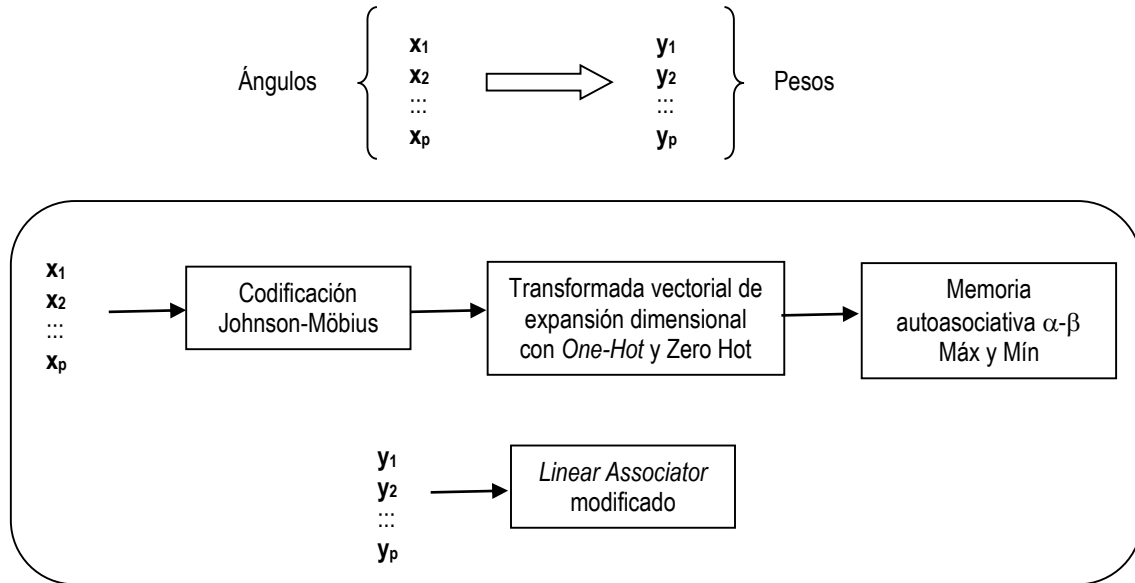
Los valores de los pesos que se utilizaron se obtuvieron al aplicar los dos algoritmos anteriores, y eligiendo los valores óptimos.

La memoria asociativa que se construyó fue una memoria asociativa bidireccional Alfa-Beta. Los patrones de entrada \mathbf{x} corresponden a los valores de los ángulos en donde se desea insertar un nulo, los patrones \mathbf{y} contienen los pesos que permiten eliminar el lóbulo secundario localizado en esa dirección. Estos valores se muestran en el Apéndice A. Se puede observar que la diferencia entre cada valor no es fija y pueden presentarse, a la entrada, otros valores que no corresponden a los propuestos. Con base en esto, los valores de los ángulos son previamente codificados utilizando el código Johnson-Möbius.

En la fase de recuperación, se le presenta a la memoria el valor del ángulo entrante, la memoria debe dar como resultado el índice del vector \mathbf{y} correspondiente a ese ángulo y, por consiguiente, los valores de los pesos w que eliminan el lóbulo secundario localizado en esa dirección.

El diseño de la memoria asociativa α - β modificada a utilizar se muestra en la figura 4.8.

Fase de aprendizaje



Fase de recuperación

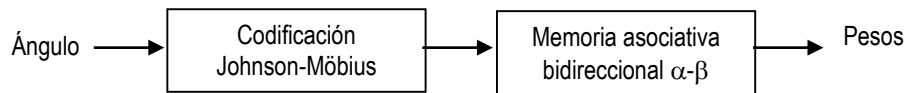


Figura 4.8 Fase de aprendizaje y recuperación de la BAM Alfa-Beta

De la figura 4.8 se puede observar que los ángulos son codificados previamente y después se aplica la transformada de expansión vectorial a cada vector con su vector *One-Hot* y *Zero Hot* correspondiente y se crean dos memorias autoasociativas, de tipo **máx** y **mín**. Los patrones **y** (los pesos) se almacenan utilizando un *Linear-Associator* modificado.

Capítulo 5

RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en la reducción de iteraciones cuando se aplican los dos algoritmos propuestos para la eliminación de lóbulos secundarios a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45^\circ$: LMS y la red neuronal perceptrón multicapa. Primero, se obtienen los coeficientes de los filtros FIR, utilizando diferentes ventanas, que servirán como pesos para la inicialización de ambos algoritmos. Después se utilizan tres métricas para determinar el desempeño del sistema de antenas en ambos algoritmos, como son: relación señal a ruido más interferencia (SINR) de la ecuación (2.24), error cuadrático medio (MSE) de la ecuación (3.14) y la correlación cruzada normalizada. Estas métricas se aplican para diferentes números de iteraciones. Se debe recordar que el error cuadrático medio se calcula en cada iteración y se utiliza como criterio en el LMS y el perceptrón multicapa para terminar el proceso adaptativo. Posteriormente, se presentan las gráficas de los patrones de radiación obtenidos de la eliminación de lóbulos en ambas direcciones y para varias iteraciones y diferentes ventanas, utilizando los algoritmos LMS y perceptrón multicapa. Posteriormente, se presentan las gráficas del patrón de radiación modificado que muestran la comparación entre ambos algoritmos, para diferentes ventaneos e iteraciones. Por último, los resultados de la aplicación de la BAM Alfa-Beta son mostrados.

5.1 FILTROS FIR Y VENTANAS PROPUESTAS

En esta primera parte del proceso se obtienen los coeficientes de los filtros FIR. Se aplican las funciones de ventana W_{Hamming} ecuación (4.3), W_{Kaiser} ecuación (4.4), $W_{\text{Triangular}}$ ecuación (4.5), W_{Tukey} ecuación (4.6) y el filtro pasa bajas $W_{2\text{FPb}}$ ecuación (4.9). Para cada filtro se calculan los primeros 14 valores. En la figura 5.1 se presentan de forma gráfica los valores de los coeficientes de las funciones de ventana así como del filtro pasa bajas. Para el caso de la ventana de Kaiser se ocupará un valor de $\beta=0.25$ de acuerdo a [46,47,48]. Y para la ventana de Tukey el valor de $\alpha=0.5$ de acuerdo a [49].

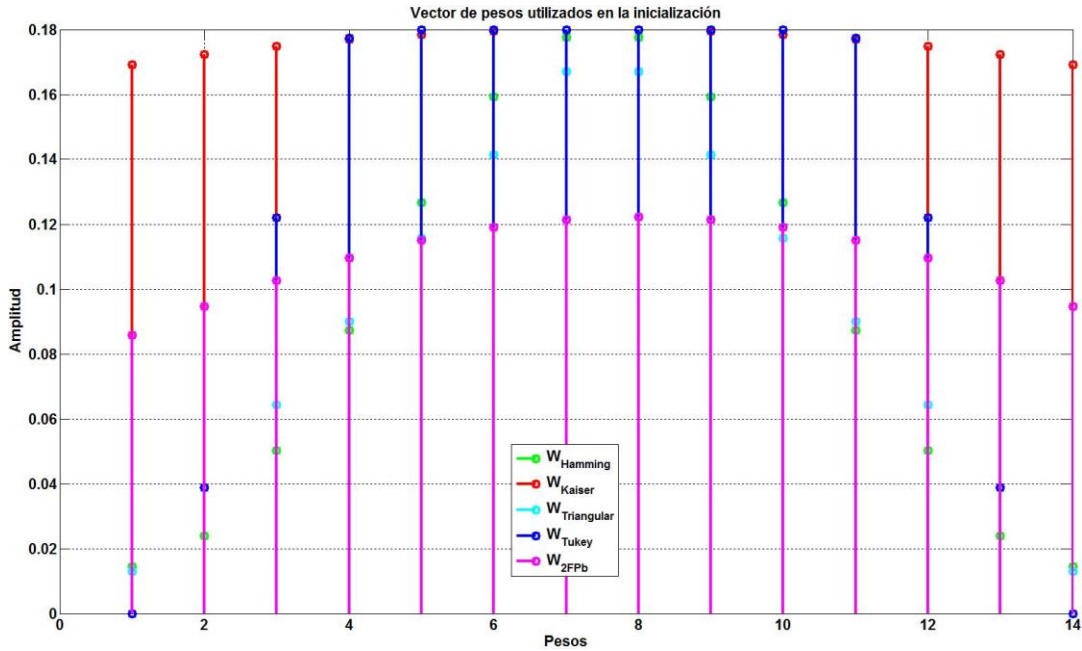


Figura 5.1 Vector de pesos propuestos para la inicialización

En la tabla 5.1 se muestran los coeficientes resultantes del ventaneo que se utilizarán como vector de pesos para el proceso adaptativo.

Tabla 5.1. Coeficientes usados para la inicialización del proceso adaptativo

Pesos	W_{Zero}	$W_{Hamming}$	W_{Kaiser}	$W_{Triangular}$	W_{Tukey}	W_{2FPb}
w_1	0	0.0144	0.1693	0.0129	0	0.0857
w_2	0	0.0239	0.1723	0.0386	0.0389	0.0947
w_3	0	0.0502	0.1748	0.0643	0.1219	0.1027
w_4	0	0.0872	0.1769	0.0900	0.1774	0.1095
w_5	0	0.1266	0.1784	0.1157	0.1800	0.1150
w_6	0	0.1592	0.1794	0.1414	0.1800	0.1190
w_7	0	0.1776	0.1799	0.1671	0.1800	0.1214
w_8	0	0.1776	0.1799	0.1671	0.1800	0.1222
w_9	0	0.1592	0.1794	0.1414	0.1800	0.1214
w_{10}	0	0.1266	0.1784	0.1157	0.1800	0.1190
w_{11}	0	0.0872	0.1769	0.0900	0.1774	0.1150
w_{12}	0	0.0502	0.1748	0.0643	0.1219	0.1095
w_{13}	0	0.0239	0.1723	0.0386	0.0389	0.1027
w_{14}	0	0.0144	0.1693	0.0129	0	0.0947

De la figura 5.1 y la tabla 5.1 se puede observar que la amplitud de las muestras de cada respuesta al impulso de los filtros está acotada entre 0 y 0.18. Sin embargo, la forma de cada gráfica es diferente. Por ejemplo, en el caso de ventana de Tukey los coeficientes comienzan con valores muy pequeños, 0 y 0.0389, y suben rápidamente a 0.1219. Mientras que para el filtro pasa bajas con ganancia de 2, los coeficientes toman valores 0.0857 y 0.1222, por lo que la gráfica presenta un comportamiento muy suave.

Para el caso del filtro pasa bajas W_{2FPb} los valores de los coeficientes se multiplicaron por dos y se puede observar de la tabla 5.1 que no son simétricos. Sin embargo, se puede utilizar para inicializar el vector de pesos.

5.2 SINR, MSE Y CORRELACIÓN CRUZADA NORMALIZADA

Se aplicaron tres métricas para la comprobación de eficiencia del sistema propuesto para la eliminación de los lóbulos secundarios localizados a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45^\circ$. Estas métricas son: relación señal a ruido más interferencia (SINR), error cuadrático medio (MSE) y la correlación cruzada normalizada. Las pruebas se realizaron a 5, 7, 9, 11 y 20 iteraciones, utilizando los dos algoritmos propuestos en esta tesis.

En las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran los resultados obtenidos de aplicar las métricas MSE, SINR y la correlación cruzada normalizada para probar el desempeño de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa al insertar un nulo en las direcciones $\pm 24^\circ$.

En la tabla 5.2, se puede observar, marcado con línea discontinua, el valor mínimo del error cuadrático medio tanto para el LMS como para la red perceptrón multicapa; ambos valores, 0.0073 y 0.0308 respectivamente, se encuentran en 20 iteraciones, pero lo que nos interesa es contar con un buen resultado utilizando menos iteraciones. De la misma tabla, se aprecia que para 5 iteraciones el LMS arroja un resultado de 0.0399 utilizando los coeficientes de la ventana Rectangular para la inicialización del algoritmo, mientras el perceptrón multicapa muestra un resultado de 0.1284 cuando se inicializa el proceso con los coeficientes de la ventana Triangular.

Tabla 5.2 Resultados del error cuadrático medio para la inserción del nulo a $\pm 24^\circ$

VENTANAS	ITERACIONES									
	5		7		9		11		20	
	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS
RECTANGULAR	0.2736	0.0399	0.2520	0.0444	0.2050	0.0374	0.0874	0.0774	0.0308	0.049
HAMMING	0.2054	0.1370	0.1769	0.1102	0.1611	0.0873	0.1497	0.1588	0.1127	0.0688
KAISER	0.2459	0.0729	0.1956	0.0948	0.0768	0.0756	0.0346	0.1397	0.0318	0.0608
TRIANGULAR	0.1284	0.0790	0.1207	0.1097	0.1138	0.0875	0.1075	0.1620	0.0856	0.0706
TUKEY	0.1483	0.0286	0.1371	0.0743	0.1271	0.0597	0.1181	0.1121	0.0879	0.0491
2FPb	0.3624	0.0849	0.3360	0.0073	0.3114	0.0066	0.2885	0.0156	0.2070	0.0073

En la tabla 5.3, se observa que el valor mayor para la métrica relación señal a ruido más interferencia, para ambos algoritmos, se obtiene en 20 iteraciones: 171.7316 para la red perceptrón multicapa con la ventana rectangular y 32.7628 para el LMS utilizando la ventana 2FPb, marcados con línea discontinua. En el caso que nos interesa, para 5 iteraciones se tiene un máximo (encuadrado con línea continua) de 52.5090 para la PMNN con la ventana triangular y 21.0602 para el LMS con la ventana 2FPb. En la misma tabla, podemos apreciar que el valor de la PMNN para 5 iteraciones (con el

ventaneo triangular) es un poco menos de la mitad del valor máximo. Sin embargo, en el caso del LMS, el aumento de la SINR es muy poco y, además, es menor que el valor obtenido por la PMNN.

Tabla 5.3 Resultados de la relación señal a ruido mas interferencia para la inserción del nulo a $\pm 24^\circ$

VENTANAS	ITERACIONES									
	5		7		9		11		20	
	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS
RECTANGULAR	14.7081	15.6956	16.4656	16.6469	20.3732	16.0766	36.9960	18.1934	171.7316	25.8531
HAMMING	23.0417	16.1140	31.6235	13.2394	41.5856	12.7744	52.3395	15.1456	88.7989	22.8246
KAISER	16.5185	16.2264	20.7706	13.9837	39.3285	13.4340	117.2213	15.7331	170.3018	23.3798
TRIANGULAR	52.5090	14.8596	64.9737	12.9469	78.6568	12.5771	96.5250	14.9763	101.9642	22.7037
TUKEY	68.5496	17.0136	90.0920	15.2710	117.4012	14.5781	119.98	16.7655	121.24	24.3478
2FPb	14.2018	21.0602	14.9288	23.8377	15.8848	23.2258	17.1032	25.1279	26.4206	32.7628

En la tabla 5.4, se muestran los resultados de aplicar la métrica del índice de correlación. Como podemos observar, los valores máximos se encuentran, para la PMNN en 7 iteraciones utilizando la ventana triangular y, en el caso del LMS, en 9 iteraciones con un ventaneo de 2FPb, ambos valores encuadrados con línea discontinua. Por otro lado, para 5 iteraciones, la mejor correlación cruzada normalizada para la red perceptrón multicapa, de 99.3534, se obtiene al utilizar los coeficientes resultantes de aplicar el filtro triangular, mientras que para el LMS el valor mayor es de 98.60 con la ventana del filtro pasa bajas con ganancia 2. El valor de la correlación cruzada normalizada de la PMNN para 5 iteraciones no difiere mucho del valor máximo obtenido para este mismo algoritmo. Esto mismo sucede con el LMS, sin embargo, el mejor resultado lo obtiene el perceptrón multicapa.

Tabla 5.4 Resultados de la correlación cruzada normalizada (%) para la inserción del nulo a $\pm 24^\circ$

VENTANAS	ITERACIONES									
	5		7		9		11		20	
	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS
RECTANGULAR	79.1825	97.37	93.1026	98.32	97.8060	98.79	79.1825	97.37	93.1026	98.32
HAMMING	75.3850	98.04	91.0204	95.24	98.5375	96.59	75.3850	98.04	91.0204	95.24
KAISER	78.2975	98.58	92.6490	96.96	98.3840	97.43	78.2975	98.58	92.6490	96.96
TRIANGULAR	99.3534	98.04	99.8962	96.43	99.9851	97.01	99.3534	98.04	99.8962	96.43
TUKEY	99.6505	98.66	99.8519	98.50	99.9251	98.40	99.9571	98.20	99.9919	98.13
2FPb	78.7510	98.60	96.5481	98.74	97.3120	99.36	78.7510	98.60	96.5481	98.74

En las tablas 5.5, 5.6 y 5.7 se muestran los resultados obtenidos de aplicar las métricas MSE, SINR y la correlación cruzada normalizada para probar el desempeño de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa al insertar un nulo en las direcciones $\pm 45.5^\circ$.

Se puede observar en la tabla 5.5 que los valores mínimos del error cuadrático medio son 0.0295 para la PMNN a 9 iteraciones y un ventaneo rectangular y, 0.0003 para el LMS a 9 y 20 iteraciones cuando se utiliza la ventana 2FPb, estos los valores están encuadrados con una línea discontinua. Los valores mínimos para 5 iteraciones están enmarcados con línea continua y son 0.1007 y 0.0917 para la red perceptrón multicapa y el LMS, respectivamente, ambos con ventaneo Kaiser. La diferencia entre los dos valores es mínima.

Tabla 5.5 Resultados del error cuadrático medio para la inserción del nulo a $\pm 45.5^\circ$

VENTANAS	ITERACIONES									
	5		7		9		11		20	
	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS
RECTANGULAR	0.1442	0.1426	0.0463	0.0272	0.0295	0.0176	0.0291	0.0062	0.0277	0.0003
HAMMING	0.1919	0.1029	0.1823	0.1401	0.1734	0.1023	0.1652	0.0804	0.1346	0.0052
KAISER	0.1007	0.0917	0.0358	0.1131	0.0318	0.0822	0.0314	0.0634	0.0298	0.0038
TRIANGULAR	0.1355	0.1187	0.1290	0.1291	0.1236	0.0935	0.1188	0.0702	0.1006	0.0038
TUKEY	0.1621	0.0312	0.1495	0.0854	0.1416	0.0637	0.1345	0.0558	0.1085	0.0051
2FPb	0.3804	0.7744	0.3620	0.0009	0.3441	0.0003	0.3269	0.0007	0.2595	0.0020

La tabla 5.6 muestra los resultados de aplicar la métrica SINR cuando se inserta un nulo en $\pm 45.5^\circ$. Los mejores resultados, tanto para la PMNN y el LMS, los podemos encontrar enmarcados con línea discontinua en las 20 iteraciones, al utilizar los coeficientes del filtro rectangular. Se puede observar que existe gran diferencia entre los valores obtenidos por ambos algoritmos. El mejor resultado lo obtiene la PMNN con 171.7550. Para 5 iteraciones, el máximo valor, 50.3704, se obtiene con un ventaneo de Hamming y el algoritmo perceptrón multicapa. Cabe resaltar que este valor es aún más grande que el valor obtenido por el LMS para 20 iteraciones: 39.3365.

Tabla 5.6 Resultados de la relación señal a ruido mas interferencia para la inserción del nulo a $\pm 45.5^\circ$

VENTANAS	ITERACIONES									
	5		7		9		11		20	
	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS
RECTANGULAR	25.0247	24.8624	40.9153	35.6491	64.1697	35.6136	88.0146	33.5304	171.7550	39.3365
HAMMING	50.3704	17.1521	55.8820	17.3669	61.3874	20.5562	66.7299	27.0279	81.9445	36.1939
KAISER	29.2388	19.9375	47.7503	19.3804	69.2100	22.2883	91.0183	28.7742	166.6311	37.8850
TRIANGULAR	37.2927	19.7251	43.9749	18.9006	50.8892	22.0393	57.9943	28.9388	89.0123	38.3387
TUKEY	35.6792	18.2051	46.0609	19.0056	56.7267	21.4239	67.5979	26.6523	128.7435	34.9903
2FPb	17.0645	23.0494	17.4303	27.1453	17.8837	27.7915	18.4341	29.2162	22.3272	35.4300

En la tabla 5.7 se muestran los resultados del índice de correlación obtenido por los algoritmos utilizados en este trabajo, cuando se coloca un nulo en la dirección $\pm 45.5^\circ$. En este caso, los valores máximos del índice de correlación los encontramos en 9 iteraciones con un ventaneo de Hamming para la PMNN, 99.9965%, y en 11 iteraciones y utilizando la ventana triangular para el LMS, 99.72. Se

puede observar que para 5 iteraciones, el LMS muestra el mismo valor de la correlación cruzada normalizada, mientras que, para un mismo proceso de 5 iteraciones, la red perceptrón multicapa presenta un valor muy cercano al máximo.

Tabla 5.7 Resultados de la correlación cruzada normalizada (%) para la inserción del nulo a $\pm 45.5^\circ$

VENTANAS	ITERACIONES									
	5		7		9		11		20	
	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS	PMNN	LMS
RECTANGULAR	78.2349	96.80	93.6898	97.93	98.9894	98.80	78.2349	96.80	93.6898	97.93
HAMMING	99.8507	99.17	99.9761	97.68	99.9965	97.90	99.8507	99.17	99.9761	97.68
KAISER	81.4769	99.65	95.1482	98.21	99.2334	98.28	81.4769	99.65	95.1482	98.21
TRIANGULAR	96.5661	99.72	99.3692	97.59	99.9088	97.88	96.5661	99.72	99.3692	97.59
TUKEY	97.3845	98.89	98.9650	98.55	99.4805	98.95	99.7025	99.09	99.9436	99.00
2FPb	80.6457	97.71	90.3541	98.91	94.6757	99.47	80.6457	97.71	90.3541	98.91

De las tablas anteriores, se puede observar que el algoritmo de la red perceptrón multicapa presenta mejores resultados en las métricas aplicadas para evaluar su desempeño, cuando se inserta un nulo en las direcciones $\pm 24^\circ$ y $\pm 45.5^\circ$. También podemos observar que estos resultados se obtienen al aplicar los ventaneos triangular, de Hamming y Kaiser.

En la siguiente sección se presentan las gráficas de los patrones de radiación que resultan de la aplicación de los dos algoritmos: LMS y PMNN, para la inserción de los nulos en las direcciones $\pm 24^\circ$ y $\pm 45.5^\circ$.

5.3 GRÁFICAS DEL PATRÓN DE RADIACIÓN MODIFICADO

En esta sección se presentan las gráficas del patrón de radiación obtenidas al aplicar los algoritmos LMS y perceptrón multicapa para la eliminación de los lóbulos secundarios localizados a $\pm 24^\circ$ y $\pm 45^\circ$ para 5, 10, 12 y 25 iteraciones y utilizando diferentes ventanas. Primero se presentarán los patrones de radiación resultantes de la aplicación del LMS. En este caso, las ventanas utilizadas son: cero, Hamming, Kaiser, rectangular, triangular, Tukey, FPb (pasa bajas normalizado) y 2FPb. Después se mostrarán los resultados gráficos del perceptrón multicapa utilizando las ventanas: unos, Hamming, Kaiser, triangular, FPb y 2FPb. Finalmente, se presentan las gráficas de comparación de los mejores resultados obtenidos por ambos algoritmos. En ambos casos, se podrá observar la comparación con la inicialización en ceros de los dos procesos.

5.3.1 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 45.5° CON LMS

En la figuras 5.2a y 5.2b se presentan los patrones de radiación para 5 iteraciones y para las diferentes ventanas utilizadas para la eliminación del lóbulo secundario localizado a 45.5° .

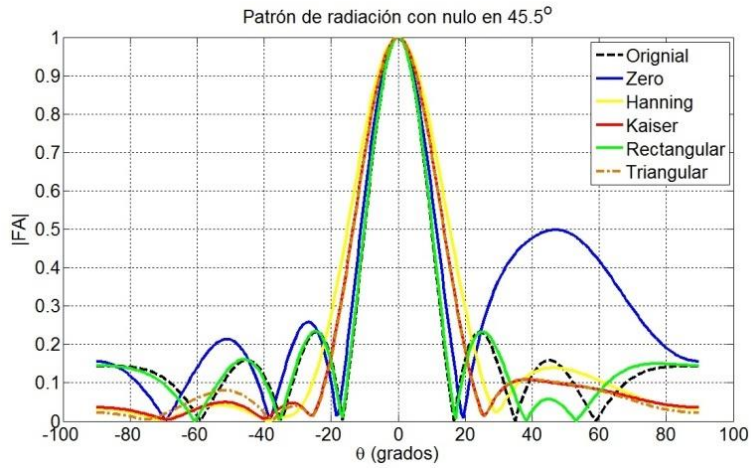


Figura 5.2a.

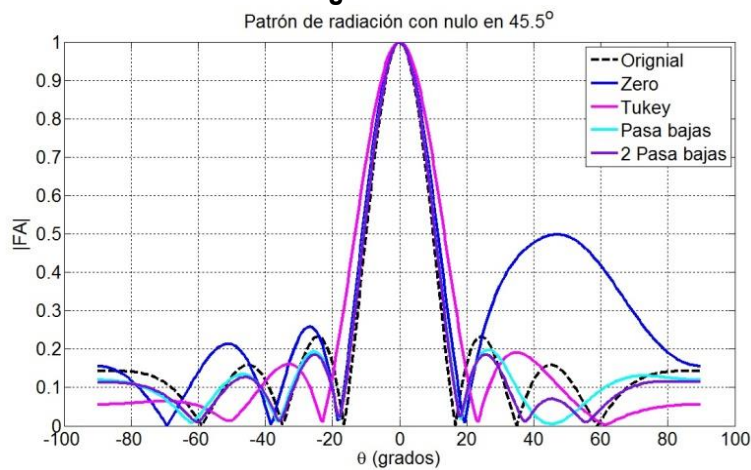


Figura 5.2b.

Figura 5.2. Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 5 iteraciones.

De las figuras 5.2a y 5.2b, se puede observar que el lóbulo secundario localizado a 45.5° se reduce utilizando los coeficientes del filtro pasa bajas para la inicialización del proceso del LMS. La inicialización con valores de cero en vez de anular el lóbulo secundario lo amplifica.

Las figuras 5.3a y 5.3b muestran los patrones de radiación modificados para 10 iteraciones, para insertar un nulo a 45.5°.

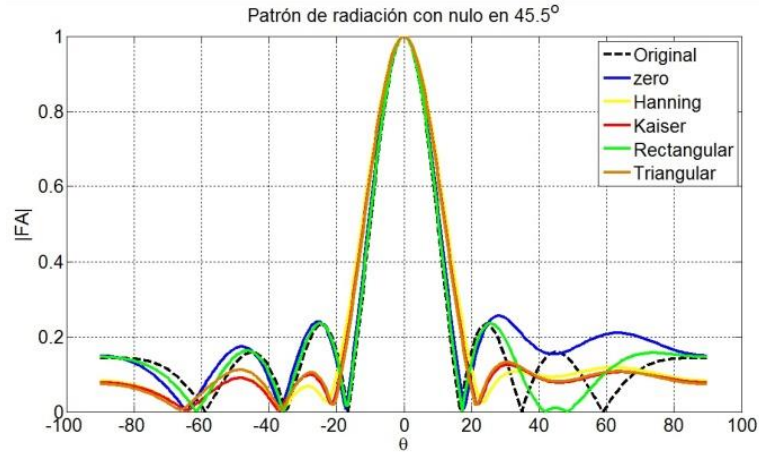


Figura 5.3a

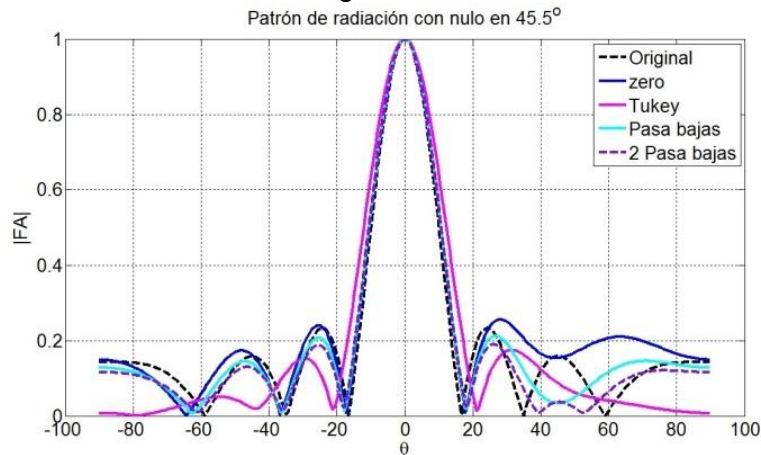


Figura 5.3b

Figura 5.3 Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 10 iteraciones.

En las dos figuras anteriores, se observa que el lóbulo secundario casi se desvanece a las 10 iteraciones utilizando el ventaneo rectangular.

Los patrones de radiación modificados para 12 iteraciones y utilizando diferentes ventanas, se muestran en las figuras 5.4a y 5.4b.

De ambas gráficas, se resalta el hecho de que, al utilizar los coeficientes del filtro pasa bajas para la inicialización del proceso del LMS, se inserta de manera eficiente un nulo a 45.5° . Aún más, se observa que la inicialización con ceros del proceso, con 12 iteraciones, no se acerca a la anulación del lóbulo secundario.

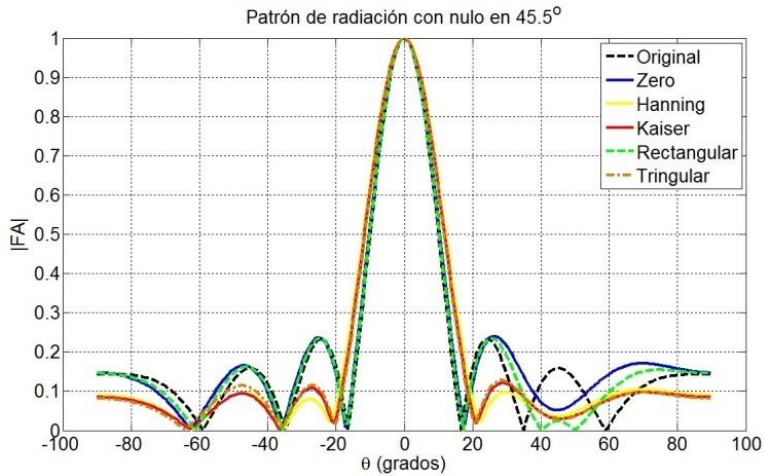


Figura 5.4a.

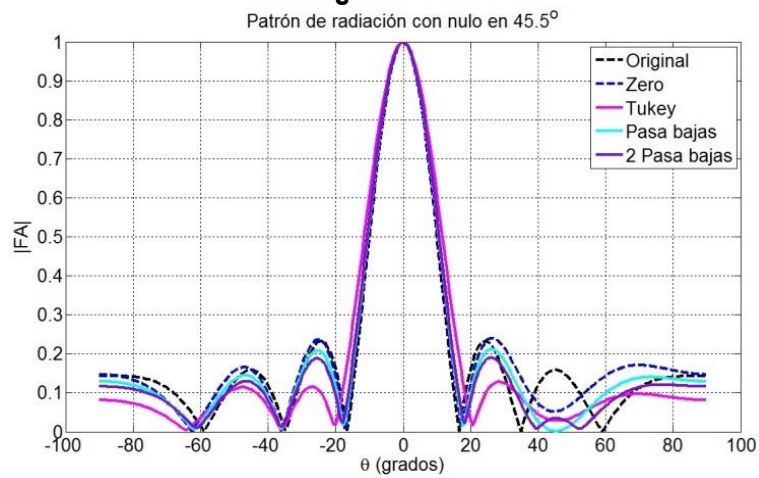


Figura 5.4b.

Figura 5.4. Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 12 iteraciones.

En las figuras 5.5a y 5.5b se muestran las gráficas de los patrones de radiación utilizando el algoritmo LMS a 25 iteraciones y con diferentes ventanas.

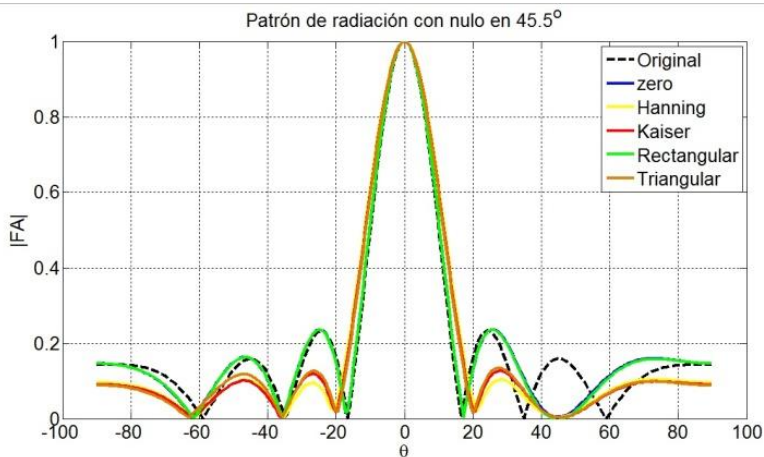


Figura 5.5a.

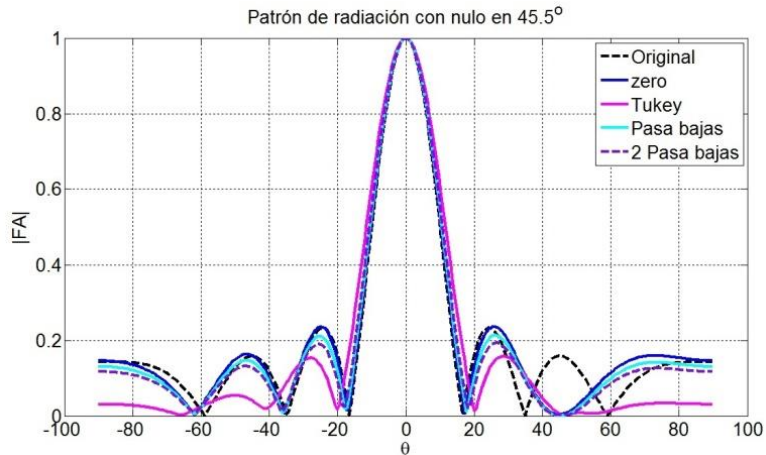


Figura 5.5b.

Figura 5.5. Patrón de radiación modificado con LMS en 45.5° a 25 iteraciones.

Para 25 iteraciones, tanto los coeficientes de los filtros como los valores cero, utilizados en la inicialización del proceso del algoritmo LMS, logran insertar de manera eficiente un nulo en la dirección de 45.5° , lo cual se puede observar en las figuras 5.5a y 5.5b. Debe recordarse que el objetivo de inicializar con valores diferentes a cero al LMS es el de anular el lóbulo secundario en menos tiempo de procesamiento. Para el caso en particular de la eliminación del lóbulo secundario a 45.5° , el ventaneo que logra su propósito en 5 iteraciones es el del filtro pasa bajas.

5.3.2 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A -45.5° CON LMS

En las figuras 5.6a y 5.6b se muestran las graficas de los patrones de radiación modificados aplicando 5 iteraciones.

En estas figuras, se puede observar que la inicialización del proceso del LMS con los coeficientes del filtro pasa bajas, logra insertar el nulo de manera eficiente en la dirección de -45.5° , mientras que cuando se inicia el LMS con valores cero, el lóbulo secundario se amplifica.

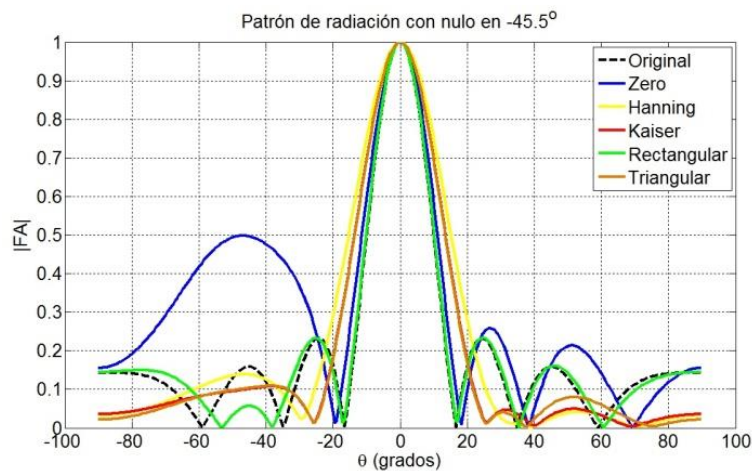


Figura 5.6a

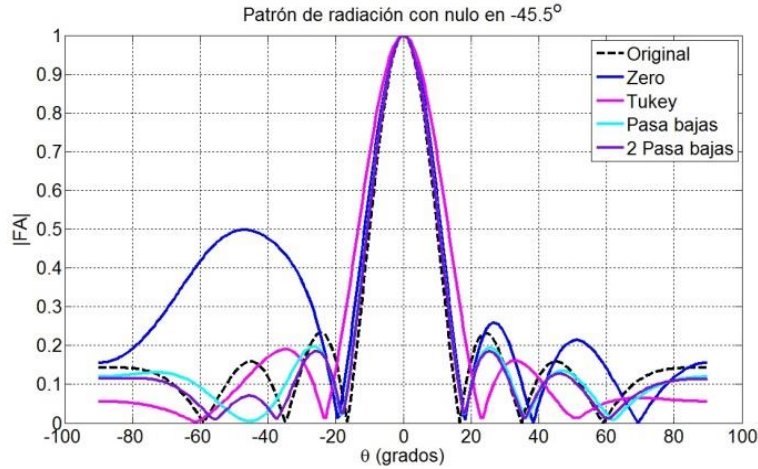


Figura 5.6b

Figura 5.6 Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 5 iteraciones.

Para 10 iteraciones, las gráficas de los patrones de radiación modificados se muestran en las figuras 5.7a y 5.7b.

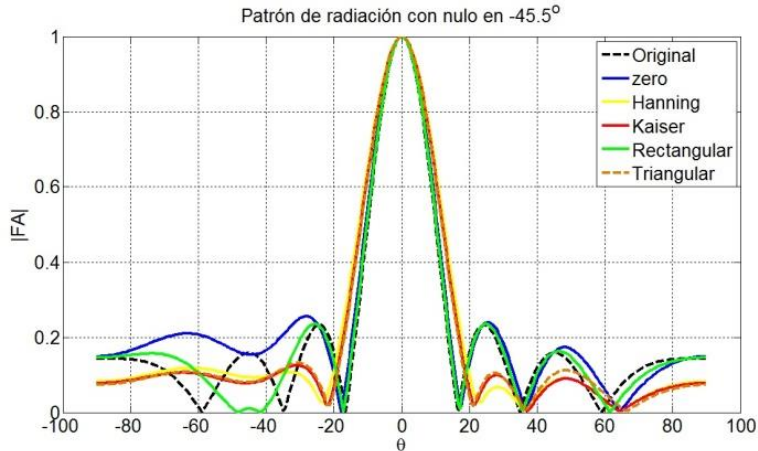


Figura 5.7a

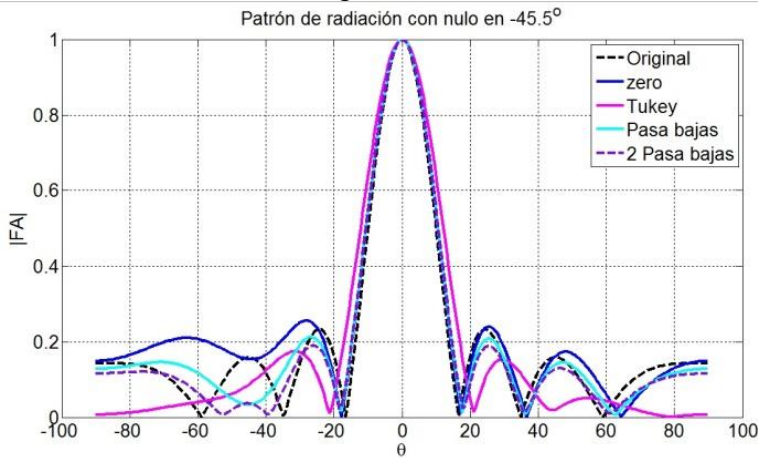


Figura 5.7b

Figura 5.7 Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 10 iteraciones.

De las figuras 5.7a y 5.7b, se observa que, para 10 iteraciones, el ventaneo rectangular casi logra la anulación del lóbulo secundario localizado a -45.5° . Nuevamente, queda claro que la inicialización con ceros no logra el propósito principal de este trabajo.

Las figuras 5.8a y 5.8b presentan los patrones de radiación modificados utilizando 12 iteraciones.

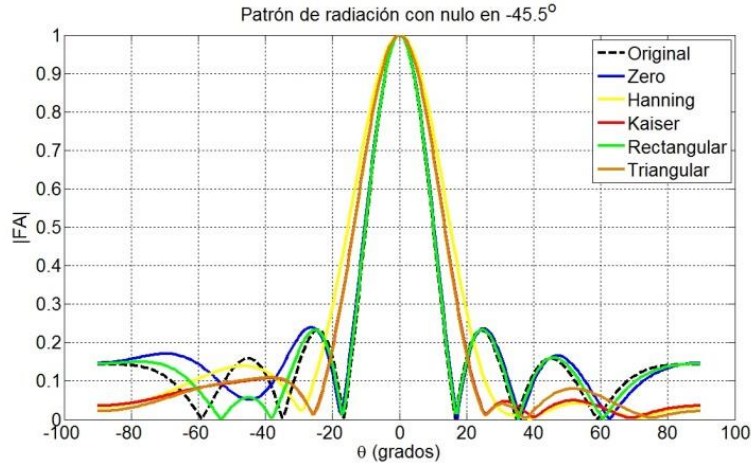


Figura 5.8a

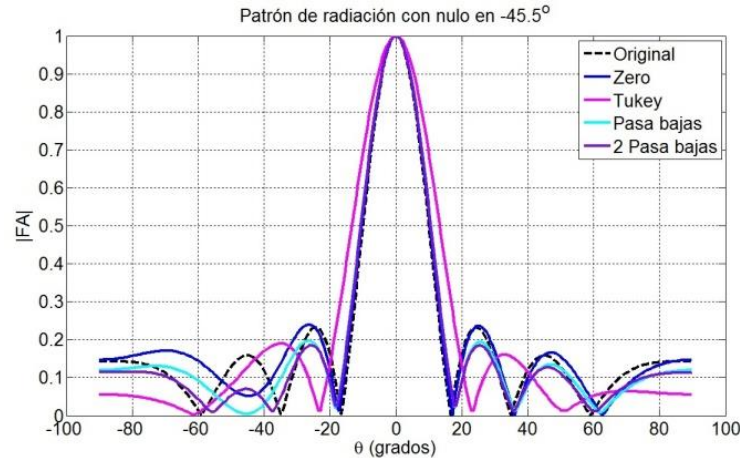


Figura 5.8b

Figura 5.8 Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 12 iteraciones.

En las figuras anteriores, se observa que al inicializar el LMS con los coeficientes del filtro pasa bajas se logra insertar el nulo a -45.5° . Aunque la inicialización con ceros muestra mejores resultados, a 12 iteraciones, que el ventaneo Tukey y 2 pasa bajas, no logra la anulación del lóbulo secundario.

Por último, las gráficas 5.9a y 5.9b muestran las gráficas del patrón de radiación cuando se inserta un nulo a -45.5° , utilizando 25 iteraciones y diferentes ventaneos.

En este caso, se puede observar que los valores de inicialización de todos los filtros y, aún la inicialización nula, logran la eliminación del lóbulo secundario.

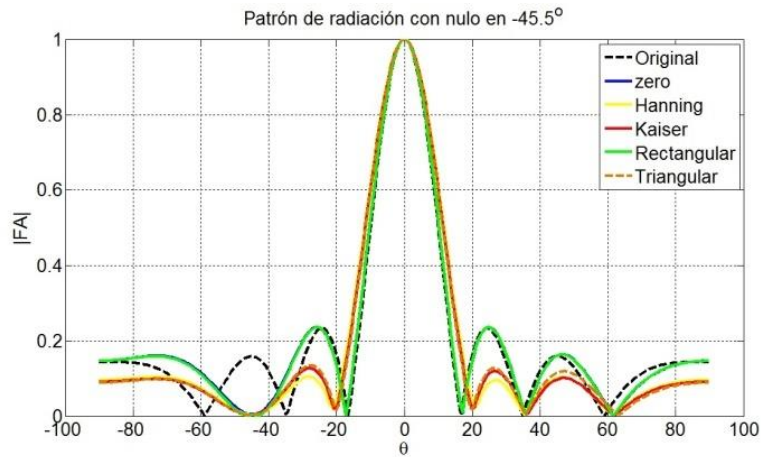


Figura 5.9a

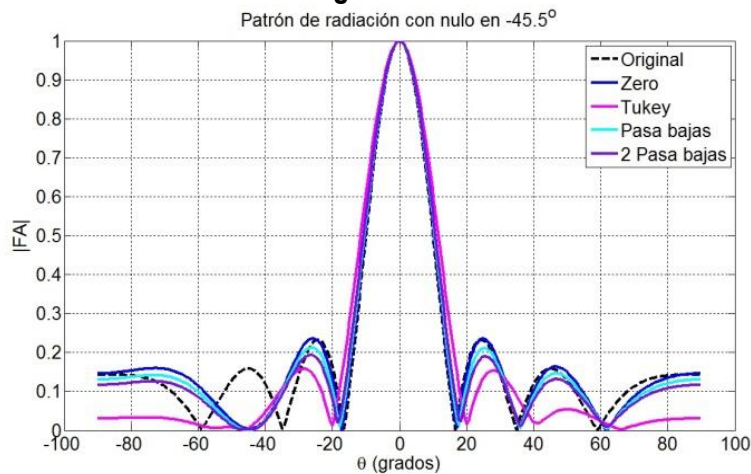


Figura 5.9b

Figura 5.9 Patrón de radiación modificado con LMS en -45.5° a 25 iteraciones.

5.3.3 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 24° CON LMS

En las figuras 5.10a y 5.10b, se muestran las gráficas de los patrones de radiación cuando se inserta un nulo en 24° , con 5 iteraciones y diferentes tipos de ventanas.

Estas figuras muestran que la inicialización del proceso del LMS con los coeficientes del filtro 2 pasa bajas es la que logra la mejor disminución del lóbulo secundario localizado a 24° con sólo 5 iteraciones.

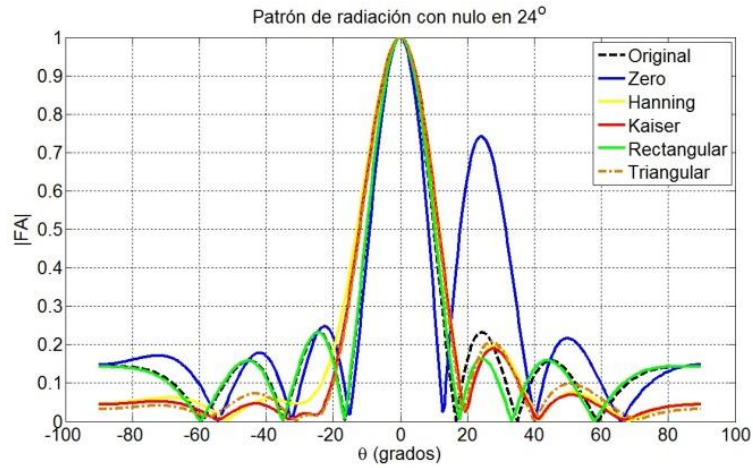


Figura 5.10a

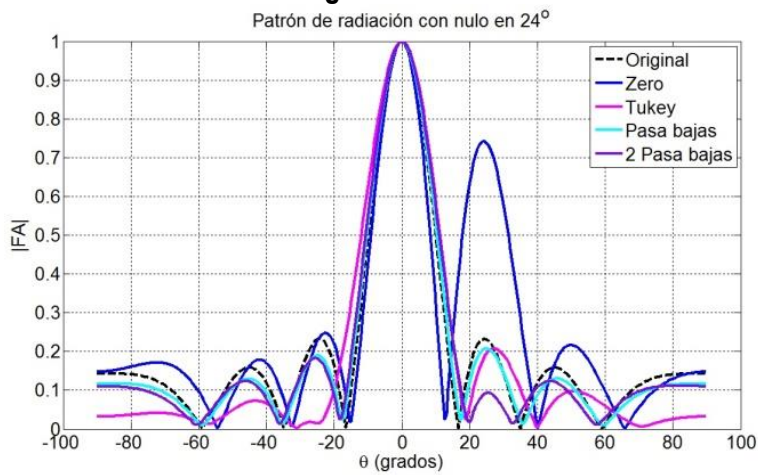


Figura 5.10b

Figura 5.10 Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 5 iteraciones.

Las gráficas del patrón de radiación modificado para 10 iteraciones, se muestran en las figuras 5.11a y 5.11b.

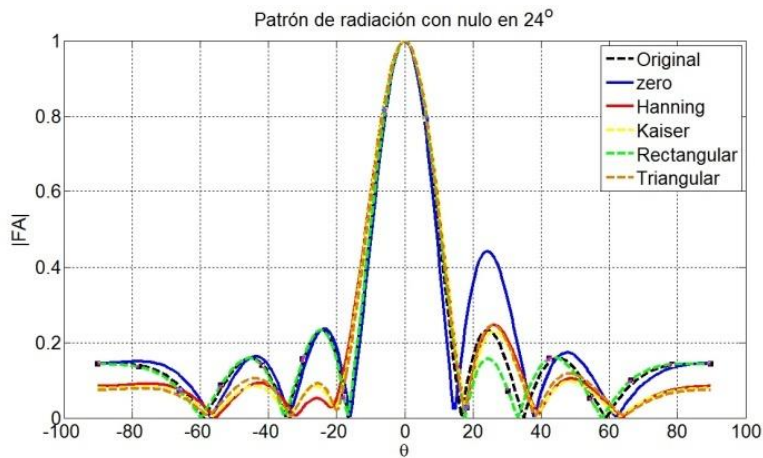


Figura 5.11a

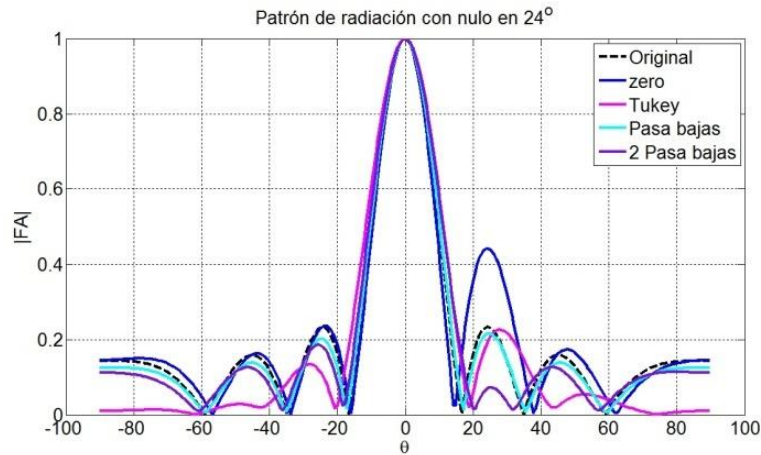
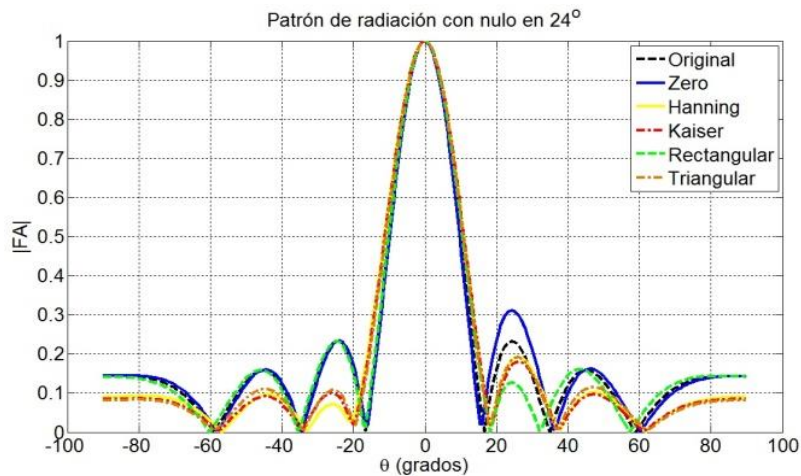


Figura 5.11b

Figura 5.11 Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 10 iteraciones.

En las figuras 5.11a y 5.11b, se puede observar que, como en el caso del proceso a 5 iteraciones, el ventaneo con el 2FPb genera mejores resultados al minimizar el lóbulo secundario. Las figuras 5.12a y 5.12b muestran la modificación del patrón de radiación con 12 iteraciones.

Figura 5.12^a

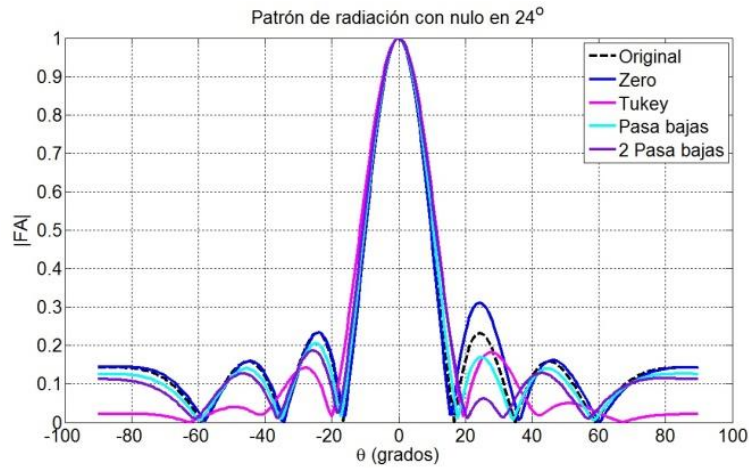


Figura 5.12b

Figura 5.12 Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 12 iteraciones.

De las dos figuras anteriores se observa que el 2FPb logra minimizar el lóbulo secundario en 12 iteraciones y supera a los demás ventaneos. Al contrario de lo anterior, la inicialización nula amplifica el lóbulo.

En las figuras 5.13a y 5.13b, se presentan los patrones de radiación modificados para 25 iteraciones.

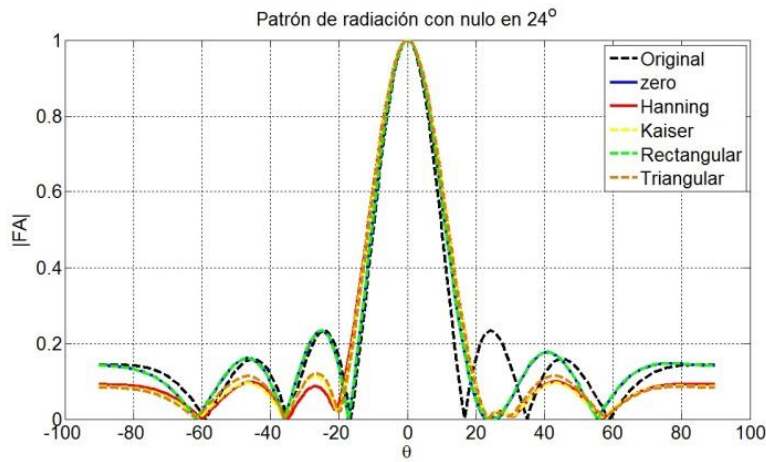


Figura 5.13a

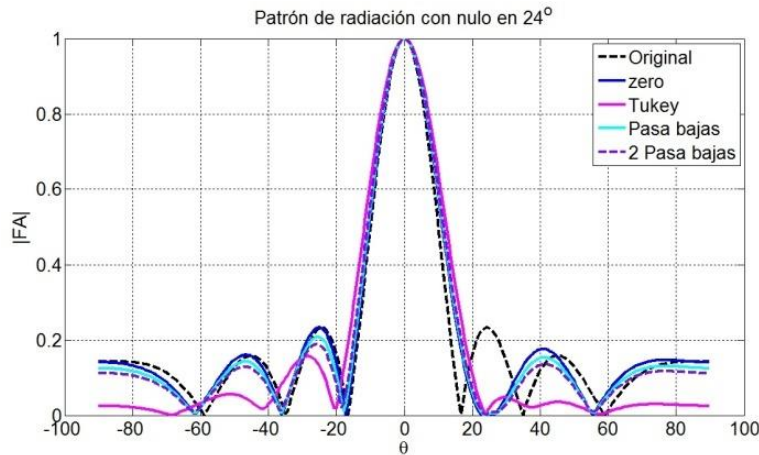


Figura 5.13b

Figura 5.13 Patrón de radiación modificado con LMS en 24° a 25 iteraciones.

Todos los ventaneos, junto con la inicialización nula, logran la eliminación del lóbulo secundario localizado en 24° a 25 iteraciones.

De esta sección se puede concluir que la inicialización del LMS con los coeficientes del filtro 2FPb muestran los mejores resultados al tratar de anular el lóbulo secundario a 24° , sin embargo, no lo logra anular por completo.

5.3.4 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A -24° CON LMS

Las gráficas 5.14a y 5.14b muestran los patrones de radiación como resultado de la inserción del nulo a -24° , para 5 iteraciones y diferentes ventaneos. En las figuras se puede apreciar que el filtro 2 pasa bajas es el que logra minimizar el lóbulo secundario a -24° , pero no logra eliminarlo. Muy claramente, se observa que la inicialización del LMS con ceros amplifica el lóbulo en lugar de anularlo.

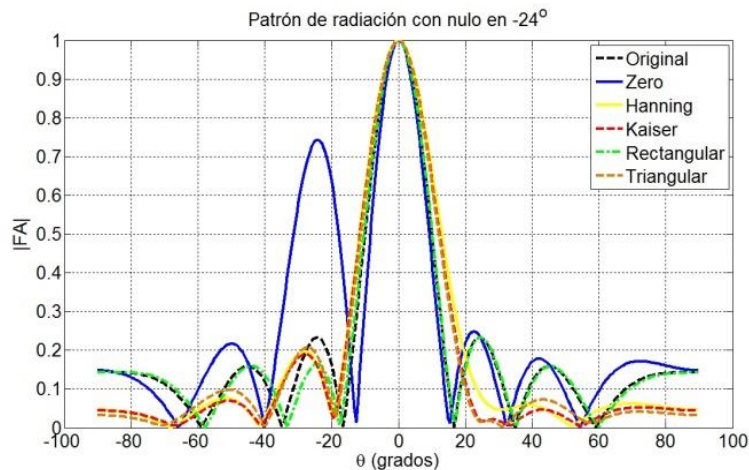


Figura 5.14a

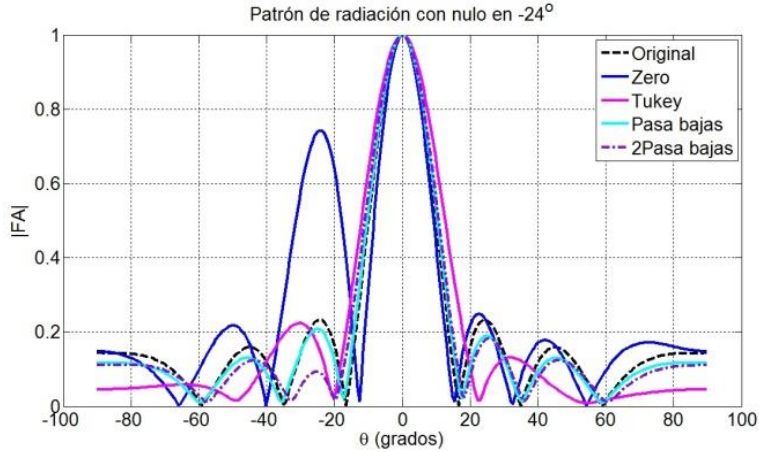


Figura 5.14b

Figura 5.14. Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 5 iteraciones.

Las gráficas del patrón de radiación a 10 iteraciones, se muestran en las figuras 5.15a y 5.15b. En estas gráficas se observa que el mejor comportamiento lo logra el filtro 2 pasa bajas pero sin poder insertar el nulo en -24° .

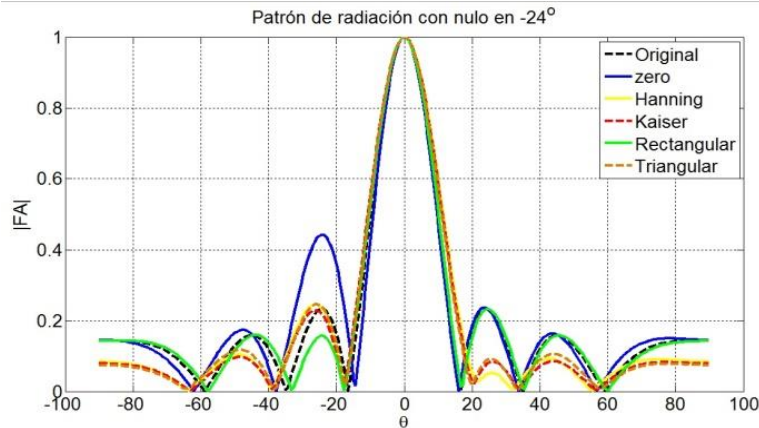


Figura 5.15a

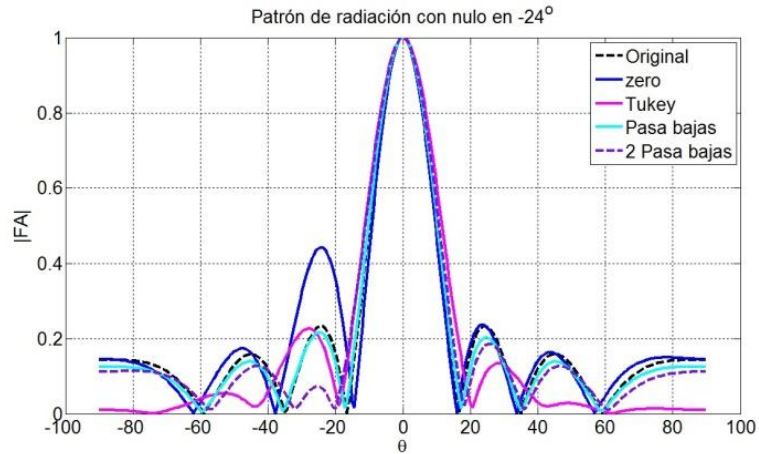


Figura 5.15b

Figura 5.15 Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 10 iteraciones.

Las figuras 5.16a y 5.16b presentan gráficas del patrón de radiación modificado para 12 iteraciones. De estas figuras, se aprecia que los coeficientes del filtro 2 pasa bajas logran minimizar el lóbulo secundario.

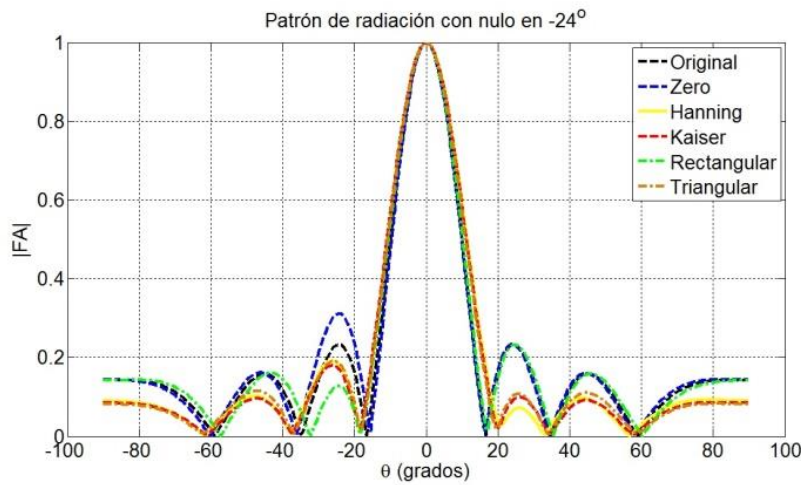


Figura 5.16a

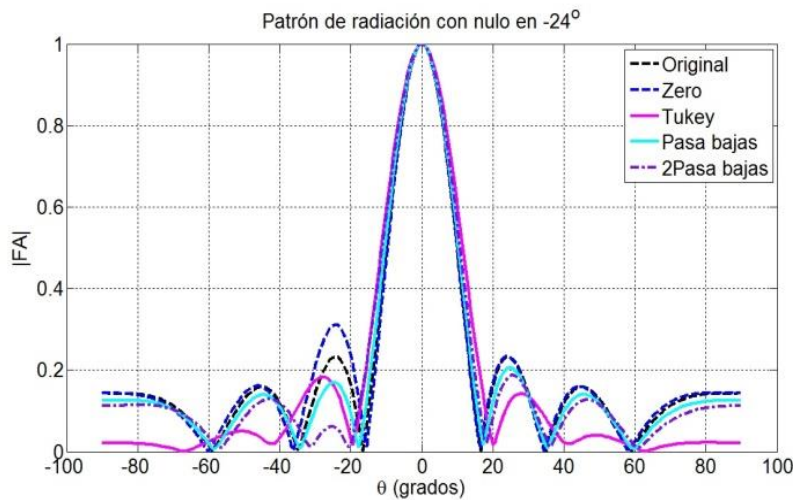


Figura 5.16b

Figura 5.16 Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 12 iteraciones.

En las figuras 5.17a y 5.17b se muestran las gráficas del patrón de radiación modificado para 25 iteraciones. Se puede observar que tanto las inicializaciones con los coeficientes de los filtros como la inicialización en cero, logran la eliminación del lóbulo secundario cuando el proceso llega a 25 iteraciones.

De esta sección se puede concluir que para la eliminación del lóbulo secundario localizado a -24° , no importando el número de iteraciones, el mejor ventaneo es el 2FPb. También podemos concluir que, en ningún momento, la inicialización del LMS con ceros ofrece buenos resultados.

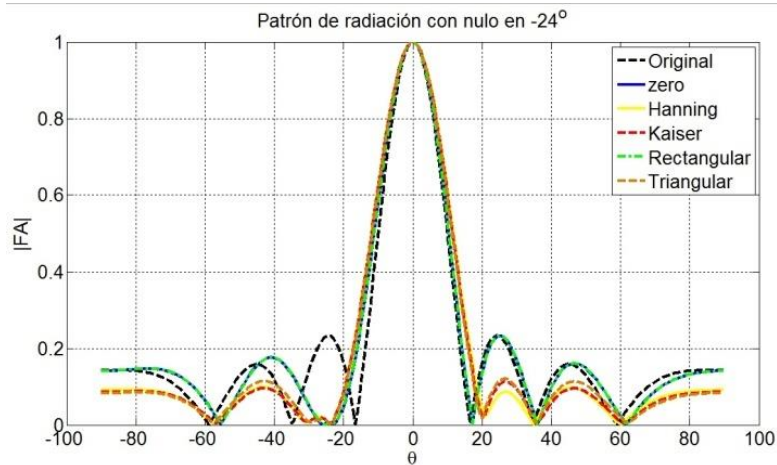


Figura 5.17a

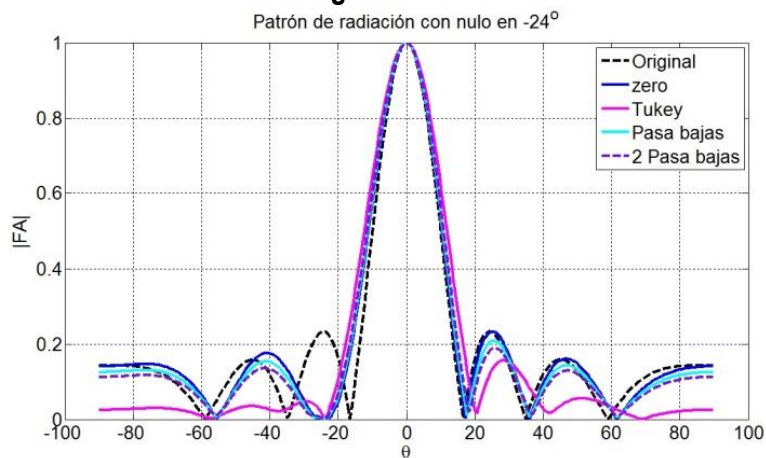


Figura 5.17b

Figura 5.17 Patrón de radiación modificado con LMS en -24° a 25 iteraciones.

5.3.5 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 45.5° CON PERCEPTRÓN MULTICAPA

De las figuras anteriores se puede concluir que al inicializar el vector de pesos con valores igual a cero, se requieren de muchas iteraciones para modificar el patrón de radiación. Esta inicialización no se tomará en cuenta para el perceptrón multicapa.

Se presenta el patrón de radiación modificado en la figura 5.18 para la inserción del nulo en la dirección de 45.5° , para 5 iteraciones y utilizando diferentes ventaneos. En la figura 5.18, se puede observar que cuando se utilizan los coeficientes del filtro de Hamming para inicializar el proceso de la red perceptrón multicapa, se logra insertar un nulo a 45.5° en tan sólo 5 iteraciones.

En la figura 5.19 se muestra la gráfica del patrón de radiación modificado para 10 iteraciones. En esta gráfica se observa que a excepción del ventaneo 2FPb, las ventanas restantes logran la eliminación del lóbulo secundario.

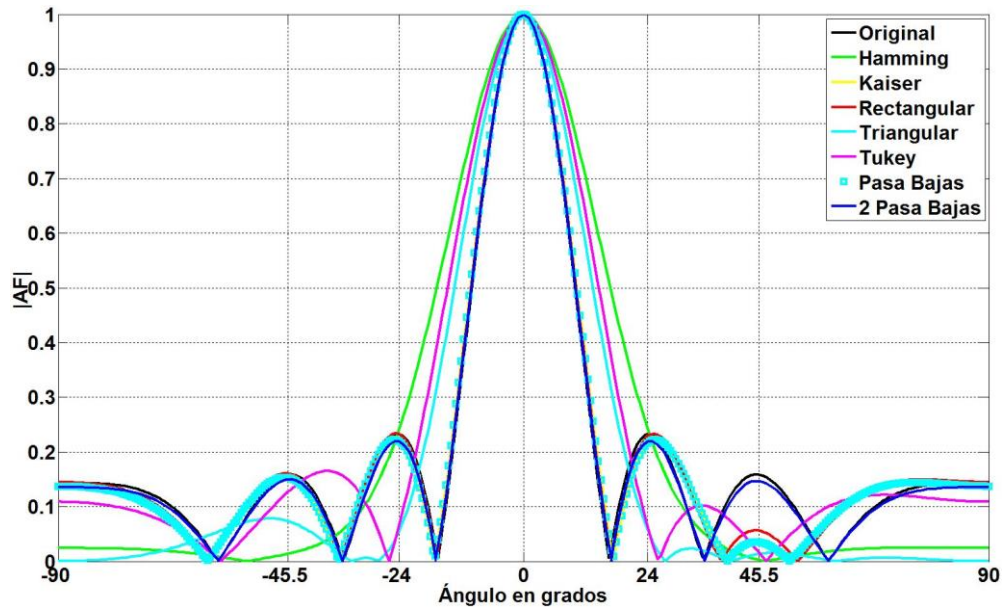


Figura 5.18. Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 5 iteraciones.

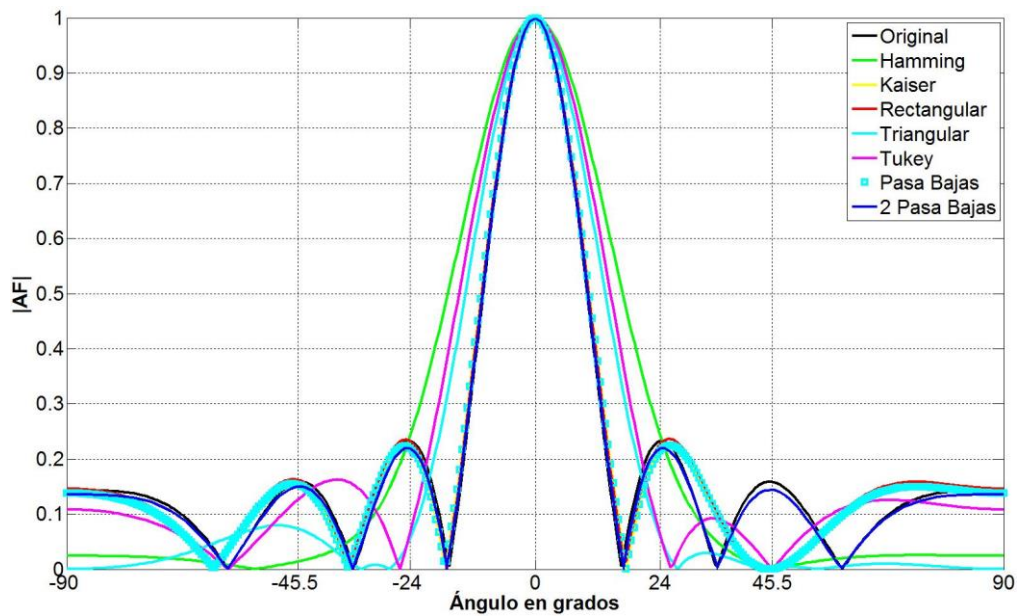


Figura 5.19. Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 10 iteraciones.

Las figuras 5.20 y 5.21 presentan las gráficas del patrón de radiación modificado utilizando 12 y 25 iteraciones.

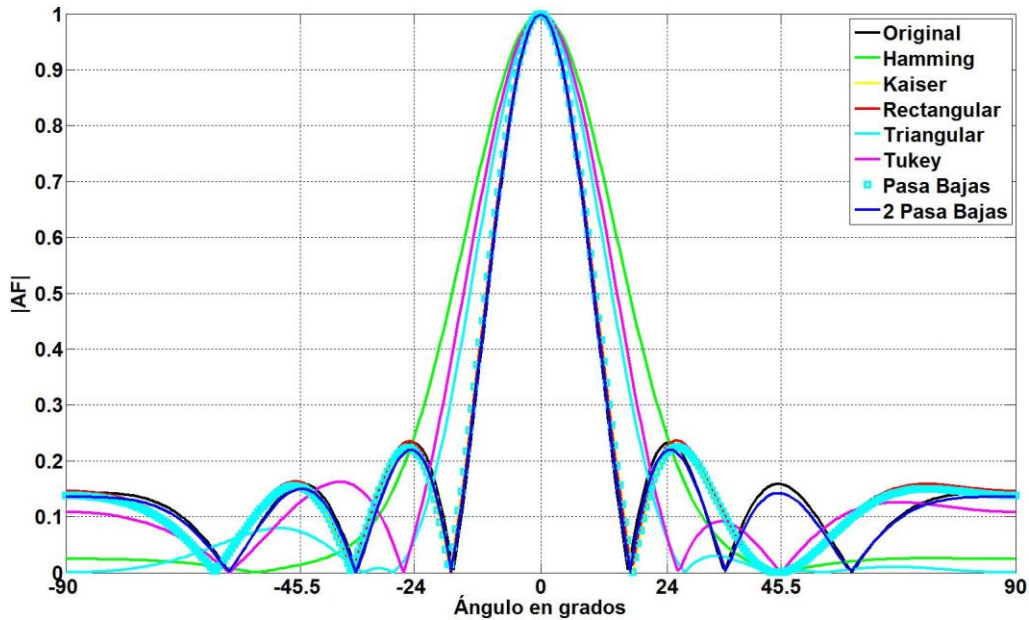


Figura 5.20 Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 12 iteraciones.

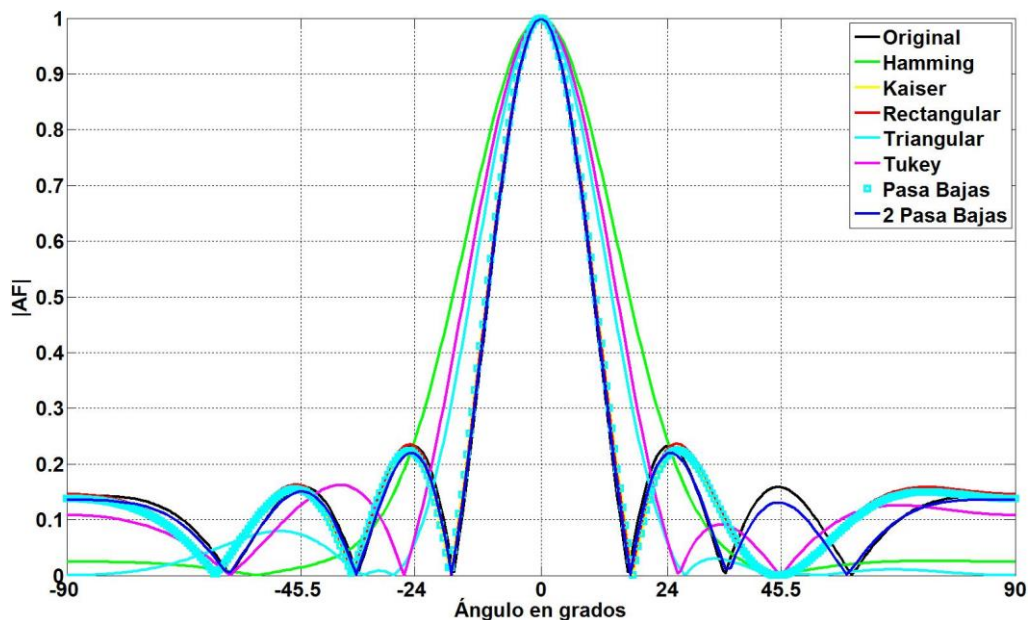


Figura 5.21 Patrón de radiación modificado con PMNN en 45.5° a 25 iteraciones.

Las figuras 5.20 y 5.21, muestran un comportamiento similar al de la figura 5.19. Todos los ventaneos logran la eliminación del lóbulo secundario a excepción del filtro 2FPb.

De esta sección se puede concluir que al inicializar la red perceptrón multicapa con los coeficientes resultantes de la aplicación del filtro Hamming, se logra la anulación del lóbulo secundario a 45.5° en sólo 5 iteraciones.

5.3.6 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A -45.5° CON PERCEPTRÓN MULTICAPA

Las figuras 5.22, 5.23, 5.24 y 5.25 muestran los patrones de radiación modificados para 5, 10, 12 y 25 iteraciones.

Observando cuidadosamente estas figuras, nos damos cuenta que al inicializar el algoritmo perceptrón multicapa con los coeficientes del filtro Hamming, es posible insertar un nulo en -45.5° cuando el proceso toma desde 5 iteraciones. Las ventanas restantes logran el mismo propósito desde la iteración número 10, existiendo como excepción la ventana del filtro 2 pasa bajas, el cual logra minimizar el lóbulo secundario pero nunca llega a anularlo.

De esta sección se puede concluir que la ventana de Hamming es la mejor opción para la eliminación del lóbulo secundario a -45.5° ya que lo logra en tan sólo 5 iteraciones.

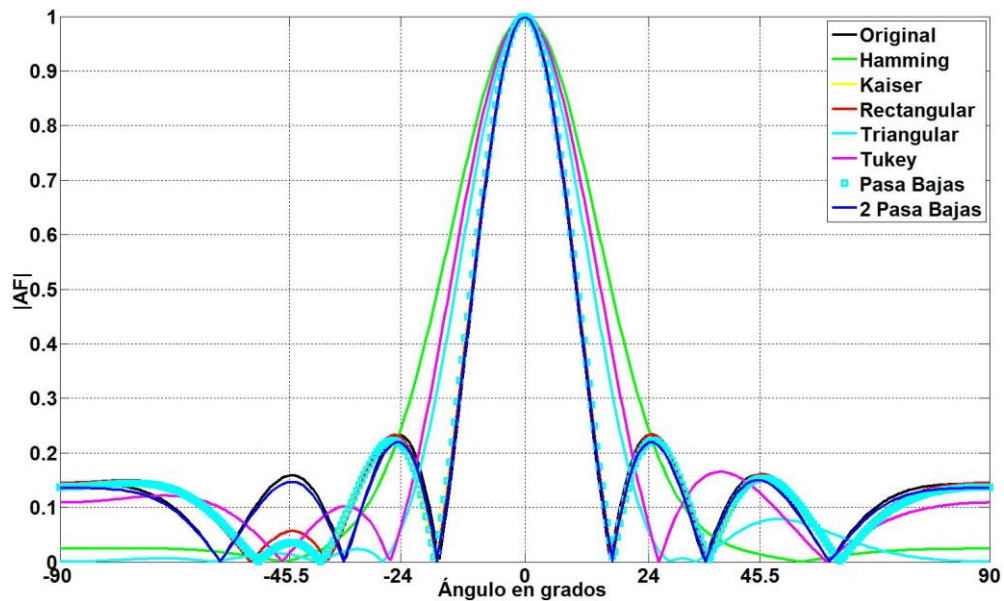


Figura 5.22 Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 5 iteraciones.

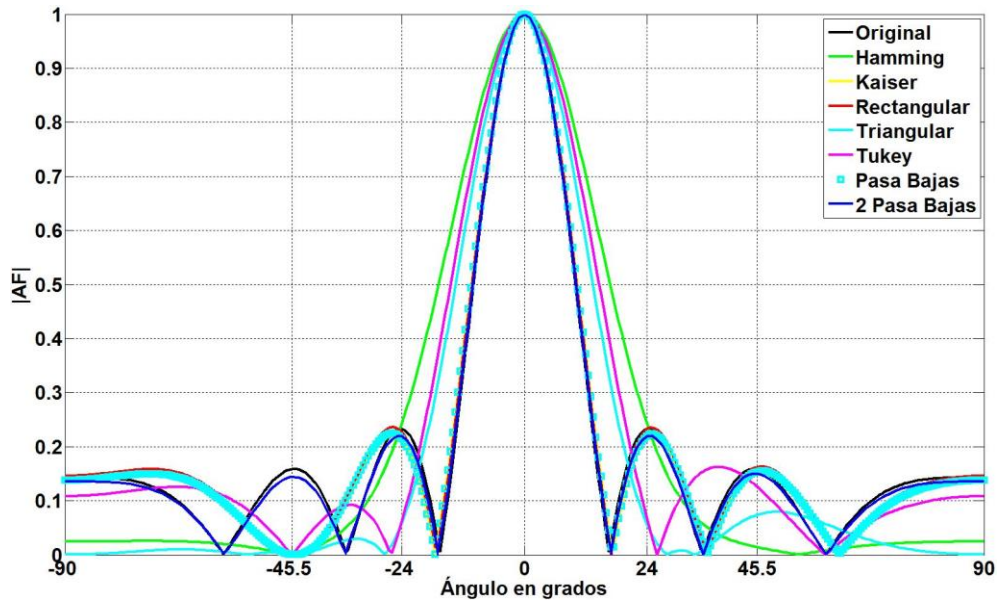


Figura 5.23 Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 10 iteraciones.

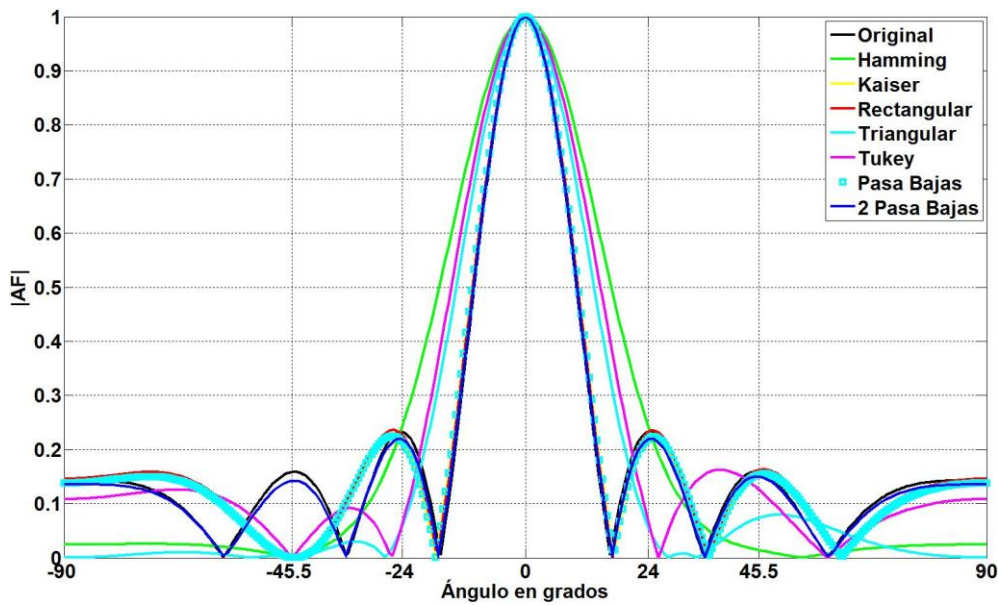


Figura 5.24. Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 12 iteraciones.

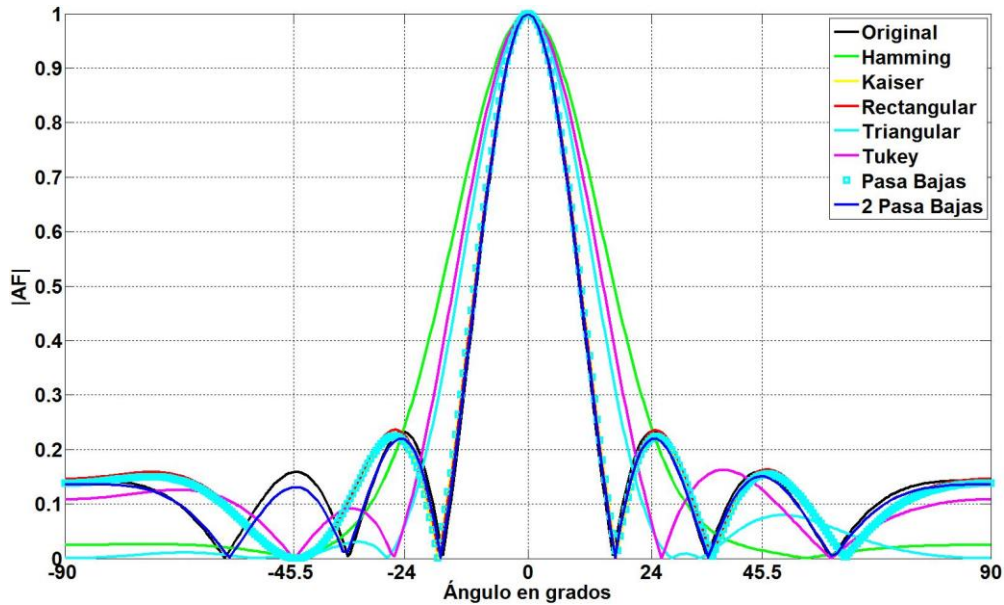


Figura 5.25. Patrón de radiación modificado con PMNN en -45.5° a 25 iteraciones.

5.3.7 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 24° CON PERCEPTRÓN MULTICAPA

En esta sección se presentan los patrones de radiación modificados cuando se elimina el lóbulo secundario localizado a 24° utilizando diferentes tipos de ventanas para 5, 10, 12 y 25 iteraciones. Las gráficas correspondientes se muestran en las figuras 5.26, 5.27, 5.28 y 5.29, respectivamente.

En la figura 5.26, observamos que el lóbulo secundario localizado a 24° se anula por completo cuando se utilizan los coeficientes del filtro triangular para inicializar los parámetros de la red perceptrón multicapa. El ventaneo con Hamming alcanza un cero después de los 24° , siendo éste el resultado que más se le acerca al óptimo, mientras que las ventanas del filtro pasa bajas, 2 pasa bajas y la de unos minimiza muy poco el lóbulo secundario comparado con el comportamiento del patrón de radiación correspondiente a la señal original.

En la figura 5.27, vemos que la ventana del filtro pasa bajas logra introducir el nulo pero después de 10 iteraciones. Para 12 iteraciones, la ventana de unos mejora su resultado pero la del filtro 2FPb continua sin mostrar buenos resultados, esto lo podemos observar en la figura 5.28.

La figura 5.29, para un proceso de 25 iteraciones, muestra que los ventaneos con unos y pasa bajas insertan el nulo en 24° , mientras que las ventanas triangular, Hamming y 2FPb no logran eliminar el lóbulo secundario. Sin embargo, recordando que nuestro objetivo es lograr la inserción de un nulo en 24° en menos iteraciones, podemos concluir que la ventana de Hamming es la mejor para este propósito.

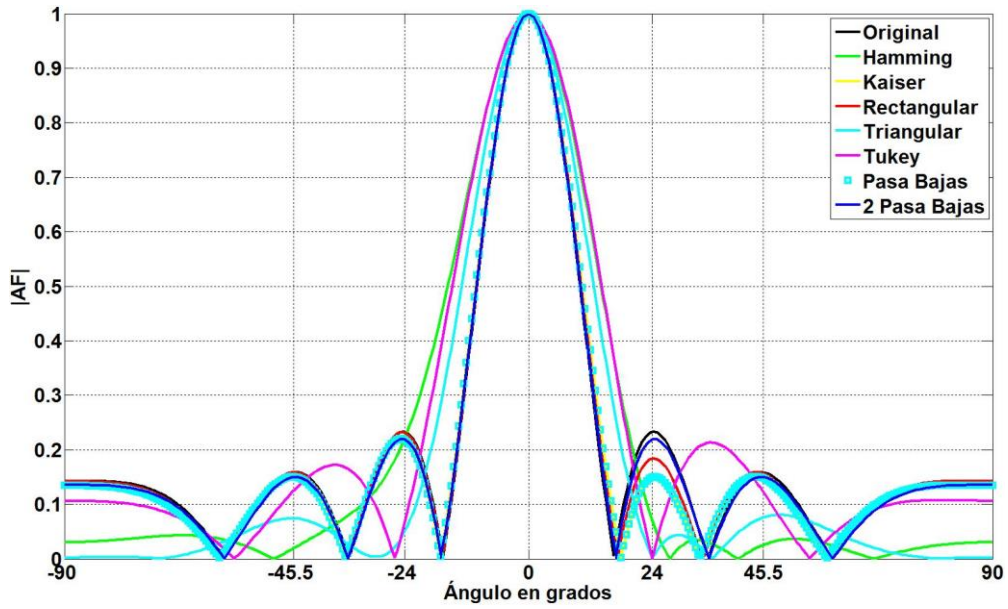


Figura 5.26. Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 5 iteraciones.

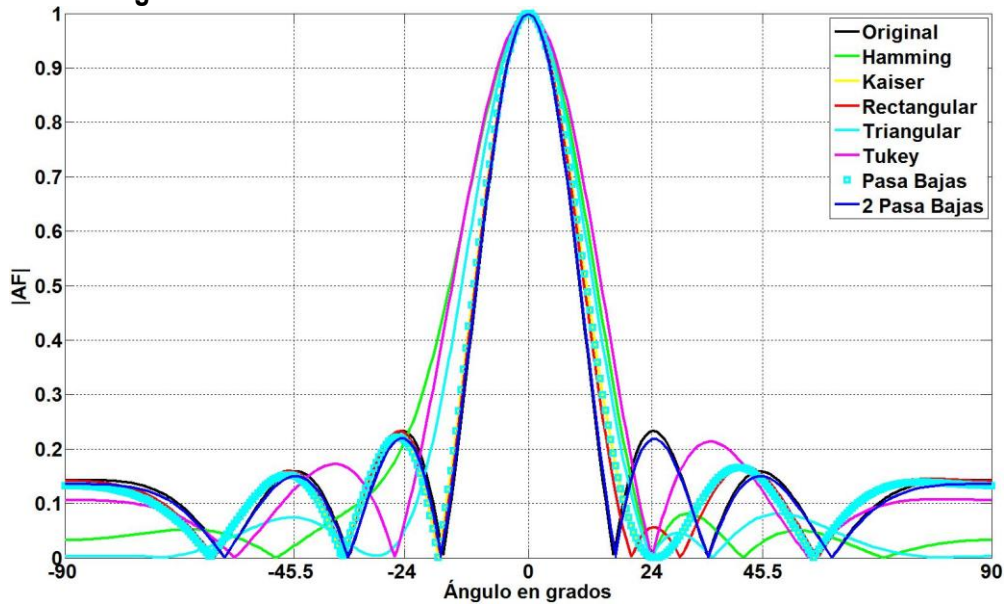


Figura 5.27. Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 10 iteraciones.

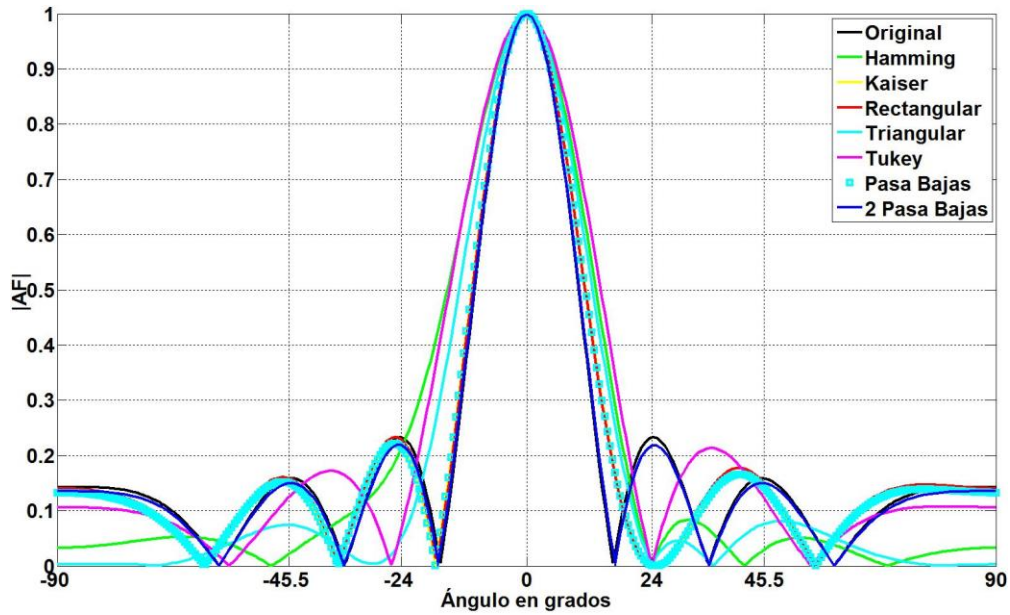


Figura 5.28. Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 12 iteraciones.

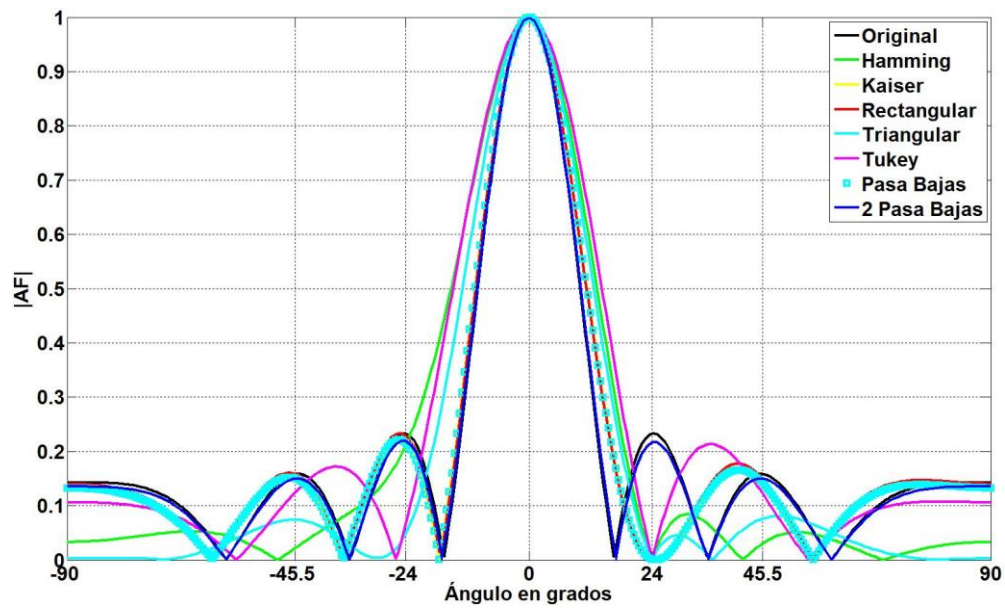


Figura 5.29. Patrón de radiación modificado con PMNN en 24° a 25 iteraciones.

5.3.8 PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A -24° CON PERCEPTRÓN MULTICAPA

En esta sección se presentan los patrones de radiación modificados cuando se elimina el lóbulo secundario localizado a -24° utilizando diferentes tipos de ventanas para 5, 10, 12 y 25 iteraciones. Las gráficas correspondientes se muestran en las figuras 5.30, 5.31, 5.32 y 5.33, respectivamente.

111

En la figura 5.30 se puede observar que los coeficientes derivados de la aplicación del filtro triangular y aplicados en la inicialización de los parámetros del perceptrón multicapa, insertan de manera rápida, en 5 iteraciones, un nulo en -24° , mientras que las demás ventanas no logran este propósito.

Las ventanas rectangular y 2 pasa bajas aún no logran eliminar el lóbulo secundario en 10 iteraciones, lo cual se puede observar en la figura 5.31.

Cuando el proceso toma 12 y 25 iteraciones todas las ventanas han eliminado por completo el lóbulo secundario con excepción del filtro FPb, que aun cuando minimiza el lóbulo y trabaja mejor si el proceso se inicializara con ceros, no cumple con el objetivo.

En este caso, el mejor ventaneo para la eliminación del lóbulo secundario a -24° es el triangular porque lo hace en 5 iteraciones.

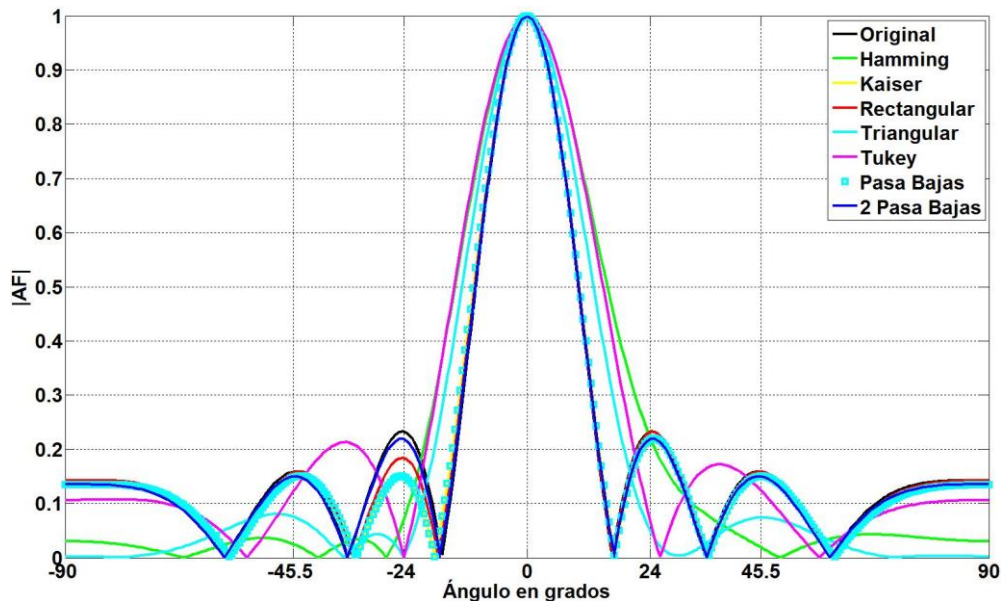


Figura 5.30. Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 5 iteraciones.

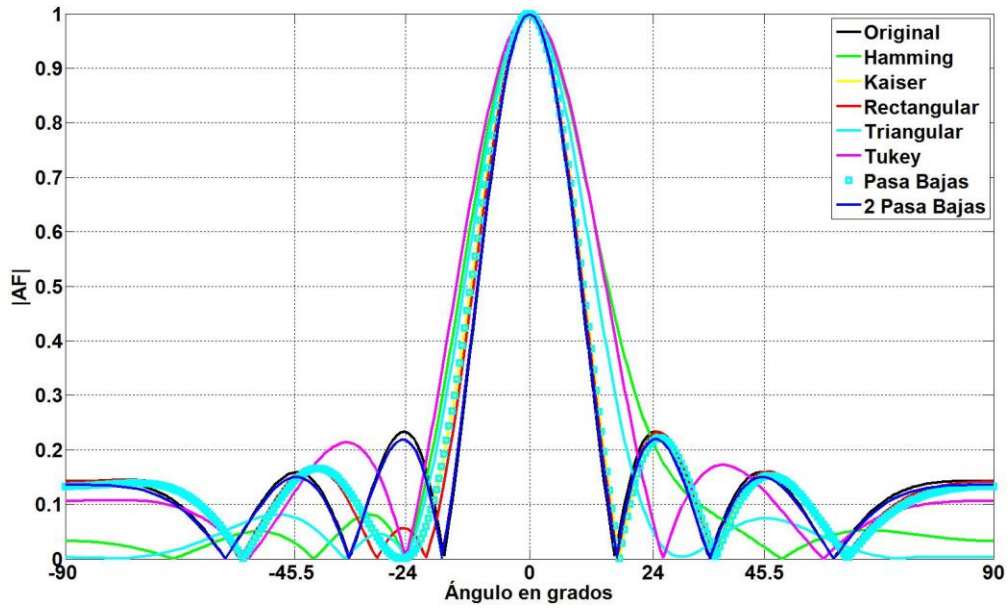


Figura 5.31. Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 10 iteraciones.

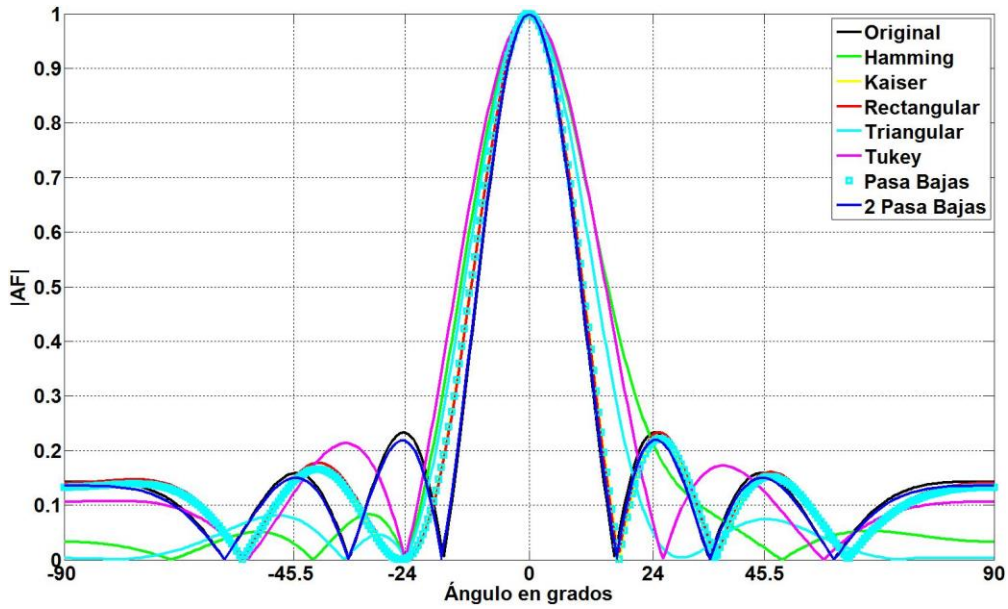


Figura 5.32. Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 12 iteraciones.

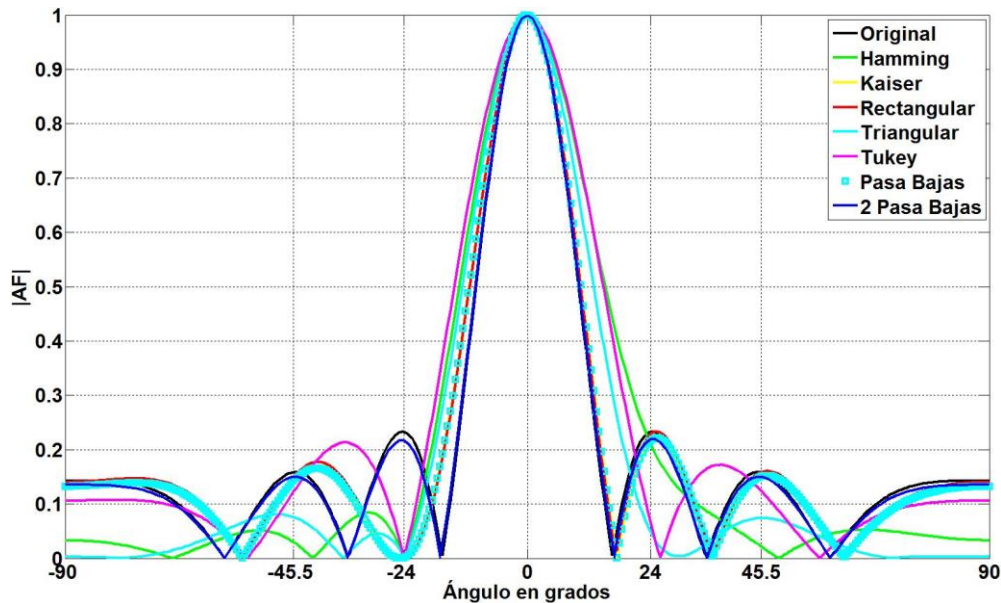


Figura 5.33 Patrón de radiación modificado con PMNN en -24° a 25 iteraciones.

En las secciones anteriores hemos comprobado que la inicialización de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa, con los coeficientes de los diferentes filtros proporciona resultados más rápidos cuando de eliminar lóbulos secundarios se trata. En los apartados siguientes se realizará una comparación de los resultados entre los dos algoritmos para verificar cuál de los dos proporciona los mejores resultados.

5.3.9 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 45.5° CON 5 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 45.5° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPB, con un proceso de 5 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.34, 5.35, 5.36, 5.37, respectivamente.

De la figura 5.34, se observa que al utilizar los coeficientes de la ventana triangular para la inicialización de ambos algoritmos, la PMNN logra la eliminación del lóbulo secundario localizado a 45.5° en sólo 5 iteraciones, mientras que el LMS no.

Al utilizar la ventana rectangular (véase Figura 5.35), una vez más, la red perceptrón multicapa muestra mejores resultados que el algoritmo LMS, aunque no logra la eliminación total del lóbulo secundario, sí logra una disminución considerable de éste. Por otro lado, el LMS en vez de disminuirlo lo amplifica.

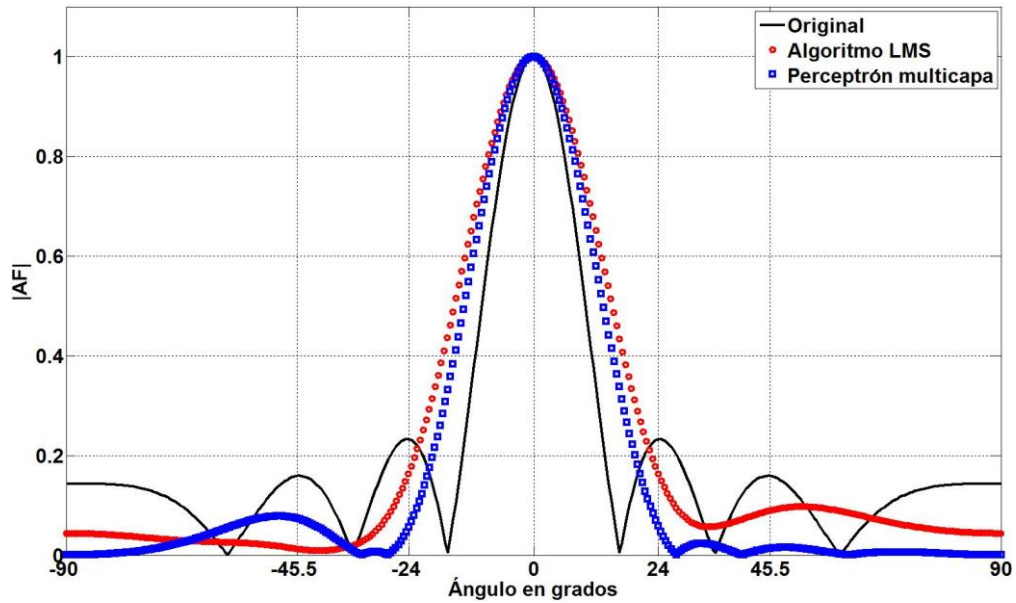


Figura 5.34. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana triangular.

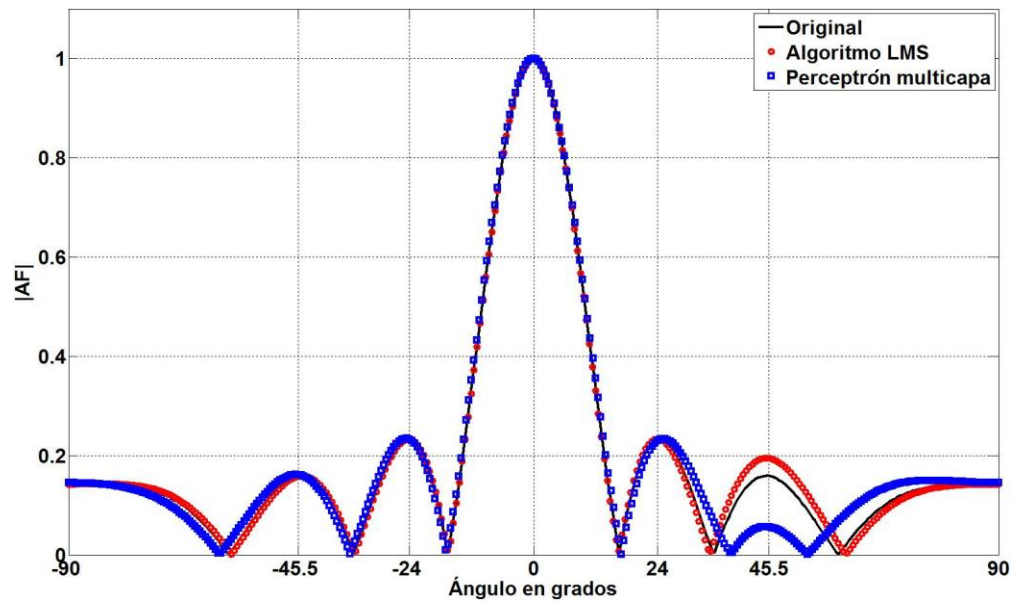


Figura 5.35. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana rectangular.

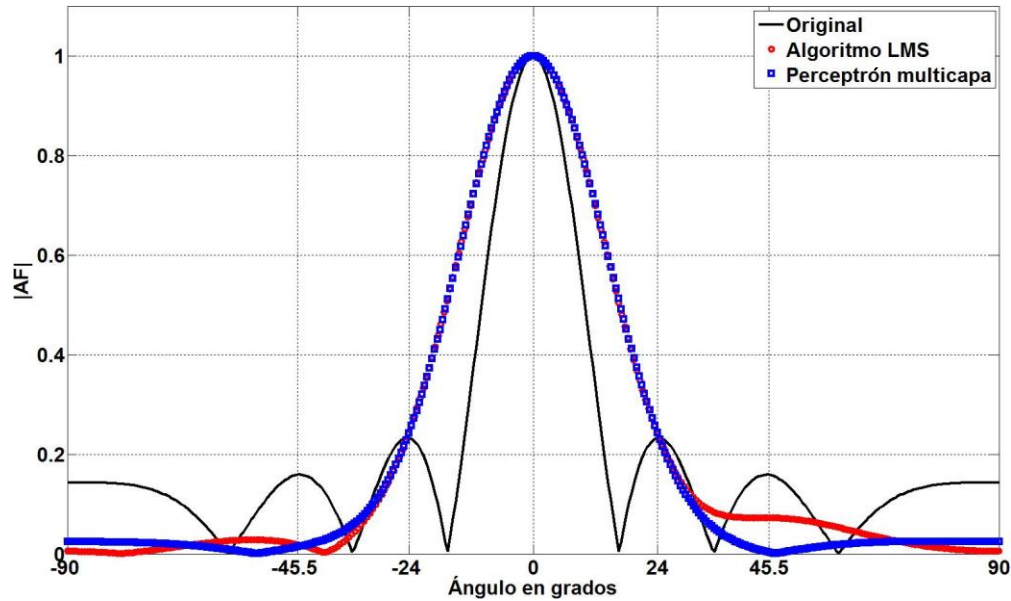


Figura 5.36. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana Hamming.

En la figura 5.36 se muestran los resultados de la aplicación de los coeficientes del filtro Hamming en la inicialización de ambos algoritmos. Se puede observar que el perceptrón multicapa inserta eficientemente el nulo en 45.5° , mientras que el LMS lo minimiza el lóbulo secundario pero no logra eliminarlo.

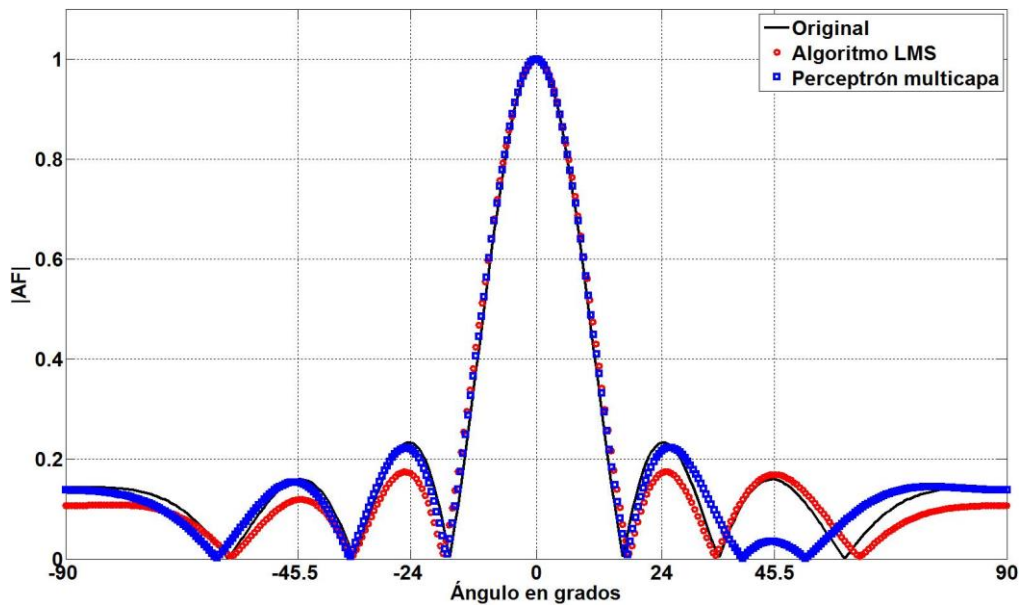


Figura 5.37. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 5 iteraciones con ventana FPb.

De la figura 5.37 se puede observar que utilizando el ventaneo FPb, la red perceptrón multicapa disminuye el lóbulo secundario pero no logra eliminarlo, sin embargo, el algoritmo LMS no muestra una mejoría, ya que sigue el mismo comportamiento que el patrón original.

5.3.10 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 45.5° CON 7 ITERACIONES

116

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 45.5° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 7 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.38, 5.39, 5.40, 5.41, respectivamente.

De estas figuras podemos observar que para 7 iteraciones y sin importar la ventana utilizada, la red perceptrón multicapa sí logra insertar el nulo, mientras que el LMS, en casi todos los casos, amplifica el lóbulo en lugar de disminuirlo.

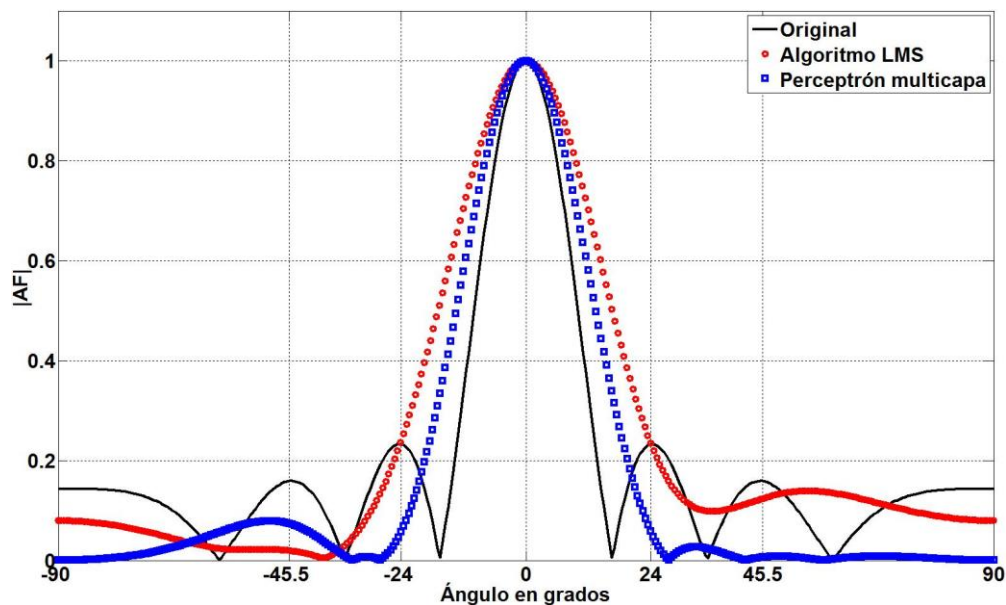


Figura 5.38. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana triangular.

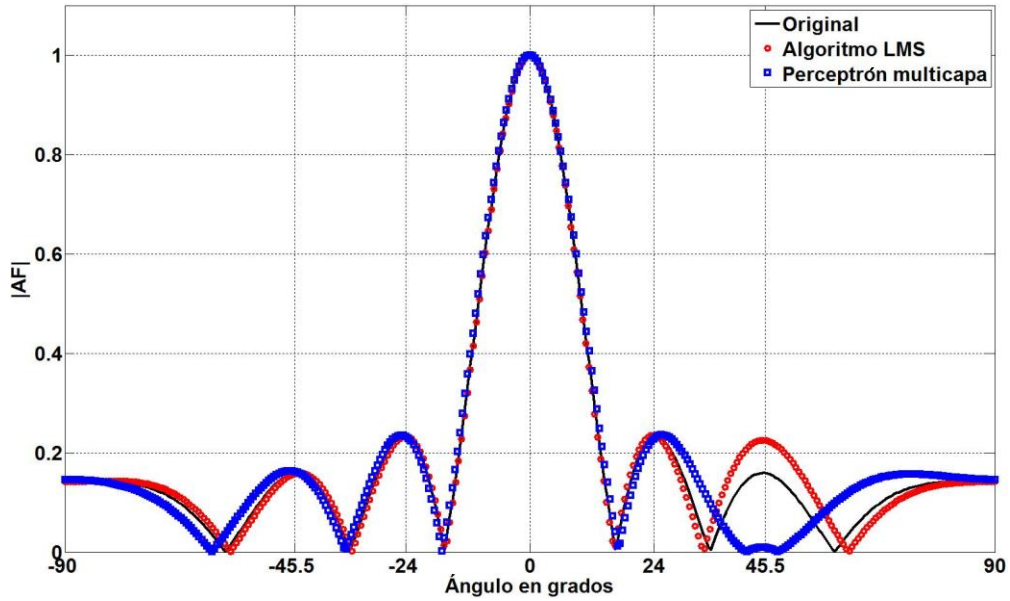


Figura 5.39. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana rectangular.

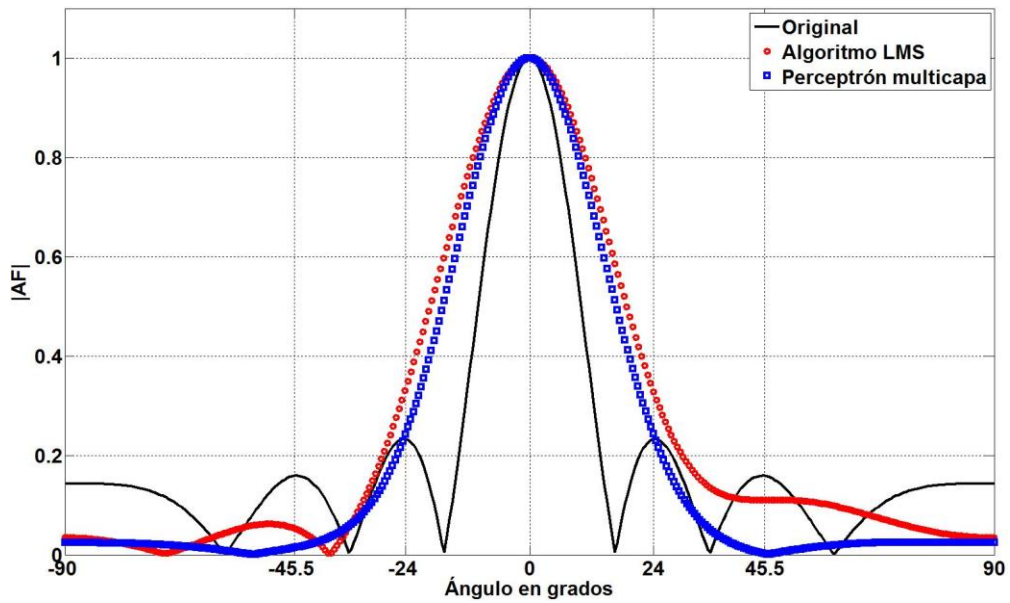


Figura 5.40. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana Hamming.

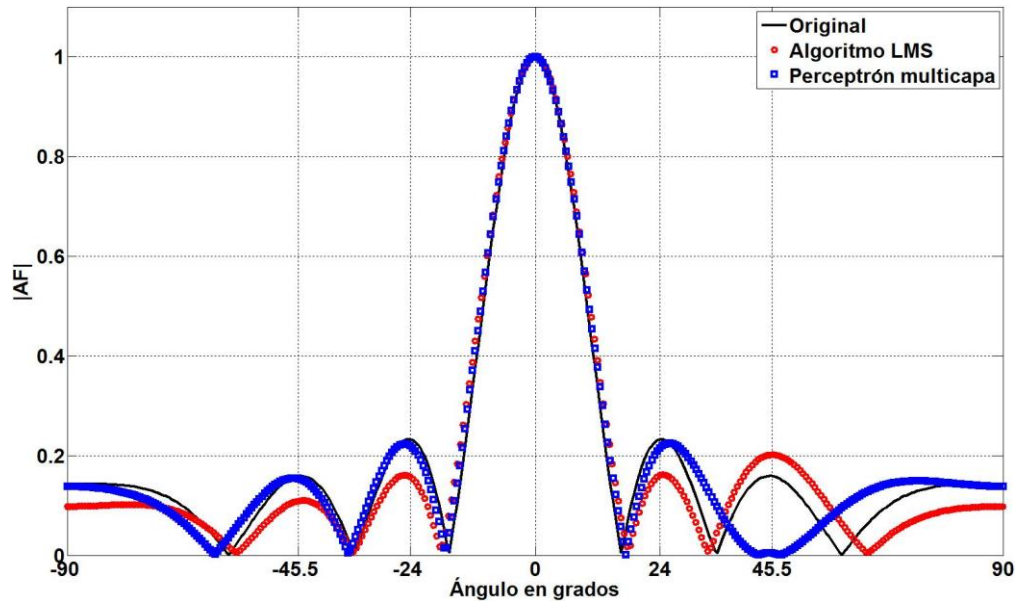


Figura 5.41. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 7 iteraciones con ventana FPb.

5.3.11 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 45.5° CON 9 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 45.5° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 9 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.42, 5.43, 5.44, 5.45, respectivamente.

En todas las figuras se puede observar que el algoritmo LMS no muestra buenos resultados al tratar de eliminar el lóbulo secundario localizado a 45.5° , en un proceso que toma 9 iteraciones, sin importar el filtro utilizado para generar los coeficientes que sirven para su inicialización. Existen casos en los que el LMS amplifica el lóbulo secundario en vez de minimizarlo (ver figuras 5.43 y 5.45).

La red neuronal perceptrón multicapa, por otro lado, sigue mostrando que no importa el ventaneo que se utilice, sigue eliminando el lóbulo secundario localizado a 45.5° .

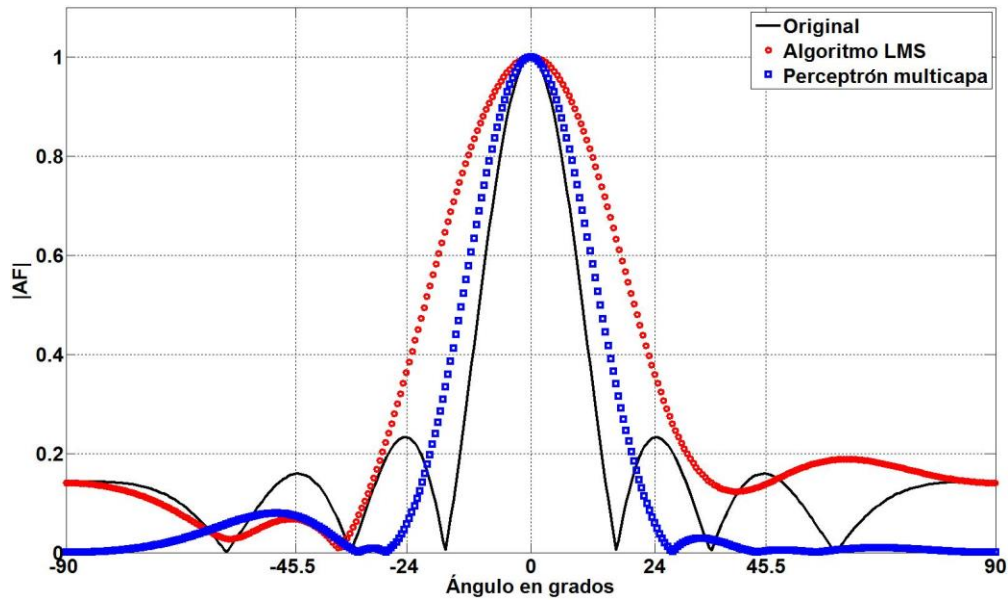


Figura 5.42. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana triangular.

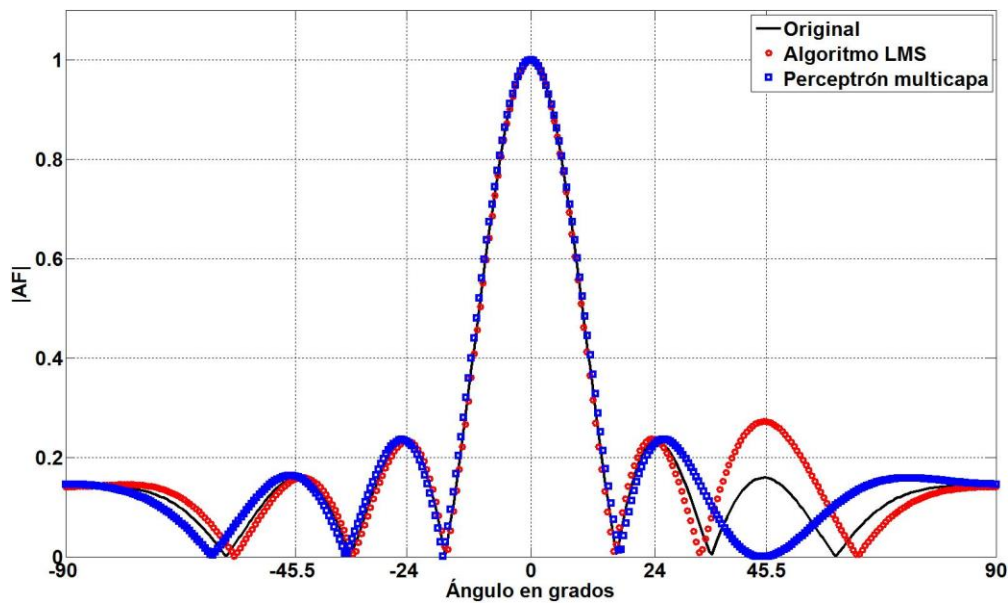


Figura 5.43. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana rectangular.

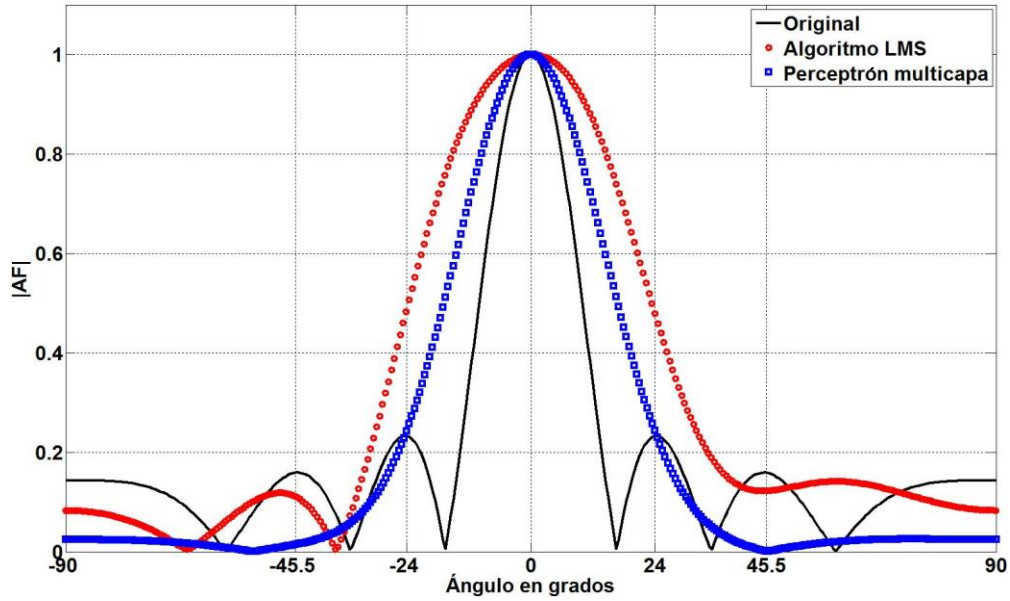


Figura 5.44. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana Hamming.

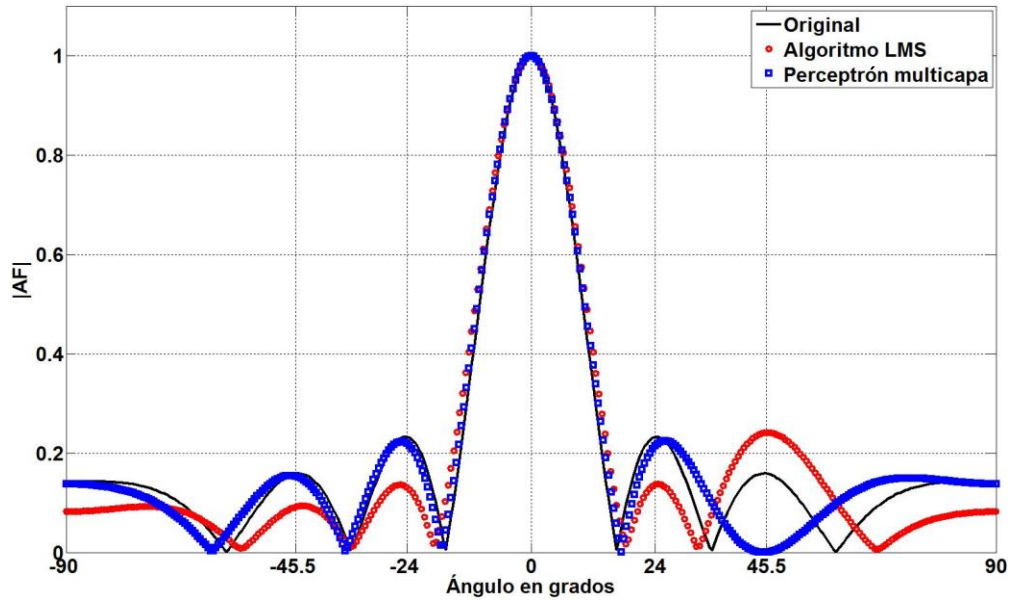


Figura 5.45. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 9 iteraciones con ventana FPB.

5.3.12 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 45.5° CON 12 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 45.5° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 12 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.46, 5.47, 5.48, 5.49, respectivamente.

121

En todas las gráficas se observa que la red perceptrón multicapa es consecuente en su comportamiento conforme se incrementa el número de iteraciones que toma el proceso, que para este caso es de 12.

El LMS, aún para 12 iteraciones, no logra cumplir con uno de los objetivos que es el de eliminar el lóbulo secundario localizado a 45.5° y por supuesto que tampoco cumple con el propósito de lograrlo en pocas iteraciones.

De las secciones anteriores podemos concluir que el algoritmo perceptrón multicapa muestra un mejor comportamiento que el LMS para la eliminación del lóbulo secundario localizado a 45.5° . Además, este resultado se logra en un proceso de 5 iteraciones cuando se utilizan los coeficientes del filtro triangular para la inicialización de los parámetros del perceptrón multicapa.

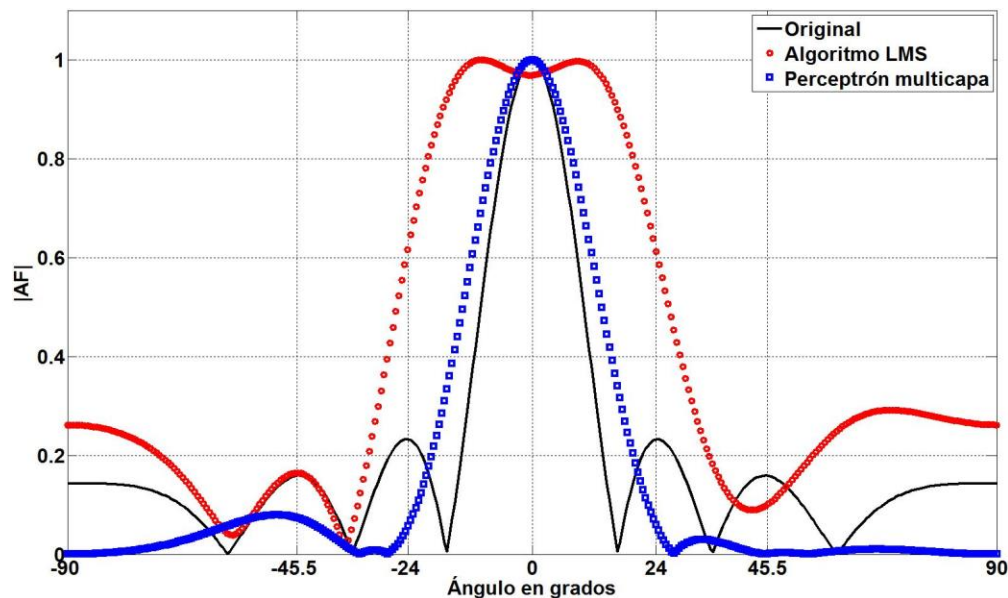


Figura 5.46. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana triangular.

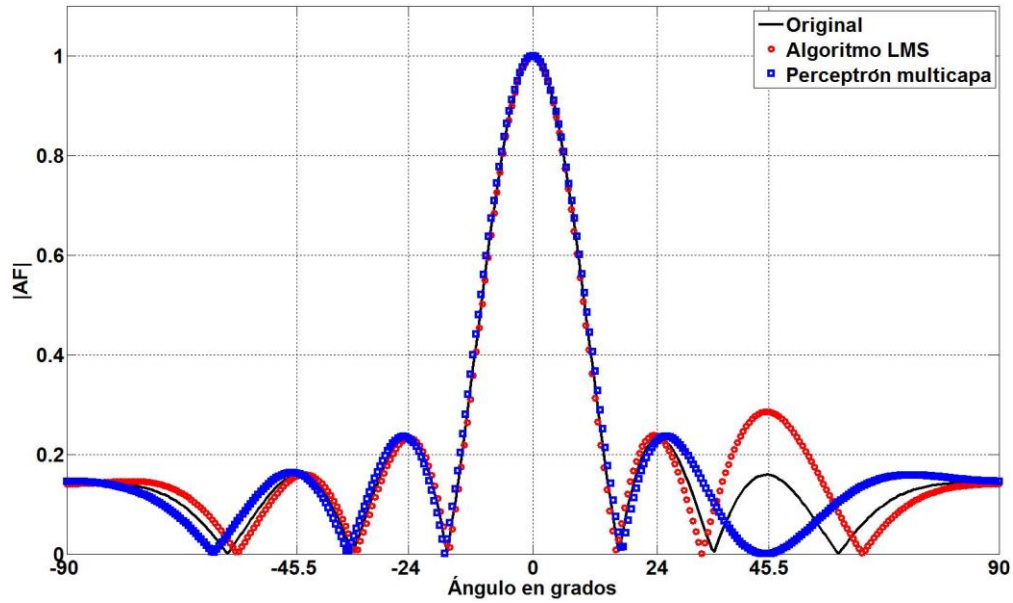


Figura 5.47. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana rectangular.

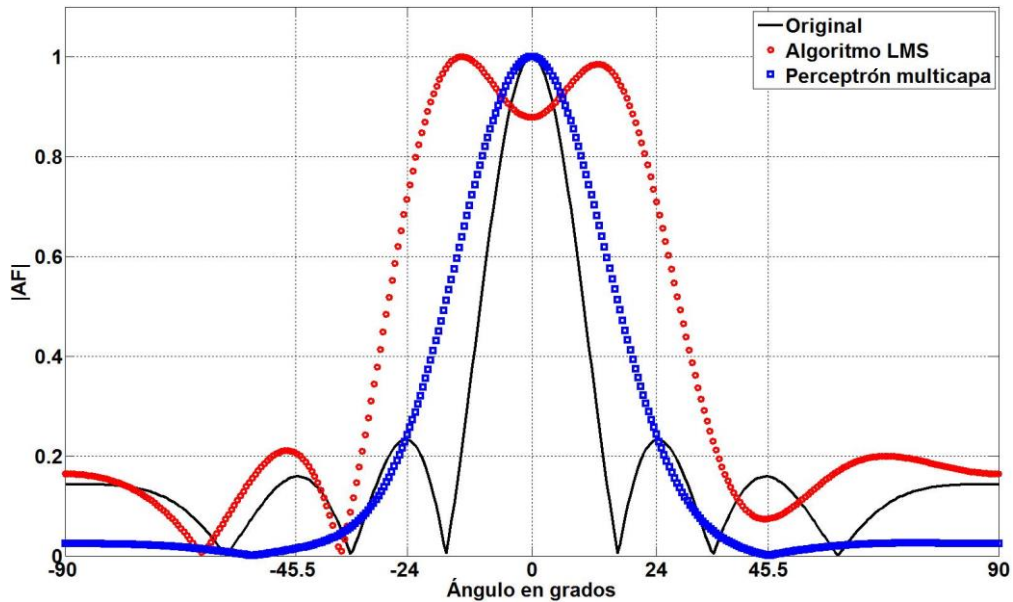


Figura 5.48. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana Hamming.

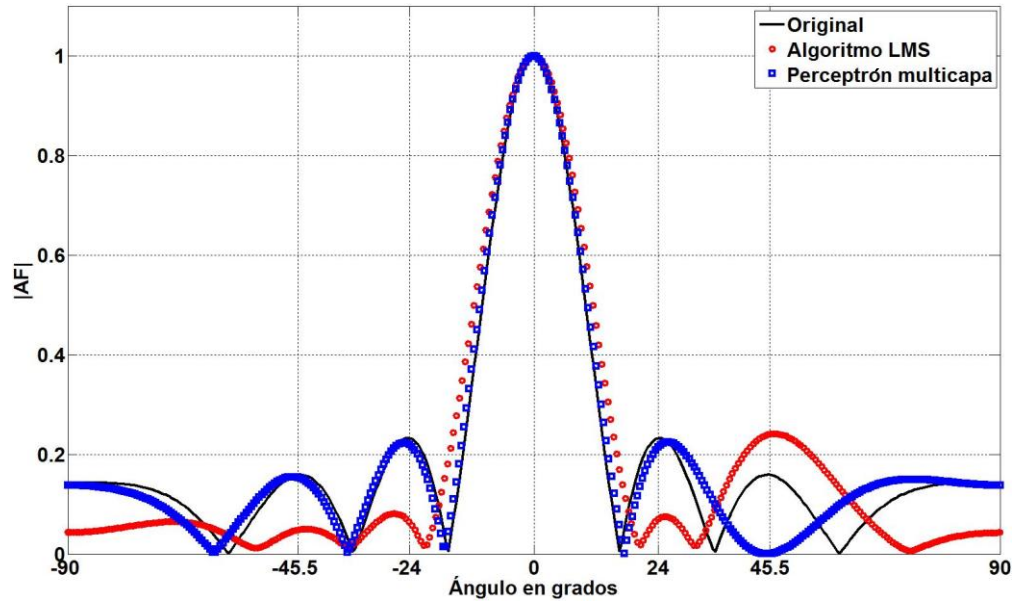


Figura 5.49. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 45.5° a 12 iteraciones con ventana FPb.

Una vez que se realizaron los experimentos para procesos de 5, 7, 9 y 12 iteraciones para la eliminación del lóbulo secundario localizado a 45.5° , en las siguientes secciones se mostrarán los resultados de las pruebas realizadas para la eliminación del lóbulo secundario a 24° , utilizando las mismas ventanas para la inicialización de los parámetros de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa.

5.3.13 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 24° CON 5 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 24° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 5 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.50, 5.51, 5.52, 5.53, respectivamente.

En la figura 5.50 se observa que se logra insertar el nulo a 24° utilizando los coeficientes del filtro triangular para inicializar los parámetros de la red neuronal perceptrón multicapa. El LMS no logra este objetivo.

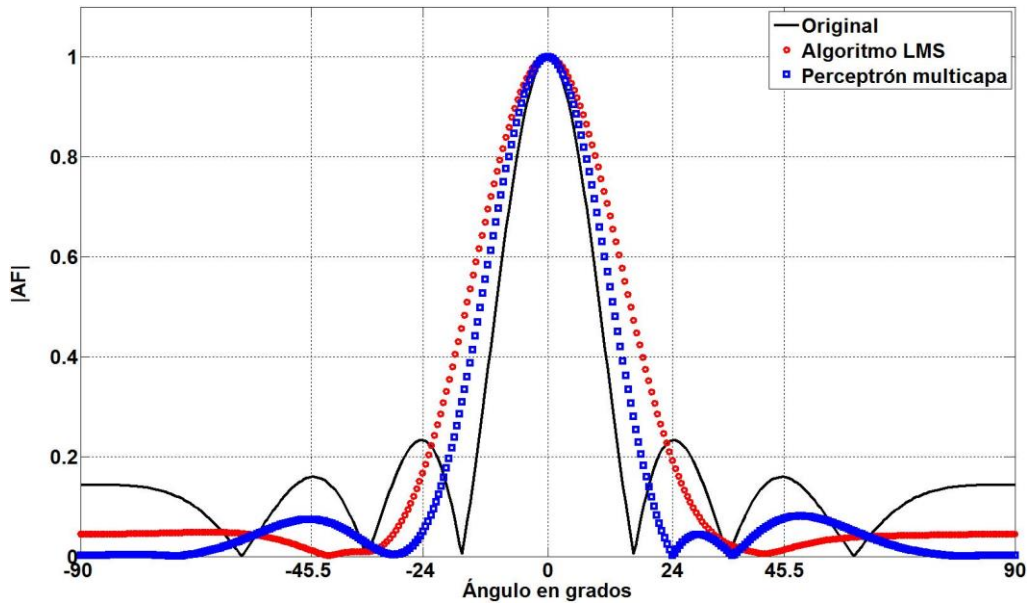


Figura 5.50. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana triangular.

En la figura 5.51 observamos que con la ventana rectangular ni el LMS ni la red perceptrón multicapa pueden eliminar el lóbulo secundario. Para este caso, el LMS logra minimizar aún más el lóbulo que la PMNN.

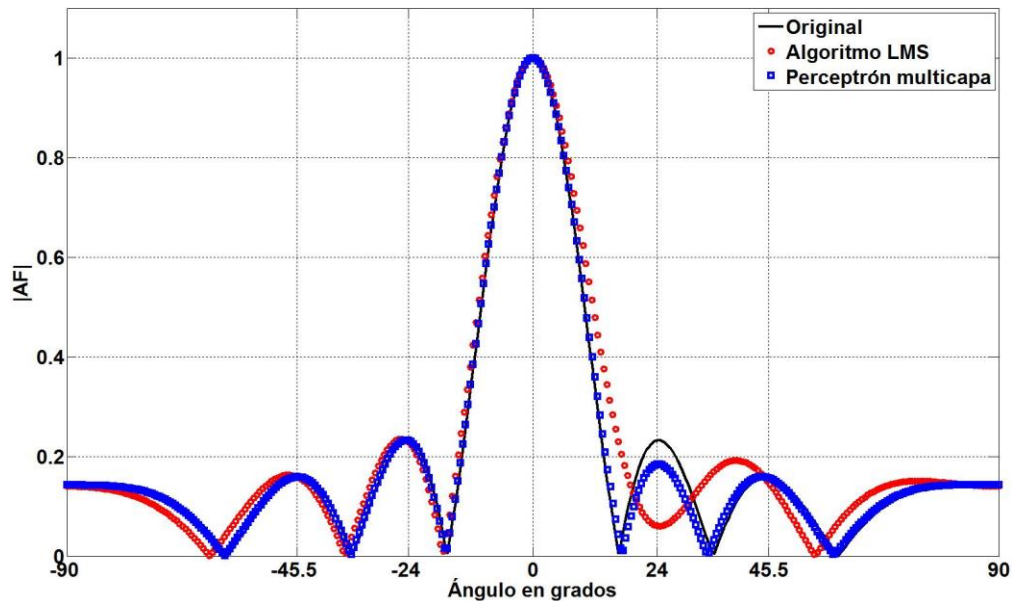


Figura 5.51 Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana rectangular.

Utilizando la ventana de Hamming (véase figura 5.52), el perceptrón multicapa logra insertar el nulo a 24°, por el contrario del LMS que no puede minimizar el lóbulo secundario.

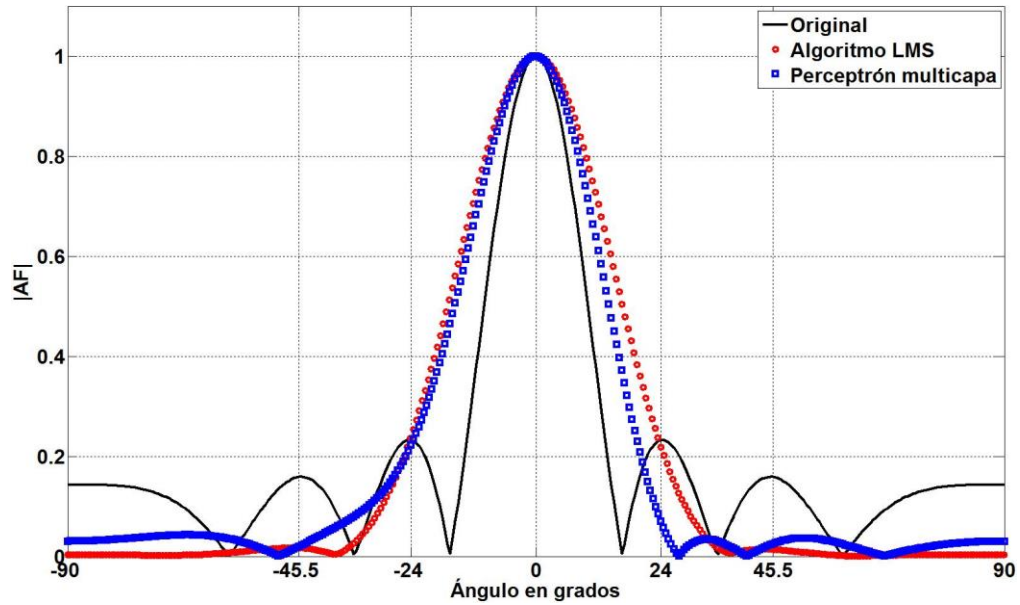


Figura 5.52. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana Hamming.

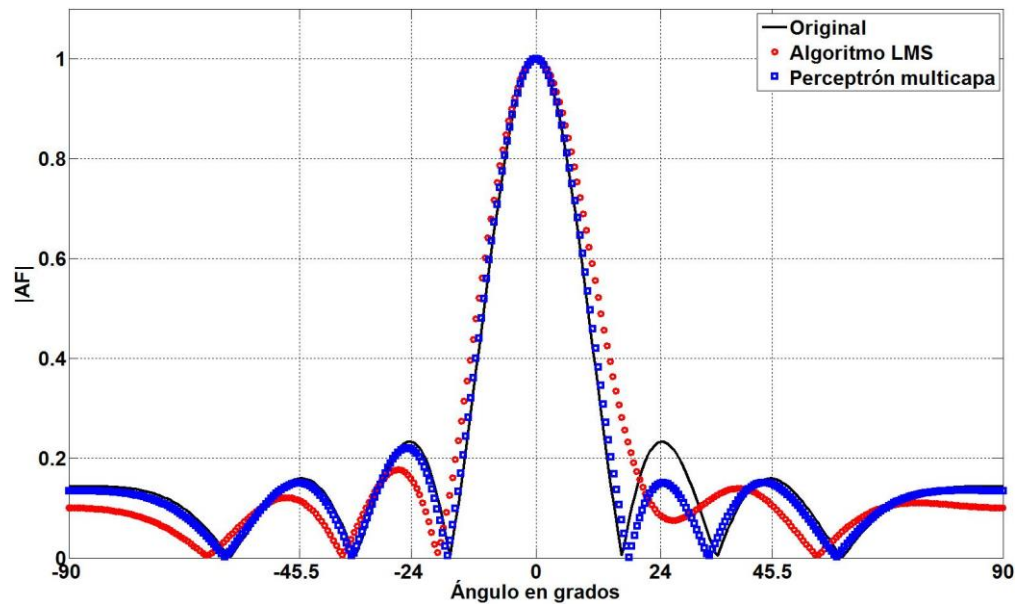


Figura 5.53. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 5 iteraciones con ventana FPb.

En la figura 5.53 se observa que con la ventana FPb, el perceptrón multicapa minimiza el lóbulo secundario pero no puede eliminarlo. Mismo comportamiento que muestra el LMS.

De las gráficas anteriores podemos concluir que el perceptrón multicapa elimina el lóbulo secundario a 24° en sólo 5 iteraciones cuando utiliza los coeficientes de los filtros triangular y Hamming para la inicialización de sus parámetros.

5.3.14 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 24° CON 7 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 24° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 7 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.54, 5.55, 5.56, 5.57, respectivamente.

Las figuras 5.54 y 5.56 muestran que con las ventanas triangular y Hamming, la red neuronal perceptrón multicapa logra la eliminación del lóbulo secundario localizado a 24° , mientras que con las ventanas rectangular y pasa bajas con ganancia (véanse figuras 5.55 y 5.57) solo logra minimizar el lóbulo pero nunca logra eliminarlo. Por otro lado, el LMS no cumple con el objetivo de insertar un nulo en 24° ni aún con el uso de los coeficientes de las ventanas propuestas.

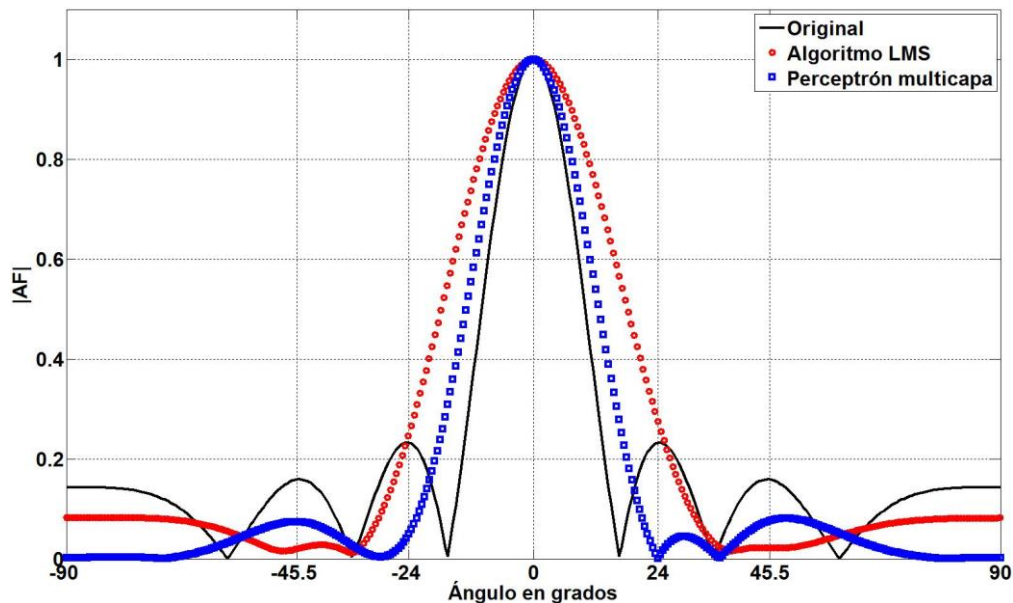


Figura 5.54. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana triangular.

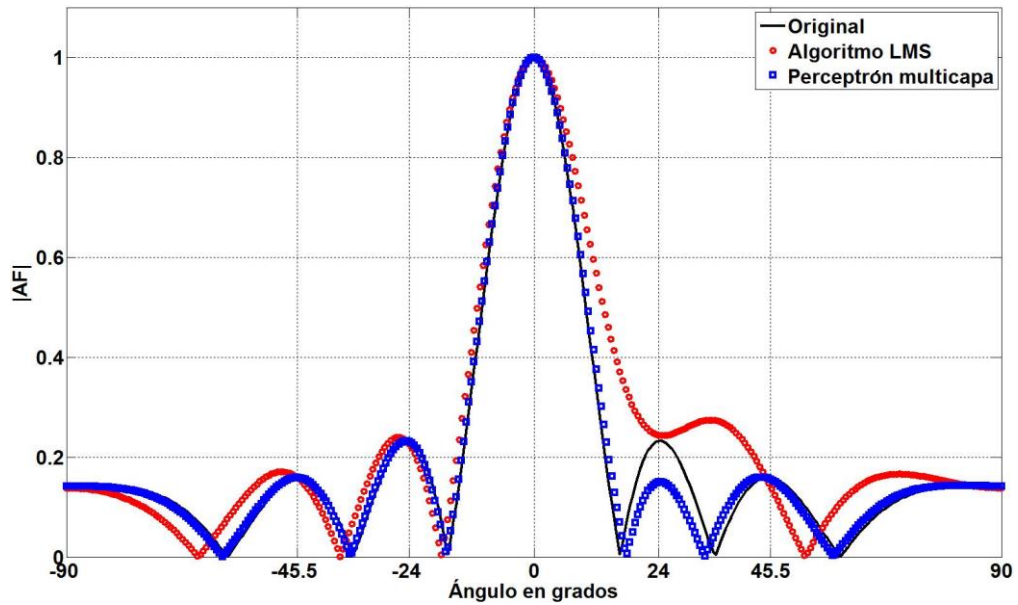


Figura 5.55. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana rectangular.

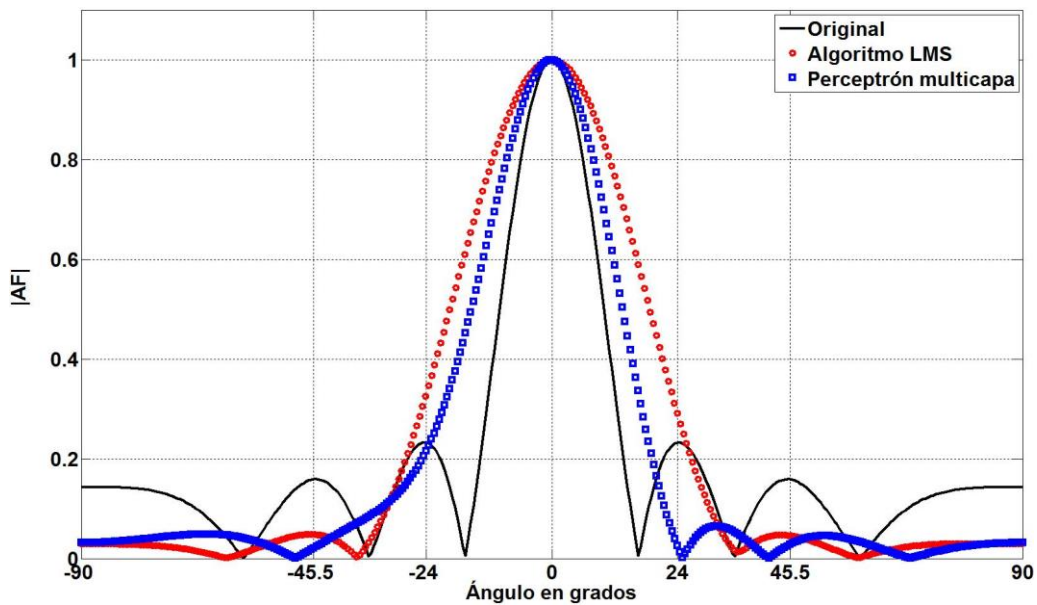


Figura 5.56. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana Hamming.

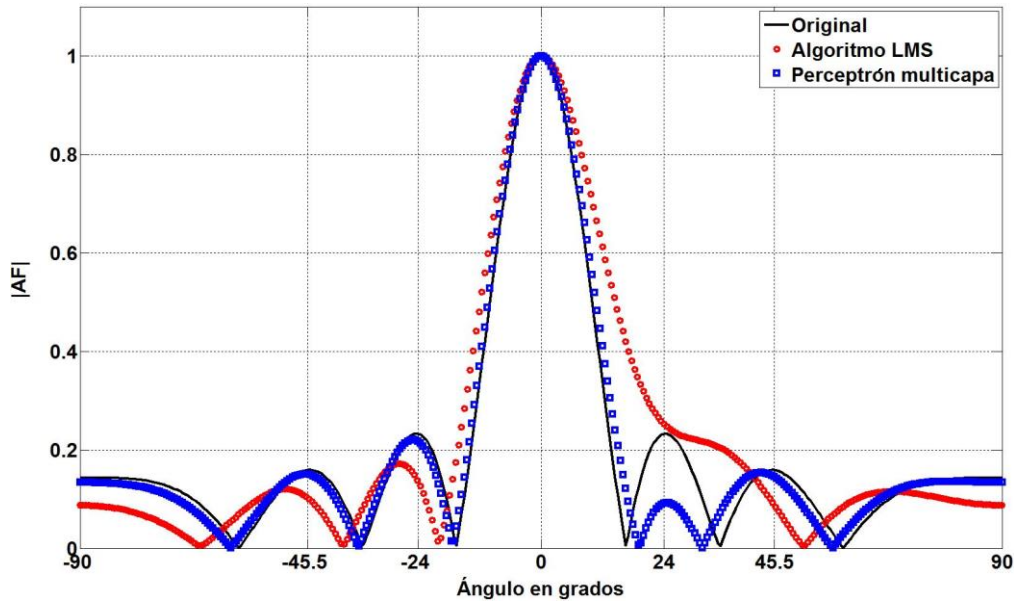


Figura 5.57. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 7 iteraciones con ventana FPb.

5.3.15 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 24° CON 9 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 24° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 9 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.58, 5.59, 5.60, 5.61, respectivamente.

Para 9 iteraciones, el perceptrón multicapa logra la eliminación del lóbulo secundario localizado a 24° cuando utiliza los coeficientes de las ventanas triangular, Hamming y FPb, lo cual se puede observar en las figuras 5.58, 5.59 y 5.60, respectivamente.

En el caso del algoritmo LMS, en las cuatro gráficas se observa que en ningún momento logra insertar un nulo en 24° , más aún, su comportamiento muestra que en lugar de minimizar el lóbulo, lo va amplificando; de hecho, ensancha el lóbulo principal.

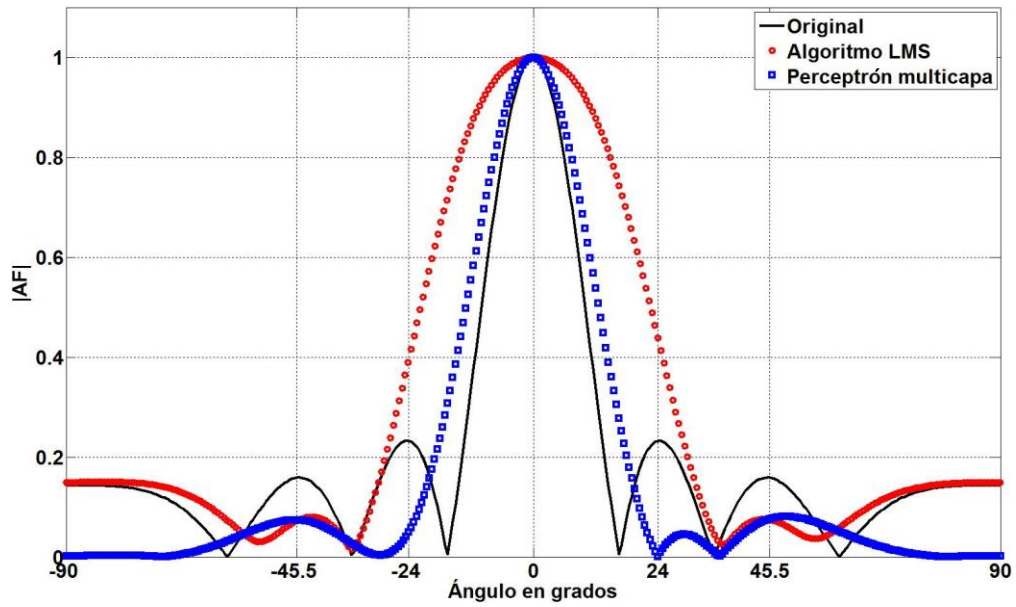


Figura 5.58. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana triangular.

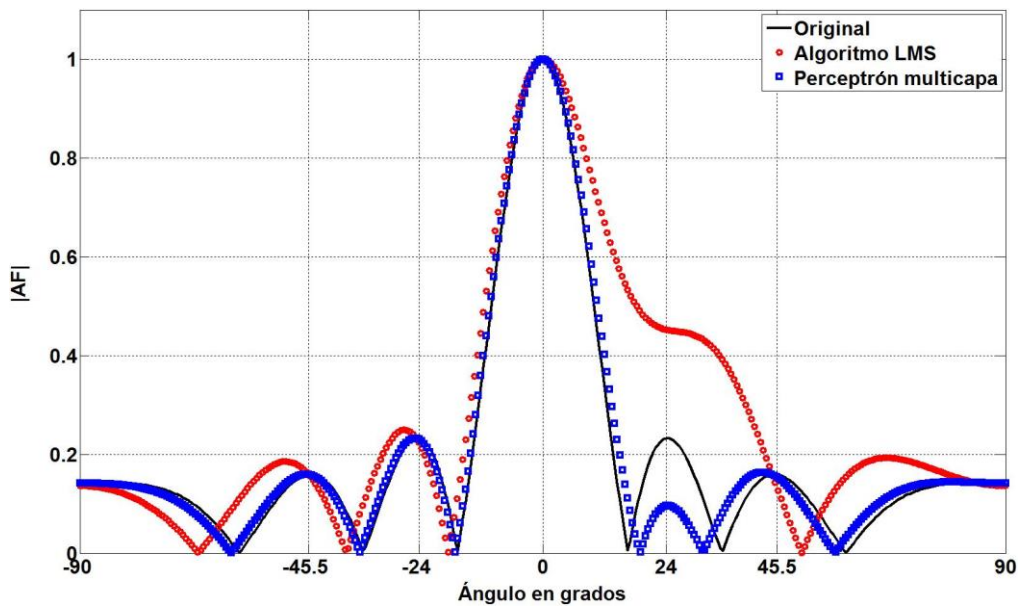


Figura 5.59. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana rectangular.

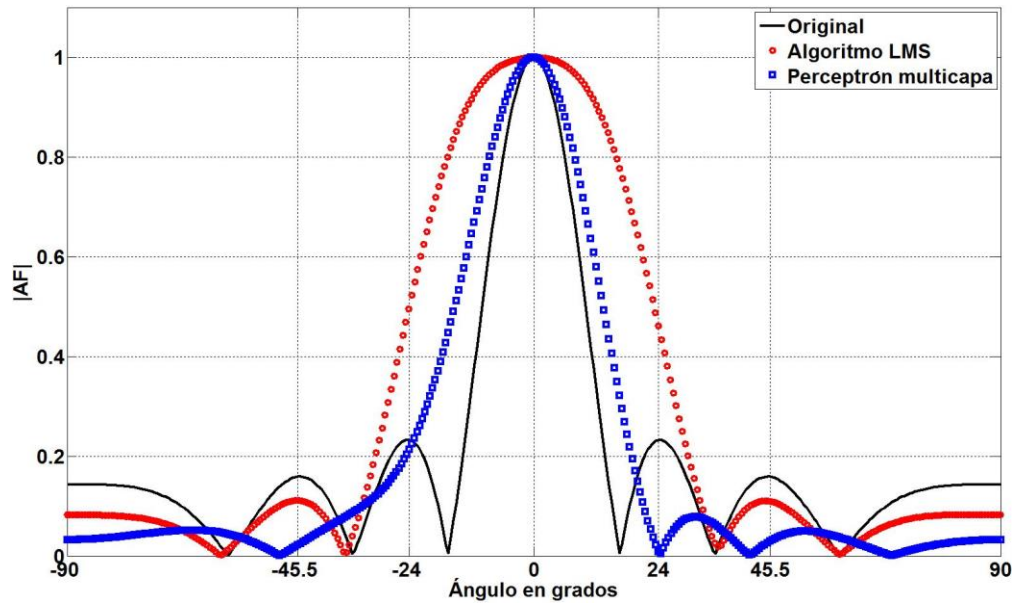


Figura 5.60. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana Hamming.

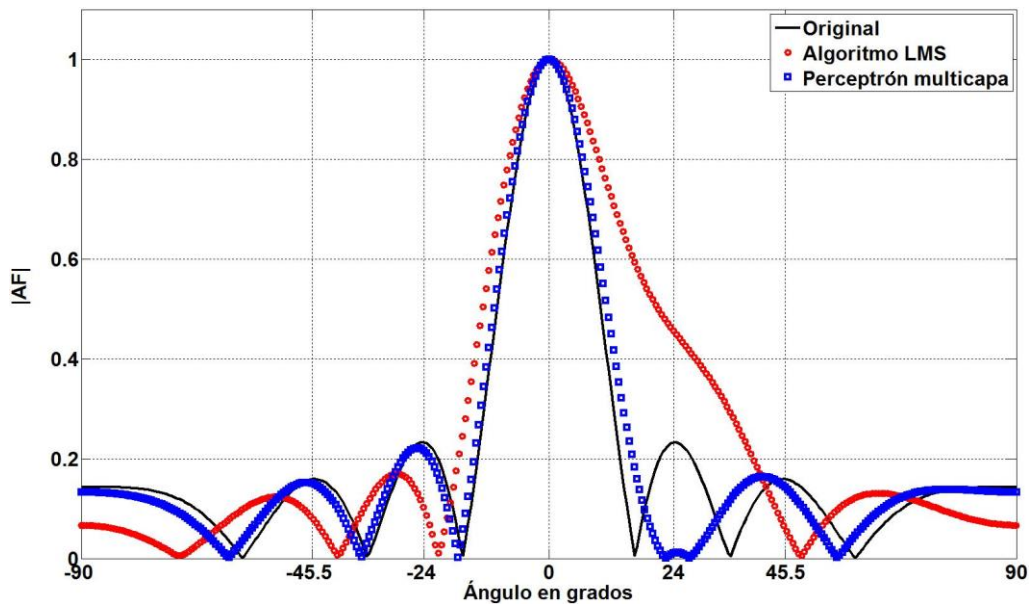


Figura 5.61. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 9 iteraciones con ventana FPb.

5.3.16 COMPARACIÓN DE LOS PATRONES DE RADIACIÓN EN LA ELIMINACIÓN DEL LÓBULO SECUNDARIO A 24° CON 12 ITERACIONES

En esta sección se muestran las gráficas comparativas, del patrón de radiación, entre los dos algoritmos implementados en este trabajo: LMS y perceptrón multicapa, cuando se introduce un nulo en la dirección de 24° y cuando se utilizan las ventanas: triangular, rectangular, Hamming y FPb, con un proceso de 12 iteraciones. Las gráficas correspondientes a las diferentes ventanas se muestran en las figuras 5.62, 5.63, 5.64, 5.65, respectivamente.

131

Se puede observar, en todas las figuras, que el perceptrón multicapa logra la eliminación del lóbulo secundario localizado a 24°, utilizando los coeficientes de los filtros triangular, rectangular, Hamming y FPb para 12 iteraciones.

El comportamiento del algoritmo LMS muestra que nunca logra insertar un nulo en 24° ni siquiera minimizar el lóbulo secundario. Adicionalmente, el patrón de radiación se deforma ya que el lóbulo principal se va ensanchando.

De las secciones anteriores, podemos concluir, primero, que el algoritmo perceptrón multicapa muestra mejores resultados que el LMS porque logra eliminar el lóbulo secundario a 24°; y, segundo, que los coeficientes de las ventanas triangular y Hamming permiten la inserción del nulo en sólo 5 iteraciones.

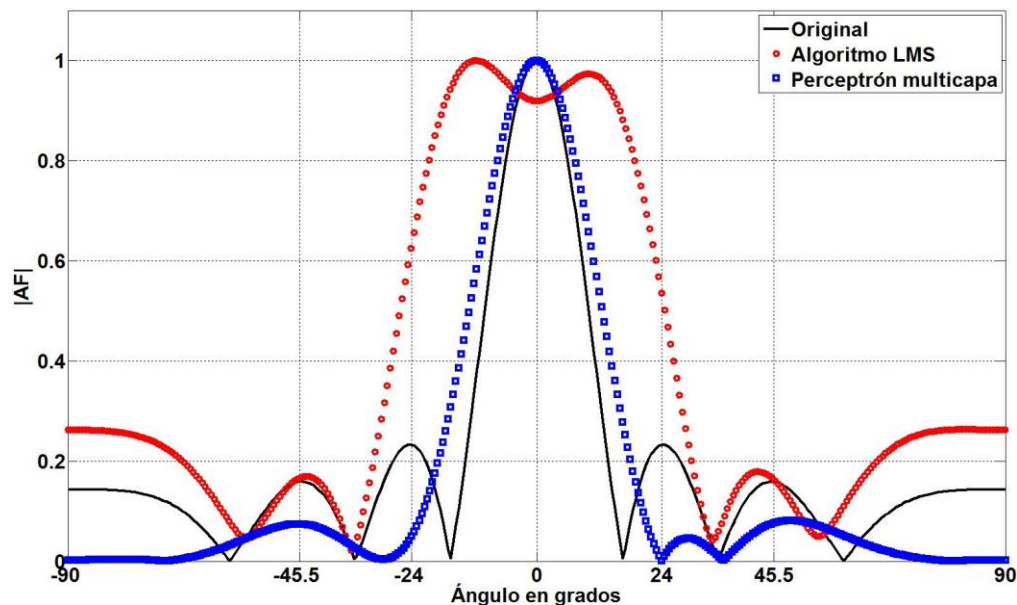


Figura 5.62. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana triangular.

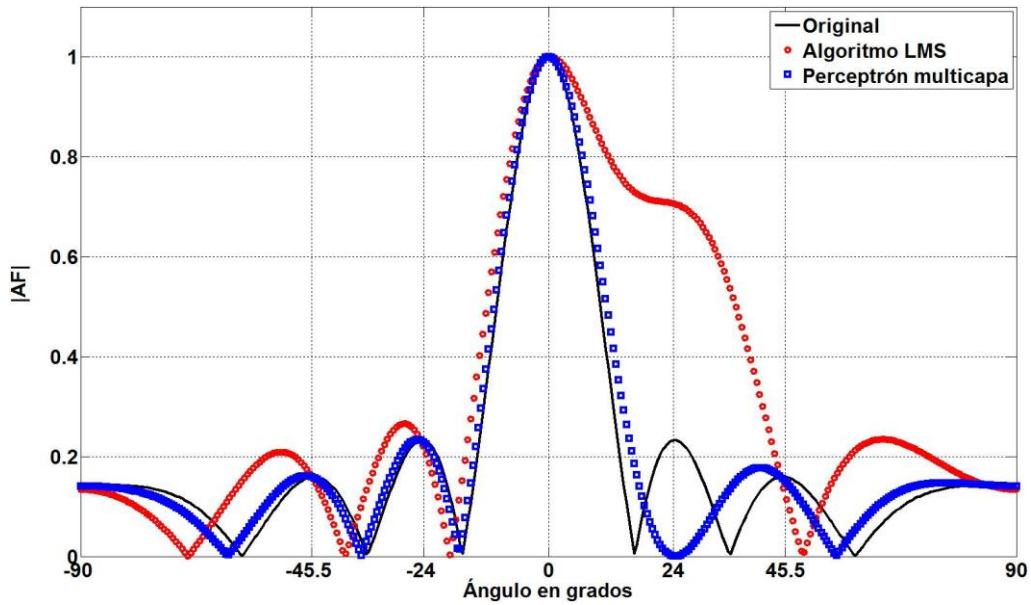


Figura 5.63. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana rectangular.

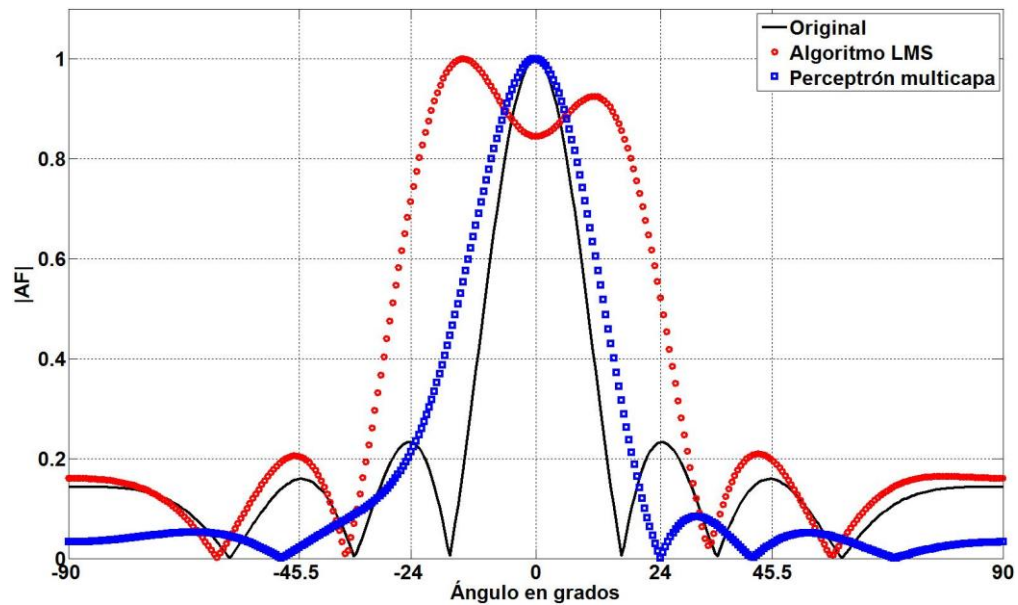


Figura 5.64. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana Hamming.

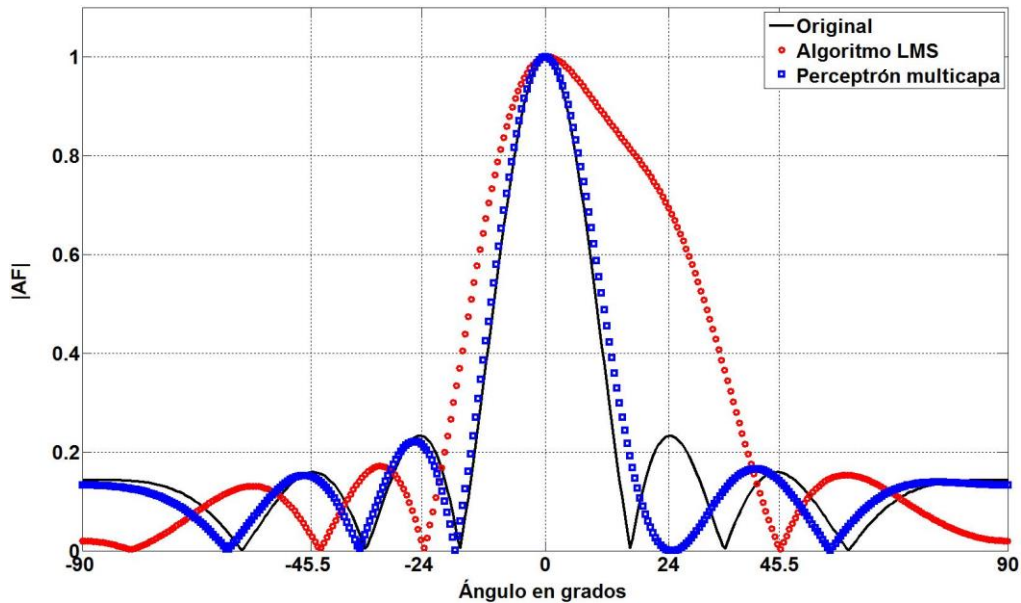


Figura 5.65. Comparación del patrón de radiación modificado con LMS y PMNN en 24° a 12 iteraciones con ventana FPb.

5.4 BAM ALFA-BETA

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar la memoria asociativa bidireccional Alfa-Beta al problema de eliminar lóbulos secundarios.

Para la construcción de la BAM se utilizaron como patrones de entrada los ángulos en donde se desea exista un nulo. Como patrones de salida se tomaron los valores de los pesos que, sustituidos en la ecuación del factor de arreglo, insertan un nulo en ese ángulo. Estos valores se presentan en el Apéndice A y corresponden a los parámetros óptimos que se obtuvieron de la aplicación de los algoritmos anteriores, es decir, la inicialización de los pesos de la perceptrón multicapa utilizando ciertos ventaneos.

Los valores que se utilizaron para el diseño de la memoria fueron obtenidos al aplicar las ventanas FPb y Kaiser para inicializar los parámetros de la red neuronal perceptrón multicapa en un proceso de 15 iteraciones.

Para probar la efectividad de la BAM Alfa-Beta, se le presentaron un conjunto de ángulos con valores desde 5.0 hasta 90.0 con incrementos de 0.25. Cada uno de estos valores fue codificado mediante el código Johnson-Möbius. Los resultados se presentan en la tabla 5.8. En esta tabla tenemos las columnas etiquetadas como Ángulos e Índice. La columna Ángulos contiene los valores de los ángulos desde 5.0 hasta 90.0. La columna Índice indica el valor de la fila que contiene los valores de los pesos en la tabla A.1. Por ejemplo, Ángulo = 5.0 en la tabla 5.8 tiene asociado el Índice = 1, buscando este valor de Índice en la tabla A.1 podemos observar que corresponde a un Ángulo = 5.0 y a los pesos $w_1=0.940448138295702 - 7.69700298594235e-06i$, $w_2=0.973258023742709 - 5.47381395305034e-06i$, $w_3=0.993266370094041 - 2.84280652071419e-06i$, $w_4=0.999990022713631 -$

$1.55339115044565e-22i$, $w_5=0.993266370094041$ + $2.84280652071418e-06i$,
 $w_6=0.973258023742709$ + $5.47381395305034e-06i$, $w_7=0.940448138295702$ + $7.69700298594235e-06i$.
 El significado de estos resultados es el siguiente: el Ángulo = 5.0 de la tabla 5.8 es la dirección en donde queremos insertar un nulo, presentándole este valor a la BAM Alfa-Beta obtenemos como asociación Índice = 1, lo que nos lleva a la tabla A.1, ahí buscamos ese valor y encontramos que tiene asociados los pesos antes presentados y, por tanto, estos pesos son los que nos permitirán insertar el nulo en la dirección de 5°. En otro ejemplo, tenemos que: presentándole Ángulo = 8.0, de la tabla 5.8, a la BAM Alfa-Beta, obtenemos su valor asociado que es Índice = 1, lo que nos remite a los mismos pesos antes mencionados. Podemos observar, en la tabla 5.8, que los ángulos con valores desde 5.0 hasta 9.75 dan como resultado un Índice asociado igual a 1, mientras que en la tabla A.1 vemos que los ángulos desde 5.25 hasta 9.75 no están registrados, pero aun así la BAM Alfa-Beta les asocia un valor de Índice = 1. Un comportamiento parecido se puede observar con todos los valores de ángulos registrados en la tabla 5.8 pero que no aparecen en la tabla A.1. El valor de Índice que obtendrán estos valores es el correspondiente al valor anterior que sí está registrado. Los resultados obtenidos son los mismos al utilizar las tablas A.2, a.3 y A.4.

Este procedimiento también puede ser utilizado en los arreglos fijos empleados en antenas de telefonía celular. Al igual que en los arreglos fijos, en el arreglo del radar se requiere establecer la dirección del nulo para que la memoria asociativa proporcione los pesos correspondientes.

Tabla 5.8 Resultados de la BAM Alfa-Beta

Ángulo	Índice	Ángulo	Índice	Ángulo	Índice	Ángulo	Índice
5.00	1	27	31	49	71	71	79
5.25	1	27.25	32	49.25	72	71.25	79
5.5	1	27.5	33	49.5	73	71.5	79
5.75	1	27.75	34	49.75	74	71.75	79
6.00	1	28	35	50	75	72	79
6.25	1	28.25	35	50.25	75	72.25	79
6.5	1	28.5	35	50.5	75	72.5	79
6.75	1	28.75	35	50.75	75	72.75	79
7.00	1	29	35	51	75	73	79
7.25	1	29.25	35	51.25	75	73.25	79
7.5	1	29.5	35	51.5	75	73.5	79
7.75	1	29.75	35	51.75	75	73.75	79
8.00	1	30	36	52	75	74	79
8.25	1	30.25	36	52.25	75	74.25	79
8.5	1	30.5	36	52.5	75	74.5	79
8.75	1	30.75	36	52.75	75	74.75	79
9.00	1	31	36	53	75	75	80
9.25	1	31.25	36	53.25	75	75.25	80
9.5	1	31.5	36	53.5	75	75.5	80
9.75	1	31.75	36	53.75	75	75.75	80
10.00	2	32	36	54	75	76	80
10.25	2	32.25	36	54.25	75	76.25	80

10.5	2	32.5	36	54.5	75	76.5	80
10.75	2	32.75	36	54.75	75	76.75	80
11	2	33	36	55	76	77	80
11.25	2	33.25	36	55.25	76	77.25	80
11.5	2	33.5	36	55.5	76	77.5	80
11.75	2	33.75	36	55.75	76	77.75	80
12	2	34	36	56	76	78	80
12.25	2	34.25	36	56.25	76	78.25	80
12.5	2	34.5	36	56.5	76	78.5	80
12.75	2	34.75	36	56.75	76	78.75	80
13	2	35	37	57	76	79	80
13.25	2	35.25	37	57.25	76	79.25	80
13.5	2	35.5	37	57.5	76	79.5	80
13.75	2	35.75	37	57.75	76	79.75	80
14	2	36	37	58	76	80	81
14.25	2	36.25	37	58.25	76	80.25	81
14.5	2	36.5	37	58.5	76	80.5	81
14.75	2	36.75	37	58.75	76	80.75	81
15	3	37	37	59	76	81	81
15.25	3	37.25	37	59.25	76	81.25	81
15.5	3	37.5	37	59.5	76	81.5	81
15.75	3	37.75	37	59.75	76	81.75	81
16	3	38	37	60	77	82	81
16.25	3	38.25	37	60.25	77	82.25	81
16.5	3	38.5	37	60.5	77	82.5	81
16.75	3	38.75	37	60.75	77	82.75	81
17	3	39	37	61	77	83	81
17.25	3	39.25	37	61.25	77	83.25	81
17.5	3	39.5	37	61.5	77	83.5	81
17.75	3	39.75	37	61.75	77	83.75	81
18	3	40	38	62	77	84	81
18.25	3	40.25	38	62.25	77	84.25	81
18.5	3	40.5	38	62.5	77	84.5	81
18.75	3	40.75	38	62.75	77	84.75	81
19	3	41	39	63	77	85	82
19.25	3	41.25	40	63.25	77	85.25	83
19.5	3	41.5	41	63.5	77	85.5	83
19.75	3	41.75	42	63.75	77	85.75	83
20	4	42	43	64	77	86	83
20.25	5	42.25	44	64.25	77	86.25	83
20.5	6	42.5	45	64.5	77	86.5	83
20.75	7	42.75	46	64.75	77	86.75	83
21	8	43	47	65	78	87	84

21.25	9	43.25	48	65.25	78	87.25	85
21.5	10	43.5	49	65.5	78	87.5	86
21.75	11	43.75	50	65.75	78	87.75	87
22	12	44	51	66	78	88	88
22.25	13	44.25	52	66.25	78	88.25	89
22.5	14	44.5	53	66.5	78	88.5	90
22.75	15	44.75	54	66.75	78	88.75	91
23	16	45	55	67	78	89	92
23.25	17	45.25	56	67.25	78	89.25	93
23.5	18	45.5	57	67.5	78	89.5	94
23.75	19	45.75	58	67.75	78	89.75	95
24	20	46	59	68	78	90	96
24.25	21	46.25	60	68.25	78		
24.5	22	46.5	61	68.5	78		
24.75	23	46.75	62	68.75	78		
25	24	47	63	69	78		
25.25	25	47.25	64	69.25	78		
25.5	26	47.5	65	69.5	78		
25.75	27	47.75	66	69.75	78		
26	28	48	67	70	79		
26.25	29	48.25	68	70.25	79		
26.5	30	48.5	69	70.5	79		
26.75	31	48.75	70	70.75	79		

5.5 ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD DE ALGORITMOS

Un algoritmo es un conjunto finito de instrucciones precisas para la realización de un cálculo o para resolver un problema [50]. En general, se acepta que un algoritmo provee una solución satisfactoria cuando produce una respuesta correcta y cuando es eficiente.

Una medida de la eficiencia es el tiempo usado por la computadora para resolver un problema utilizando un algoritmo dado. Una segunda medida de eficiencia es la cantidad de memoria requerida para implementar el algoritmo cuando los valores de entrada son de un tamaño específico.

El análisis del tiempo requerido para resolver un problema de un tamaño en particular implica la **complejidad en tiempo** del algoritmo. El análisis de la memoria requerida por la computadora implica la **complejidad en espacio** del algoritmo.

En las siguientes secciones se describe la complejidad de los algoritmos que presentan los algoritmos utilizados para la eliminación de lóbulos secundarios. Al análisis de complejidad de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa es necesario adicionarle la complejidad de los algoritmos de las ventanas aplicadas.

5.5.1 BAM ALFA-BETA

Complejidad en Espacio

Se necesitan una matriz para guardar los p patrones \mathbf{x} . La matriz tendrá dimensiones de $p \times (n+p)$. En la misma matriz se guardan los patrones de entrada y los vectores añadidos tanto del *one-hot* como del *zero-hot*. Dado que $\mathbf{x} \in \{0, 1\}$, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será:

$$\text{Bytes}_x = p(n+p)$$

Se necesita una matriz para guardar los p patrones \mathbf{y} . La matriz tendrá dimensiones de $p \times (m+p)$. En la misma matriz se guardan los patrones de salida y los vectores añadidos tanto del *one-hot* como del *zero-hot*. Dado que $\mathbf{y} \in \{0, 1\}$, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será:

$$\text{Bytes}_y = p(m+p)$$

En la fase de aprendizaje se necesitan 4 matrices. Dos para las memoria autoasociativas Alfa-Beta tipo max, V_x y V_y , y dos para las memorias autoasociativas Alfa-Beta tipo min, Λ_x y Λ_y . V_x y Λ_x tienen dimensiones $(n+p) \times (n+p)$ y V_y y Λ_y tiene dimensiones $(m+p) \times (m+p)$. Dado que estas matrices contienen sólo números enteros positivos, entonces los valores de sus componentes se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será:

$$\text{Bytes}_{V_x \Lambda_x} = 2(n+p)^2$$

$$\text{Bytes}_{V_y \Lambda_y} = 2(m+p)^2$$

Se utiliza el vector en donde se guarda el vector *one-hot* recuperado, cuya dimensión es de p . Dado que las componentes de cualquier vector one-hot toman los valores de 0 y 1, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será

$$\text{Bytes}_{vr} = p$$

El total de bytes requeridos para implementar una BAM Alfa-Beta es:

$$\text{Total} = \text{Bytes}_x + \text{Bytes}_y + \text{Bytes}_{V_x \Lambda_x} + \text{Bytes}_{V_y \Lambda_y} + \text{Bytes}_{vr}$$

$$\text{Total} = p(n+p) + p(m+p) + 2(n+p)^2 + 2(m+p)^2 + p$$

$$\text{Total} = p[(n+p) + (m+p)] + 2[(n+p)^2 + (m+p)^2] + p$$

$$\text{Total} = p(n+m+2p) + 2[(n+p)^2 + (m+p)^2] + p$$

Complejidad en Tiempo

La complejidad en tiempo de un algoritmo se puede expresar en términos del número de operaciones usadas por el algoritmo cuando la entrada tiene un tamaño en particular. Las operaciones utilizadas para medir la complejidad en tiempo pueden ser la comparación de enteros, la suma de enteros, la división de enteros, asignaciones de variables, comparaciones lógicas, o cualquier otra operación elemental.

Se define lo siguiente:

OE: operación elemental

n_pares : es el número de pares de patrones asociados

n : es la dimensión de los patrones más la adición de los vectores *one-hot* o *zero-hot*

Se analiza el algoritmo de la fase de aprendizaje porque es la parte de todo el algoritmo que requiere de más operaciones elementales.

Fase de Recuperación

```

u = 0; (1)
while(u < n_pares) (2)
{
    i = 0; (3)
    while(i < n) (4)
    {
        j = 0; (5)
        while(j < n) (6)
        {
            if(y[u][i]==0 && y[u][j]==0) (7)
                t=1; (8)
            else if(y[u][i]==0 && y[u][j]==1) (9a)
                t=0;
            else if(y[u][i]==1 && y[u][j]==0) (9b)
                t=2;
            else
                t=1;
            if(u==0) (10)
                Vy[i][j]=t; (11)
            else
                if(Vy[i][j]<t) (12)
                    Vy[i][j]=t; (13)
            j++; (14)
        }
        i++; (15)
    }
    u++; (16)
}

```

(1) 1 OE, asignación

(2) n_pares OE, comparaciones

(3) n_pares OE, asignación

- (4) $n_{\text{pares}} * n$ OE, comparaciones
 (5) $n_{\text{pares}} * n$ OE, asignación
 (6) $n_{\text{pares}} * n * n$ OE, comparaciones
 (7a) $n_{\text{pares}} * n * n$ OE, comparaciones: $y[u][i] == 0$
 (7b) $n_{\text{pares}} * n * n$ OE, operador relacional AND: $\&\&$
 (7c) $n_{\text{pares}} * n * n$ OE, comparaciones: $y[u][j] == 0$
 (8) Siempre se va a realizar una asignación a la variable t , $n_{\text{pares}} * n$ OE
 (9) Ambas sentencias `if` (a y b) tiene la mitad de probabilidad de ejecutarse, $n_{\text{pares}} * n * (n/2)$
 (10) $n_{\text{pares}} * n * n$ OE, comparaciones
 (11) Esta asignación sólo se realiza una vez, 1 OE
 (12) $(n_{\text{pares}} * n * n) - 1$ OE, comparaciones
 (13) tiene la mitad de probabilidad de ejecutarse la asignación, $n_{\text{pares}} * n * (n/2)$
 (14) $n_{\text{pares}} * n * n$ OE, incremento
 (15) $n_{\text{pares}} * n$ OE, incremento
 (16) n_{pares} OE, incremento

El número total de OE es:

$$\text{Total} = 1 + n_{\text{pares}} + n_{\text{pares}} + n_{\text{pares}} * n + n_{\text{pares}} * n + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n * (n/2) + n_{\text{pares}} * n * n + 1 + [(n_{\text{pares}} * n * n) - 1] + n_{\text{pares}} * n * (n/2) + n_{\text{pares}} * n * n + n_{\text{pares}} * n + n_{\text{pares}}$$

$$\text{Total} = 2 + 3n_{\text{pares}} + 3n_{\text{pares}} * n + 7n_{\text{pares}} * n * n + 2[n_{\text{pares}} * n * (n/2)] + [(n_{\text{pares}} * n * n) - 1]$$

$$\text{Total} = 2 + n_{\text{pares}}(3 + 3n + 8n^2) + n_{\text{pares}} * n^2 - 1$$

$$\text{Total} = 1 + n_{\text{pares}}(3 + 3n + 9n^2)$$

Del total de OE obtenida, se fija n_{pares} en el valor de 50, lo que resulta en una función que sólo depende del tamaño de los patrones:

$$f(n) = 1 + 50(3 + 3n + 9n^2)$$

Para analizar la factibilidad del algoritmo es necesario entender que tan rápido crece la función obtenida conforme aumenta el valor de n . Para este cometido, se utilizará la notación BIG-O [66], que se define a continuación.

Sea f y g funciones de un conjunto de enteros o de un conjunto de números reales a un conjunto de números reales. Se dice que $f(x)$ es $O(g(x))$ si existen dos constantes C y k tal que:

$$|f(x)| \leq C |g(x)| \quad \text{cuando } x > k$$

Ahora, el número de operaciones elementales obtenidas de nuestro algoritmo fue:

$$f(n) = 1 + 50(3 + 3n + 9n^2)$$

se debe encontrar una función $g(x)$, C y k , que cumplan con la desigualdad.

Se propone

$$50(3n^2+3n^2+9n^2) = 150n^2+150n^2+450n^2 = 750n^2$$

Entonces si $g(n) = n^2$, $C = 750$ y $k = 1$, tenemos que

$$|f(n)| \leq 750 |g(n)| \quad \text{cuando } n > 1, \text{ por lo tanto } O(n^2).$$

140

La figura 4.6 se muestra las gráficas de $f(n)$ y $O(n^2)$. Se puede observar que la función $g(n)$ propuesta cumple con la desigualdad, con lo que se concluye que el algoritmo de la BAM Alfa-Beta es $O(n^2)$.

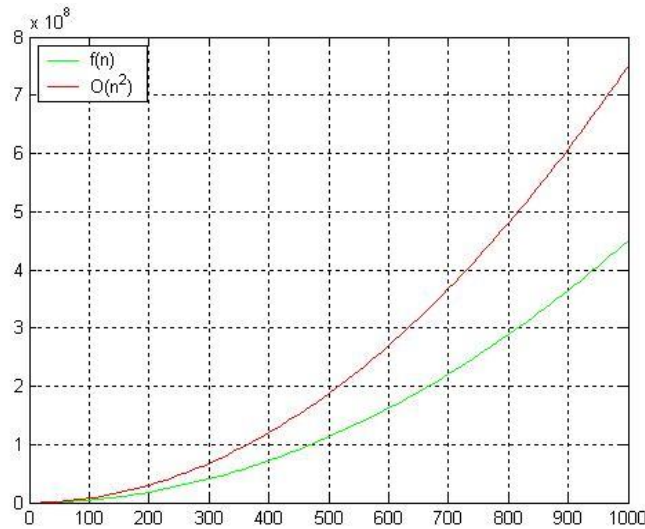


Figura 5.66. Gráfica de $f(n)$ y $O(n^2)$. Se comprueba la desigualdad, por lo tanto, el algoritmo es $O(n^2)$.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En esta sección se presentan las conclusiones obtenidas al analizar los desarrollos y resultados originales del nuevo modelo para la eliminación de ruido en señales de radar, motivo central de este trabajo de tesis. Además, se hace una propuesta con una serie de posibles trabajos de investigación cuya motivación y arranque pueden derivarse a partir del nuevo modelo desarrollado y de sus aplicaciones.

CONCLUSIONES

1. Con base en el estudio del estado del arte se propusieron e implementaron los algoritmos para la supresión de ruido en sistemas de comunicaciones basados en arreglos faseados de antenas adaptativos, por medio de modificaciones en el patrón de radiación utilizando algoritmo LMS y la red neuronal perceptrón multicapa.
2. Se propuso una metodología novedosa de inicializar los parámetros de los algoritmos LMS y la red neuronal perceptrón multicapa basada en memorias asociativas bidireccionales Alfa-Beta para lograr la adaptación de los patrones de radiación en menos tiempo, que permitió de una manera más eficiente inicializar los vectores de pesos de los algoritmos LMS y la red neuronal perceptrón multicapa.
3. Se desarrollaron los algoritmos de procesamiento de señales que reducen el ruido en menos tiempo de procesamiento. Se ha demostrado que la nueva propuesta de inicialización de parámetros cumple con el objetivo de eliminar interferencias en señales de radar modificando el patrón de radiación, con un proceso menos tardado que el utilizado con la inicialización convencional.
4. Se realizó un análisis exhaustivo de los experimentos, que arroja como resultado que el algoritmo de la red neuronal perceptrón multicapa ofrece mejores resultados que el LMS.
5. Las pruebas realizadas muestran que en tan sólo 5 iteraciones:
 - a. Con las ventanas triangular y Hamming se logra la eliminación del lóbulo secundario localiza a 45.5° .
 - b. Los coeficientes de la ventana de Hamming permiten la eliminación del lóbulo secundario a -45.5° .
 - c. Con la ventana triangular se logra insertar un nulo en 24° .
 - d. Los coeficientes de la ventana triangular permiten la eliminación del lóbulo secundario a -24° .
6. Se implementaron las memorias asociativas bidireccionales Alfa-Beta para modificar el patrón de radiación del arreglo de antenas; con estas memorias se obtienen los coeficientes óptimos en el sentido de eliminación de lóbulos secundarios. Los resultados obtenidos al aplicar la BAM Alfa-Beta son adecuados para la eliminación de lóbulos en diferentes direcciones. Como se mencionó en el capítulo 5, se puede utilizar la BAM Alfa-Beta en arreglos fijo de telefonía

celular, donde solo requiere especificar la dirección donde se encuentra un obstáculo para insertar un nulo y evitar interferencias por reflexión.

7. Se realizó el análisis comparativo de resultados de los algoritmos LMS y perceptrón multicapa utilizando la inicialización convencional con la propuesta en este trabajo para verificar que el uso de memorias asociativas para la formación de haz la adaptación del patrón de radiación de en menor tiempo. Los resultados obtenidos han demostrado que la nueva propuesta de formación de haz cumple con el objetivo de eliminar señales de interferencia con un proceso simple y en menor tiempo de procesamiento.

TRABAJOS FUTUROS

Para la inicialización del vector de pesos se propone utilizar:

- a. Los coeficientes de los filtros pasa bajas de descomposición y reconstrucción de las wavelets
- b. Los coeficientes de los polinomios de Chebyshev.

Utilizar la red neuronal en arreglos de antenas fijos para reducir los lóbulos secundarios. Se propone insertar un nulo en cada lóbulo secundario del patrón de radiación. El proceso se realizará insertando un nulo a la vez. Posiblemente el lóbulo principal se modificará por lo que se deberá cuidar que el ángulo de media potencia no aumente demasiado.

Utilizar la BAM Alfa-Beta en arreglo fijos para estaciones terrestres satelitales. Este procedimiento podrá utilizarse tanto para el seguimiento de satélites así como para la reducción de interferencias

RELACIÓN DE PUBLICACIONES PROPIAS**REVISTAS ISI Y CONACYT**

Marco Antonio Acevedo Mosqueda, Emmanuel Martínez Zavala, Maria Elena Acevedo Mosqueda, Oleksy Pogrebnyak, "A novel method of beamforming to improve the space diversity", Polibits (46). No. ISSN 1870-9044, 2012

Maria Elena Acevedo, Cornelio Yañez-Marquez, Marco Antonio Acevedo, "Associative Models for Storing and Retrieving Concept Lattices", Mathematical Problems in Engineering, No.ISSN: 1024-123x, 2010.

Maria Elena Acevedo, Marco Antonio Acevedo, Federido Felipe "Classification of Cancer Recurrence with Alpha-Beta BAM", Mathematical Problems in Engineering, No.ISSN: 1024-123x, 2009

REVISTAS INTERNACIONALES

Publicación en revista Springer: G. Sidorov et al. (Eds.): MICAI 2010, Part II. LNAI 6438, pp. 440-453, 2010.

Revista internacional IJHIS 2012.- PUBLICACIÓN, "Some proposals for eliminating interferences in a radar system. Desired response with only the main lobe".

CONGRESOS

Congreso Internacional COMTEL 2010.- PERÚ, "Red Neuronal Backpropagation para la eliminación de lóbulos secundarios en un patrón de radiación".

Congreso Internacional, 7th International Conference on Electrical and Electronics Engineering Research 2010.- Aguascalientes, MEXICO, "Generalized gamma algorithm for classifying breast cancer recurrence".

Congreso Internacional LATINCOM 2010.- COLOMBIA, "Neural Network Backpropagation New proposal for eliminating interferences in a radar system. Lobes at 45.5° and 24°". IEEEExplore: 10.1109/LATINCOM.2010.5641007

Congreso Internacional MICAI 2010.- Pachuca, MEXICO, "New proposal for eliminating interferences in a radar system".

Congreso Nacional CNIES 2010.- IPN MEXICO, "Propuesta para la eliminación de todos los lóbulos secundarios".

Congreso Nacional ROC&C 2010.- Acapulco, MEXICO, "Eliminación de interferences. Direccionamiento del lóbulo primario sin secundarios, en un arreglo de antenas".

Congreso Nacional, XI Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas 2009.- IPN MEXICO, "Propuesta de inicialización de los pesos en el filtro espacial LMS".

Congreso Nacional, XI Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas 2009.- IPN MEXICO, "Predicción de la recurrencia de cáncer mediante modelos asociativos".

Congreso Nacional, XI Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas 2009.- IPN MEXICO, "Codificación de patrones para mejorar el desempeño de la BAM ALFA BETA como clasificador".

Congreso Nacional, XI Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas 2009.-
IPN MEXICO, "Análisis síntesis de un filtro tipo wavelet utilizando los polinomios de Chebyshev".

REFERENCIAS

- [1] B. Widrow, P. E. Mantey, L. J. Griffiths, B. B. Goode, "Adaptive Antenna Systems", proceedings of the IEEE, vol. 55, no. 12, december 1967.
- [2] Samuel D. Stearns, CRC Press 2002 2a ed., "Digital Signal Processing with Examples in Matlab".
- [3] Gabriel, W., 1980. Spectral Analysis and Adaptive Array Superresolution Techniques. Proceedings of the IEEE. Vol. 68, no. 6, pp. 654-666.
- [4] Johnson, D., 1982. The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Problems. Proceedings of the IEEE, vol. 70, no. 9, pp. 1018-1028.
- [5] Ward, J., 1995. Space-Time Adaptive Processing for Airborne Radar. IEEE p.p 2809-2812
- [6] Haimovich, A., 1996. The Eigencanceler: Adaptive Radar by Eigenanalysis Methods. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 32, no. 2, pp. 532-542.
- [7] Raspanti, R., Tsakalides, P., Nikias, C.L., Del Re, E., 1996. Cramér-Rao Bounds for Target Angle and Doppler Estimation for Airborne Radar in Cauchy Interference. Proc. of the 8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array, pp. 534-537.
- [8] Kogon, S.M., Williams, D.B., Holder, E.J., 1998. Exploiting Coherence Multipath for Mainbeam Jammer Suppression. IEEE Proc. Radar, Sonar Navig. vol. 145, no. 5, pp. 303-308.
- [9] Peckham, C.D., Haimovich, A.M., Ayoub, T.F., Goldstein, J.S., Reed, I.S., 2000. Reduced-Rank Performance Analysis. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 32, no. 2, pp.664-676.
- [10] Sarkar, T.P., Wang, H., Park, S. et al, 2001. A Deterministic Least-Squares Approach to Space-Time Adaptive Processing (STAP). IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 49, no. 1, pp. 91-103.
- [11] Seliktar, Y., Williams, D., Holder, F., 2006. A Space/Fast-Time Adaptive Monopulse Technique. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, vol. 2006, pp.1-11.
- [12] Kihira, K, Takahashi, R., Hirata, K. Miyashita, H., Makino, S, 2006. An Adaptive Array Antenna Using Blind Extraction of Signal Subspace in Radar. Electronics and Communications in Japan, vol. 89, no. 12, pp. 1752-1759.
- [13] RübSamen, M., Gershman, A.B., 2009. Direction-of-Arrival Estimation for Nonuniform Sensor Arrays: From Manifold Separation to Fourier Domain MUSIC Methods. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, no. 2, pp. 588-599.
- [14] Frank B. Gross, McGraw-Hill 1995, "Smart Antennas for Wireless Communications".
- [15] IEEE. Programs for Digital Signal Processing. IEEE Press. New York: John Wiley & Sons, 1979.

- [16] Liberti, J., and T. Rappaport, Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications, Prentice Hall, New York, 1999.
- [17] Nitzberg, R., Application of the normalized LMS algorithm to MSLC, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 21, 79–91, 1985.
- [18] McCulloch, Warren S. and Pitts, Walter H. A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. Bulletin of Mathematical Biophysics, 5(4):115–133, 21 December 1943.
- [19] Bernard Widrow and Marcian E. Hoff. Adaptive Switching Circuits. In IRE WESCON, Convention Record, pages 96–104, Los Angeles, California, 23-26 August 1960.
- [20] José R. Hilera y Victor J. Martínez. Redes Neuronales Artificiales, Fundamentos, Modelos y Aplicaciones. Alfa Omega, México, 2000.
- [21] Marvin Minsky and Seymour Papert. Book reviews: Perceptrons, An Introduction to Computational Geometry. Bulletin of the American Mathematical Society, 78(1):2554–2558, January 1972.
- [22] David E. Rumelhart, Geoffrey E. Hinton and Ronald J. Williams. Learning Representations by Back-propagating Errors. Letters to Nature, 323(9):533–536, October 1986.
- [23] John Hopfield J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. Proceedings of the National Academy of Sciences, 79:2554–2558, April 1982.
- [24] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt and M. P. Vecchi. Optimization by Simulated Annealing. Science, 220(4598):671–680, 13 May 1983.
- [25] J. Bestard, M. Laucirica, R. Gallart and V. Moreno. Algunas Experiencias sobre Reconocimiento de Fonemas utilizando Redes Neuronales Artificiales. Bioingeniería: Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones, 21(2):79–84, Mayo 2000.
- [26] Simon Haykin. Neural Networks. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, Second edition, 1999.
- [27] Laurence Fausett. Fundamentals of Neural Networks. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1994.
- [28] Bernard Widrow, John M. McCool, Michael G. Larimore, Richard Johnson, “Stationary and Nonstationary characteristics of the LMS adaptive Filter”, Proc. IEEE, vol 64, NO. 8, pp 1151-1162, aug 1976.
- [29] Bernard Widrow, Kenneth M. Duval, Richard P. Gooch, “Signal Cancellation Phenomena in Adaptive Antennas: Causes and Cures”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. AP-30, No. 3, pp. 469-478, may 1982

- [30] Bernard Widrow, and Eugene Walach "On the Statistical Efficiency of the LMS Algorithm with Nonstationary Inputs" IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-30, No. 2, march 1984
- [31] Young-Lim Su, Tie-Jun Shan, Bernard Widrow, "Parallel Spatial Processing: A cure for Signal Cancellation in Adaptive Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. AP-34, No. 3, pp. 347-355, march 1986
- [32] Delores M., Allan O. Steinhardt, and Susan L. Stoner, "Least squares adaptive processing in military applications", IEEE Signal Processing magazine, vol. 19, No. 3, pp.66-73, may. 2002
- [33] Bernard Widrow and Max Kamenetsky, "On the Statistical Efficiency of the LMS Family of Adaptive Algorithms", 0-7803-7898-9/03/\$17.00 02003 IEEE, pp. 2872-2880. 2003
- [34] Bernard Widrow, "Thinking About Thinking: The Discovery of the LMS Algorithm", IEEE Signal Processing Magazine [100] January 2005
- [35] Sinmo Sung, Fredric M. Ham and Wesley Shelton, "A new robust neuronal network method for coherent interference rejection in adaptive array systems".
- [36] Hassoun, M. H. 1993, Associative Neural Memories, Oxford University Press, New York.
- [37] Kohonen, T. 1989, Self-Organization and Associative Memory, Springer-Verlag, Berlin.
- [38] Yáñez, C. 2002, Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios, Tesis de Doctorado, Centro de Investigación en Computación, México.
- [39] Acevedo, M.E., Memorias Asociativas Bidireccionales Alfa-Beta, Tesis de doctorado, Centro de Investigación en Computación, Ciudad de México, México, 2006.
- [40] Flores, R., "Memorias Asociativas Alfa-Beta basadas en el código Johnson-Möbius Modificado" Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Computación, Ciudad de México, México, 2006.
- [41] Bishop Crhristopher M. Neural Networks for Pattern Recognition. Oxford University Press Inc.,New York, 1999.
- [42] Rios Rios, Carlos, Propuesta de Inicialización de los Pesos en el Filtro Espacial LMS, Tesis de maestría, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ciudad de México, Junio 2010.
- [43] Carlos Campa, Antonio Acevedo, Elena Acevedo, "New proposal for eliminating interferences in a radar system", Advances in soft computing, 2010,pp 440-453.
- [44] Carlos Felix Campa, Marco Antonio Acevedo, "New proposal for eliminating interferences in a radar system. lobes at 45.5 and 24", IEEE latin-american conference on communications 2010.
- [45] Alondra Jazmín Pons Flores, "Propuesta de inicialización con pesos en el algoritmo LMS en un arreglo de antenas", Tesis de Licenciatura, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ciudad de México, Febrero 2010.

[46] Kaiser, J.F., "Nonrecursive Digital Filter Design Using the IO-sinh Window Function," Proc. 1974 *IEEE Symp. Circuits and Systems*, (April 1974), pp.20-23.

[47] *Selected Papers in Digital Signal Processing II*, IEEE Press, New York, 1975.

[48] Oppenheim, A.V., and R.W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989, p. 453.

148

[49] Harris, F. J. "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform." *Proceedings of the IEEE*. Vol. 66 (January 1978). pp. 66-67.

[50] Rosen, K., "Discrete Mathematics and Its Applications", McGraw-Hill, Estados Unidos, 1999

[51] Xuexia Li ; Jiuchao, "New beamforming method based on radial- basis function neural network processing in SaSG distribution noise environments" ,Feng, International Conference on Communications, Circuits and Systems, 2007. ICCCAS 2007., 11-13 July 2007, pp. 107-110.

[52] Xin Song ; Jinkuan Wang ; Xuefen Niu, "Robust adaptive beamforming algorithm based on neural network", IEEE International Conference on Automation and Logistics, 2008. ICAL 2008, 1-3 Sept. 2008, pp. 1844 - 1849

[53] Gureken, M. ; Dural, G. ; Caylar, S., "Neural network based beamforming using a Cylindrical Patch Array", IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 2009. APSURSI '09, 1-5 June 2009, pp. 1 - 4

[54] Papari, J. ; Oskouei, H.R.D. ; Keshavarz, A., "Robust adaptive beamforming algorithm based on Sampling Function Neural Network", International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA), 2011 2nd, 27-29 Dec. 2011, pp. 1187 – 1192.

[55] Abhishek et al,

[56] Zaharis, Z.D. ; Skeberis, C. ; Xenos, T.D. ; Lazaridis, P.I. ; Cosmas, J., "Design of a Novel Antenna Array Beamformer Using Neural Networks Trained by Modified Adaptive Dispersion Invasive Weed Optimization Based Data", IEEE Transactions on Broadcasting, Vol. 59, Issue 3, pp. 455 – 460.

APENDICE

En esta sección se presentan los mejores valores de pesos que permiten insertar un nulo en una determinada dirección. En las tablas A.1, A.2, A.3 y A.4 se pueden observar los valores de los ángulos y sus correspondientes pesos, los cuales se obtuvieron al aplicar las ventanas FPBN (A.1 y A.2) y Kaiser (A.3 y A.4) para la inicialización de los parámetros de la red neuronal perceptrón multicapa.



Tabla A.1 Pesos correspondientes a los ángulos positivos utilizando el ventaneo FPBN.

Índice	ANGULO PROPUETO PARA LA ELIMINACION	PESOS OBTENIDOS AL INICIALIZAR CON LOS COEFICIENTES DEL FPBN A 15 ITERACIONES DEL ALGORITMO DE LA RNB.						
		W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7
1	5	0.940448138295702 - 7.69700298594235e-06i	0.973258023742709 - 5.47381395305034e-06i	0.993266370094041 - 2.84280652071419e-06i	0.999990022713631 - 1.55339115044565e-22i	0.993266370094041 + 2.84280652071418e-06i	0.973258023742709 + 5.47381395305034e-06i	0.940448138295702 + 7.69700298594235e-06i
2	10	0.940556689038593 - 0.00153660171107624i	0.972556391356802 - 0.00136610380159038i	0.991960212839172 - 0.000799029933204416i	0.998460737904632 - 2.27510315314759e-20i	0.991960212839172 + 0.000799029933204416i	0.972556391356802 + 0.00136610380159038i	0.940556689038593 + 0.00153660171107624i
3	15	1.03005535543887 - 0.0758186828274384i	0.979768003929995 - 0.117193441474829i	0.912612315666490 - 0.0852629805224047i	0.882627407936854 - 8.62628712061947e-16i	0.912612315666489 + 0.0852629805224035i	0.979768003929994 + 0.117193441474829i	1.03005535543887 + 0.0758186828274397i
4	20	0.799155361092843 - 0.0115943988851370i	0.895787442708391 + 0.118731392177794i	1.06078860855463 + 0.124670034900680i	1.14177728323963 - 2.50513528539281e-14i	1.06078860855459 - 0.124670034900703i	0.895787442708349 - 0.118731392177767i	0.799155361092847 + 0.0115943988851870i
5	20.25	0.791648342889024 - 0.0180162049518415i	0.888146686091999 + 0.123380533203171i	1.06295235282702 + 0.132717042669084i	1.14989617443075 + 9.45448066482544e-16i	1.06295235282703 - 0.132717042669083i	0.888146686092000 - 0.123380533203172i	0.791648342889024 + 0.0180162049518396i
6	20.5	0.784923068192924 - 0.0249457719707506i	0.880513514117162 + 0.127316505703697i	1.06469920139550 + 0.140398901749970i	1.15752272613178 - 3.16743108193314e-15i	1.06469920139549 - 0.140398901749973i	0.880513514117157 - 0.127316505703694i	0.784923068192925 + 0.0249457719707569i
7	20.75	0.779002784252871 - 0.0323119126913350i	0.872930337734340 + 0.130551396500609i	1.06604505810072 + 0.147703218018807i	1.16465688404495 - 6.60779470553712e-15i	1.06604505810071 - 0.147703218018813i	0.872930337734329 - 0.130551396500600i	0.779002784252874 + 0.0323119126913479i
8	21	0.773904931344767 - 0.0400429643619813i	0.865438176909596 + 0.133099768882416i	1.06700637039738 + 0.154618689526746i	1.17129929722672 + 2.68968815438795e-16i	1.06700637039738 - 0.154618689526746i	0.865438176909597 - 0.133099768882416i	0.773904931344767 + 0.0400429643619808i
9	21.25	0.769641204731318 - 0.0480672373599310i	0.858076523989091 + 0.134978539931389i	1.06760007108818 + 0.161135117828822i	1.17745130581385 + 3.87236753017914e-15i	1.06760007108818 - 0.161135117828819i	0.858076523989097 - 0.134978539931394i	0.769641204731315 + 0.0480672373599236i
10	21.5	0.766217650436237 - 0.0563134516402210i	0.850883217297989 + 0.136206850774176i	1.06784352043936 + 0.167243416077401i	1.18311492826040 - 5.70348663461010e-16i	1.06784352043937 - 0.167243416077401i	0.850883217297990 - 0.136206850774176i	0.766217650436237 + 0.0563134516402199i
11	21.75	0.763634792539286 - 0.0647111585536462i	0.843894324463938 + 0.136805930373859i	1.06775444782921 + 0.172935613761798i	1.18829284699871 + 5.90562642585002e-15i	1.06775444782922 - 0.172935613761793i	0.843894324463947 - 0.136805930373867i	0.763634792539282 + 0.0647111585536351i
12	22	0.761887790958817 - 0.0731911458155941i	0.837144036439497 + 0.136798953743495i	1.06735089395601 + 0.178204858273428i	1.19298839349950 - 1.02080976145244e-15i	1.06735089395601 - 0.178204858273429i	0.837144036439496 - 0.136798953743494i	0.761887790958818 + 0.0731911458155960i
13	22.25	0.760966627737246 - 0.0816858235468787i	0.830664572270634 + 0.136210895323588i	1.06665115356612 + 0.183045413323118i	1.19720553254563 - 5.65587020794380e-17i	1.06665115356612 - 0.183045413323118i	0.830664572270634 - 0.136210895323588i	0.760966627737246 + 0.0816858235468788i

14	22.5	0.760856319427064 - 0.0901295894445441i	0.824486094316065 + 0.135068378224908i	1.06567371828700 + 0.187452654175484i	1.20094884511410 + 2.02648219481606e-15i	1.06567371828701 - 0.187452654175483i	0.824486094316068 - 0.135068378224911i	0.760856319427062 + 0.0901295894445405i
15	22.75	0.761537154238593 - 0.0984591714422049i	0.818636634811602 + 0.133399520246582i	1.06443722071085 + 0.191423059946501i	1.20422351100987 - 2.23900774170799e-15i	1.06443722071084 - 0.191423059946503i	0.818636634811599 - 0.133399520246578i	0.761537154238595 + 0.0984591714422088i
16	23	0.762984951285844 - 0.106613946305878i	0.813142033318155 + 0.131233777352551i	1.06296037923269 + 0.194954202935051i	1.20703529057339 - 4.42304058330718e-15i	1.06296037923268 - 0.194954202935054i	0.813142033318149 - 0.131233777352544i	0.762984951285849 + 0.106613946305886i
17	23.25	0.765171339596463 - 0.114536232834573i	0.808025884988447 + 0.128601785364357i	1.06126194370183 + 0.198044735061449i	1.20939050540477 - 1.25336616843914e-16i	1.06126194370183 - 0.198044735061449i	0.808025884988447 + 0.128601785364357i	0.765171339596463 + 0.114536232834573i
18	23.5	0.768064054925482 - 0.122171558599261i	0.803309499980651 + 0.125535200687631i	1.05936064251050 + 0.200694371600846i	1.21129601869645 - 3.20123209927321e-16i	1.05936064251050 - 0.200694371600846i	0.803309499980650 - 0.125535200687631i	0.768064054925483 + 0.122171558599261i
19	23.75	0.771627251843017 - 0.129468899297653i	0.799011873749926 + 0.122066540780143i	1.05727513103694 + 0.202903872276869i	1.21275921497943 + 1.00506673978690e-16i	1.05727513103694 - 0.202903872276869i	0.799011873749926 + 0.122066540780143i	0.771627251843017 + 0.129468899297653i
20	24	0.775821828604960 - 0.13638089008036i	0.795149667979628 + 0.118229025069553i	1.05502394145396 + 0.204675019805506i	1.21378797920008 - 1.41227280145059e-17i	1.05502394145396 - 0.204675019805506i	0.795149667979628 - 0.118229025069553i	0.775821828604960 + 0.13638089008036i
21	24.25	0.780605762474136 - 0.142864007854974i	0.791737202039889 + 0.114056417037099i	1.05262543413210 + 0.206010596030530i	1.21439067530359 - 1.92913257349674e-18i	1.05262543413210 - 0.206010596030530i	0.791737202039889 - 0.114056417037099i	0.780605762474136 + 0.142864007854974i
22	24.5	0.785934453108514 - 0.148878725793140i	0.788786454756901 + 0.109582868146247i	1.05009775077925 + 0.206914355780529i	1.21457612441003 + 2.37603175120049e-18i	1.05009775077925 - 0.206914355780529i	0.788786454756901 + 0.109582868146247i	0.785934453108514 + 0.148878725793140i
23	24.75	0.791761071614595 - 0.154389637402989i	0.786307076195341 + 0.104842764260585i	1.04745876939571 + 0.207390998569251i	1.21435358260506 + 1.83740094510250e-16i	1.04745876939571 - 0.207390998569251i	0.786307076195342 - 0.104842764260586i	0.791761071614594 + 0.154389637402989i
24	25	0.798036912909015 - 0.159365552783222i	0.784306409127315 + 0.0998705751685317i	1.04472606112947 + 0.207446138268046i	1.21373271838314 + 1.95616817179092e-18i	1.04472606112947 - 0.207446138268046i	0.784306409127315 + 0.0998705751685317i	0.798036912909015 + 0.159365552783222i
25	25.25	0.804711749088150 - 0.163779565810703i	0.782789519830687 + 0.094700707802953i	1.04191684911747 + 0.207086270885909i	1.21272358979284 - 9.64891975481919e-18i	1.04191684911747 - 0.207086270885909i	0.782789519830687 + 0.094700707802953i	0.804711749088150 + 0.163779565810703i
26	25.5	0.811734181569243 - 0.167609093215149i	0.781759237825066 + 0.0893673637103843i	1.03904796939022 + 0.206318740596048i	1.21133662133397 + 4.77480804148142e-18i	1.03904796939022 - 0.206318740596048i	0.781759237825066 - 0.0893673637103843i	0.811734181569243 + 0.167609093215149i
27	25.75	0.819051989848442 - 0.170835886084554i	0.781216204126581 + 0.083904401289523i	1.03613583391312 + 0.205151704151360i	1.20958258066128 + 3.28001129694028e-18i	1.03613583391312 - 0.205151704151360i	0.781216204126581 + 0.083904401289523i	0.819051989848442 + 0.170835886084554i
28	26	0.826612474817319 - 0.173446014576441i	0.781158927580702 + 0.0783452032817981i	1.03319639583647 + 0.203594093833948i	1.20747255515739 + 5.84728274239738e-18i	1.03319639583647 - 0.203594093833948i	0.781158927580702 - 0.0783452032817981i	0.826612474817319 + 0.173446014576441i
29	26.25	0.834362794660164 - 0.175429826752975i	0.781583848789565 + 0.0727225499559272i	1.03024511699236 + 0.201655579079023i	1.20501792840662 + 0.00000000000000i	1.03024511699236 - 0.201655579079023i	0.781583848789565 + 0.0727225499559272i	0.834362794660164 + 0.175429826752975i
30	26.5	0.842250291425103 - 0.176781882586319i	0.782485411094349 + 0.0670684983867842i	1.02729693762420 + 0.199346526905372i	1.20223035654937 + 1.93321373263298e-18i	1.02729693762420 - 0.199346526905372i	0.782485411094349 - 0.0670684983867842i	0.842250291425103 + 0.176781882586319i
31	26.75	0.850222806538504 - 0.177500864318534i	0.783856138108042 + 0.0614142681961040i	1.02436624839776 + 0.196677961300444i	1.19912174457929 + 2.01698196290694e-19i	1.02436624839776 - 0.196677961300444i	0.783856138108042 + 0.0614142681961040i	0.850222806538504 + 0.177500864318534i
32	27	0.858228983768072 - 0.177589464497536i	0.785686717372919 + 0.0557901340885052i	1.02146686485685 + 0.193661521733065i	1.19570422278991 + 2.14053240956101e-18i	1.02146686485685 - 0.193661521733065i	0.785686717372919 + 0.0557901340885052i	0.858228983768072 + 0.177589464497536i
33	27.25	0.866218558104431 - 0.177054253077019i	0.787966089550436 + 0.0502253254590152i	1.01861200427784 + 0.190309420925251i	1.19199012334181 + 3.46123869586196e-19i	1.01861200427784 - 0.190309420925251i	0.787966089550436 + 0.0502253254590152i	0.866218558104431 + 0.177054253077019i
34	27.5	0.874142629016979 - 0.175905525024600i	0.790681542413202 + 0.0447479333018414i	1.01581426470605 + 0.186634401981510i	1.18799195672850 - 1.07516411587601e-17i	1.01581426470605 - 0.186634401981510i	0.790681542413202 + 0.0447479333018414i	0.874142629016979 + 0.175905525024600i
35	27.75	0.881953917074422 - 0.174157130037971i	0.793818809249466 + 0.0393848246365896i	1.01308560639552 + 0.182649695060544i	1.18372238843944 - 1.43020265130760e-18i	1.01308560639552 - 0.182649695060544i	0.793818809249466 + 0.0393848246365896i	0.881953917074422 + 0.174157130037971i
36	28	0.889607003045509 - 0.171826286026780i	0.797362171259184 + 0.0341615646169653i	1.01043733582532 + 0.178368973762555i	1.17919421607189 - 1.00321993093894e-16i	1.01043733582532 - 0.178368973762555i	0.797362171259184 + 0.034161564616965i	0.889607003045509 + 0.171826286026780i



37	30	0.940456164733079 - 0.135219189799434i	0.838048674867436 + 7.66089579517134e-17i	0.993277356763222 + 0.135219189799434i	1.13522059082347 + 7.00402051360406e-32i	0.993277356763222 - 0.135219189799434i	0.838048674867436 - 7.66089579517136e-17i	0.940456164733079 + 0.135219189799434i
38	35	0.940004788928073 + 0.000542517122600573i	0.973898784415624 + 0.000314627046221913i	0.993438499547501 - 0.000686675683351156i	0.999295494756359 - 8.039774816901118e-20i	0.993438499547501 + 0.000686675683351156i	0.973898784415624 - 0.000314627046221913i	0.940004788928073 - 0.000542517122600573i
39	40	0.834952669648039 + 0.0241531434579543i	1.04078628255402 + 0.0845900908416136i	1.04021596964899 - 0.0975243748213773i	0.891768485292890 + 2.50561860836052e-16i	1.04021596964900 + 0.0975243748213771i	1.04078628255402 - 0.0845900908416139i	0.834952669648039 - 0.0241531434579538i
40	41	0.819244259869237 + 0.0121586121947224i	1.04106842833116 + 0.101208184171901i	1.05063796583892 - 0.107469909734971i	0.878181213053918 - 7.67434975003776e-17i	1.05063796583892 + 0.107469909734971i	1.04106842833116 - 0.101208184171901i	0.819244259869237 - 0.0121586121947225i
41	41.25	0.816004758159291 + 0.00860044975330371i	1.03884069712254 + 0.105052455764512i	1.05314992182389 - 0.109440656662642i	0.875253172347558 + 8.08760727075867e-17i	1.05314992182389 + 0.109440656662642i	1.03884069712254 - 0.105052455764512i	0.816004758159291 - 0.00860044975330355i
42	41.5	0.813061491363305 + 0.00486098215887374i	1.03979726227097 + 0.108750757308608i	1.05561179178073 - 0.111208404747990i	0.872514021180478 + 1.94484612604930e-15i	1.05561179178074 + 0.111208404747988i	1.03979726227097 - 0.108750757308610i	0.813061491363305 - 0.00486098215886986i
43	41.75	0.810422281806243 + 0.000962064934567303i	1.03884069712254 + 0.112293351427630i	1.05801760463174 - 0.112775414192657i	0.869963959182953 - 6.85273624959655e-17i	1.05801760463174 + 0.112775414192657i	1.03884069712254 - 0.112293351427630i	0.810422281806243 - 0.000962064934567440i
44	42	0.808093378563344 - 0.00307428406294368i	1.03768360472285 + 0.115671209806109i	1.06036161411194 - 0.11444280779773i	0.867602917607941 + 1.91733082673268e-16i	1.06036161411194 + 0.11444280779772i	1.03768360472285 - 0.115671209806110i	0.808093378563344 + 0.00307428406294406i
45	42.25	0.806079476678508 - 0.00722599370841898i	1.03633655337315 + 0.118876024007539i	1.06263830810483 - 0.115317919353938i	0.865430566829039 - 7.00531643663439e-17i	1.06263830810483 + 0.115317919353938i	1.03633655337315 - 0.118876024007539i	0.806079476678508 + 0.00722599370841884i
46	42.5	0.804383743443610 - 0.0114710449893961i	1.03481043183108 + 0.121900213237403i	1.06484241704210 - 0.116299547077993i	0.863446324045609 + 9.28652712341305e-17i	1.06484241704210 + 0.116299547077993i	1.03481043183108 - 0.121900213237404i	0.804383743443610 + 0.0114710449893963i
47	42.75	0.803007851316226 - 0.0157875722979216i	1.03311640180819 + 0.124736929136218i	1.06696892137452 - 0.117092666517316i	0.861649361177778 + 2.61981447797716e-16i	1.06696892137452 + 0.117092666517316i	1.03311640180819 - 0.124736929136218i	0.803007851316226 + 0.0157875722979221i
48	43	0.801952017037055 - 0.0201539602663423i	1.03126585114673 + 0.127380057694215i	1.06901305812276 - 0.117701048599416i	0.860038612936237 - 2.74783951060642e-16i	1.06901305812276 + 0.117701048599416i	1.03126585114673 - 0.127380057694215i	0.801952017037055 + 0.0201539602663418i
49	43.25	0.801215046494618 - 0.0245489358204474i	1.02927034783105 + 0.129824218385959i	1.07097032651796 - 0.118128715494187i	0.858612785053270 + 6.83364686286355e-16i	1.07097032651796 + 0.118128715494186i	1.02927034783105 - 0.129824218385960i	0.801215046494619 + 0.0245489358204487i
50	43.5	0.800794384872607 - 0.0289516551628955i	1.02714159498002 + 0.132064760630556i	1.07283649274416 - 0.118379923459198i	0.857370362661170 + 7.50954232875353e-17i	1.07283649274416 + 0.118379923459197i	1.02714159498002 - 0.132064760630556i	0.800794384872607 + 0.0289516551628957i
51	43.75	0.800686171604407 - 0.0333417854397725i	1.02489138695832 + 0.134097757691446i	1.07460759379765 - 0.118459145694792i	0.856309618802289 + 4.38459621769748e-15i	1.07460759379765 + 0.118459145694787i	1.02489138695832 - 0.134097757691449i	0.800686171604409 + 0.0333417854397810i
52	44	0.800885299650710 - 0.0376995808836191i	1.02253156673544 + 0.135919998138577i	1.07627994048217 - 0.118371055254793i	0.855428623051975 + 1.59694339297817e-16i	1.07627994048217 + 0.118371055254793i	1.02253156673544 - 0.135919998138577i	0.800885299650710 + 0.0376995808836194i
53	44.25	0.801385478610329 - 0.0420059532667518i	1.02007398461227 + 0.137528975004197i	1.07785011956277 - 0.118120580059781i	0.854725250232394 + 3.25712427357658e-17i	1.07785011956277 + 0.118120580059781i	1.02007398461227 - 0.137528975004197i	0.801385478610329 + 0.0420059532667519i
54	44.5	0.802179301172201 - 0.0462425365395318i	1.01753045842467 + 0.138922872771197i	1.07931499510512 - 0.117712526060306i	0.854197189192355 + 3.48546925885253e-15i	1.07931499510513 + 0.117712526060302i	1.01753045842466 - 0.138922872771199i	0.802179301172203 + 0.0462425365395384i
55	44.75	0.803258312418439 - 0.0503917455678381i	1.01491273532271 + 0.140100552338787i	1.08067170903055 - 0.117152280597066i	0.853841951626415 - 8.94740627777531e-16i	1.08067170903054 + 0.117152280597067i	1.01491273532271 - 0.140100552338786i	0.803258312418439 + 0.0503917455678364i
56	45	0.804613081494717 - 0.0544368289225696i	1.01223245521238 + 0.141061534114019i	1.08191768091927 - 0.116445076003020i	0.853656880906321 + 3.98231546431687e-15i	1.08191768091928 + 0.116445076003015i	1.01223245521237 - 0.141061534114021i	0.804613081494720 + 0.0544368289225769i
57	45.25	0.806233275175357 - 0.0583619157103628i	1.00950111593430 + 0.141805979378643i	1.08305060709574 - 0.115596333488739i	0.853639160899640 + 2.55825666690730e-15i	1.08305060709574 + 0.115596333488736i	1.00950111593429 - 0.141805979378645i	0.806233275175359 + 0.0583619157103674i
58	45.5	0.808107732865275 - 0.0621520564677667i	1.00673004024178 + 0.142334670078994i	1.08406845902924 - 0.114611575347511i	0.853785824753994 + 1.81360120765060e-15i	1.08406845902924 + 0.114611575347508i	1.00673004024178 - 0.142334670078995i	0.808107732865276 + 0.0621520564677700i
59	45.75	0.810224542599015 - 0.0657932581717974i	1.00393034462852 + 0.142648987183004i	1.08496948108194 - 0.113496409510723i	0.854093763630097 - 5.14253906411322e-17i	1.08496948108194 + 0.113496409510723i	1.00393034462852 - 0.142648987183004i	0.810224542599015 + 0.0657932581717973i

60	46	0.812571117616443 - 0.0692725134467784i	1.00111291004558 + 0.142750887743644i	1.08575218763451 - 0.112256514478624i	0.854559735371698 + 1.24254844496439e-16i	1.08575218763451 + 0.112256514478624i	1.00111291004558 - 0.142750887743644i	0.812571117616444 + 0.0692725134467787i
61	46.25	0.815134273114691 - 0.0725778240723011i	0.998288354537325 + 0.142642880803403i	1.08641535961742 - 0.110897624646597i	0.855180373104714 + 2.69408779053923e-15i	1.08641535961743 - 0.110897624646593i	0.998288354537319 - 0.142642880803404i	0.815134273114694 + 0.0725778240723058i
62	46.5	0.817900302795417 - 0.0756982189199000i	0.995467007817412 + 0.142328002270621i	1.08695804047520 - 0.109425516043758i	0.855952193760433 + 3.40777987280792e-16i	1.08695804047520 + 0.109425516043757i	0.995467007817411 - 0.142328002270621i	0.817900302795417 + 0.0756982189199006i
63	46.75	0.820855054845314 - 0.0786237664674797i	0.992658887798492 + 0.141809788895922i	1.08737953159030 - 0.107845992498718i	0.856871606518570 + 1.06910671133454e-15i	1.08737953159030 + 0.107845992498716i	0.992658887798490 - 0.141809788895923i	0.820855054845315 + 0.0786237664674814i
64	47	0.823984007006287 - 0.0813455820610382i	0.989873679081713 + 0.141092251475645i	1.08767938719424 - 0.106164872246580i	0.857934921165228 - 1.56063605410317e-15i	1.08767938719424 + 0.106164872246582i	0.989873679081716 - 0.141092251475644i	0.823984007006285 + 0.0813455820610356i
65	47.25	0.827272340410098 - 0.0838558301124888i	0.987120713405718 + 0.140179847408506i	1.08785740879486 - 0.104387974991406i	0.859138356359030 + 2.09007280976197e-15i	1.08785740879486 + 0.104387974991403i	0.987120713405713 - 0.140179847408507i	0.827272340410101 + 0.0838558301124922i
66	47.5	0.830705011871609 - 0.0861477214407866i	0.984408952047630 + 0.139077452731206i	1.08791363915025 - 0.102521109438472i	0.860478047796604 - 3.12307196003656e-16i	1.08791363915025 + 0.102521109438472i	0.984408952047630 - 0.139077452731206i	0.830705011871609 + 0.0861477214407861i
67	47.75	0.834266824354841 - 0.0882155059800326i	0.981746970161885 + 0.137790333757565i	1.08784835582179 - 0.100570061310758i	0.861950056266629 - 1.50747709897430e-15i	1.08784835582178 + 0.100570061310760i	0.981746970161888 - 0.137790333757565i	0.834266824354840 + 0.0882155059800303i
68	48	0.837942495347726 - 0.0900544610932691i	0.979142943035519 + 0.136324118443901i	1.08766206433968 - 0.0985405818634139i	0.863550375580302 + 2.36157277656553e-15i	1.08766206433968 + 0.0985405818634106i	0.979142943035514 - 0.136324118443901i	0.837942495347729 + 0.0900544610932727i
69	48.25	0.841716722903923 - 0.0916608757431952i	0.976604634231857 + 0.134684767600342i	1.08735549101555 - 0.0964383769089444i	0.865274940365444 - 2.62028496965437e-15i	1.08735549101555 + 0.0964383769089481i	0.976604634231862 - 0.134684767600342i	0.841716722903920 + 0.0916608757431913i
70	48.5	0.845574249133658 - 0.0930320307814475i	0.974139385587888 + 0.132878546063742i	1.08692957543670 - 0.0942690963641901i	0.867119633711565 - 3.41475984140592e-15i	1.08692957543669 + 0.0942690963641949i	0.974139385587895 - 0.132878546063742i	0.845574249133654 + 0.0930320307814426i
71	48.75	0.849499920949808 - 0.0941661756262082i	0.971754109024099 + 0.130911993942799i	1.08638546267639 - 0.0920383243278570i	0.869080294654031 - 5.61786786910292e-15i	1.08638546267638 + 0.0920383243278650i	0.971754109024110 - 0.130911993942799i	0.849499920949800 + 0.0941661756262004i
72	49	0.853478747899696 - 0.0950625016032274i	0.969455280120089 + 0.128791898040051i	1.08572449525375 - 0.0897515696950720i	0.871152725486863 + 4.07028545820401e-15i	1.08572449525375 + 0.0897515696950661i	0.969455280120081 - 0.128791898040050i	0.853478747899702 + 0.0950625016032329i
73	49.25	0.857495956937564 - 0.0957211122289359i	0.967248933403796 + 0.126525263548969i	1.08494820487540 - 0.0874142573125804i	0.873332698895440 + 3.61347991363190e-15i	1.08494820487541 + 0.087414257312575i	0.967248933403788 - 0.126525263548969i	0.857495956937570 + 0.0957211122289407i
74	49.5	0.861537044016024 - 0.0961429907155009i	0.965140659297989 + 0.124119286117824i	1.08405830989999 - 0.0850317196760250i	0.875615964902008 - 7.70278239822957e-15i	1.08405830989998 + 0.0850317196760362i	0.965140659298005 - 0.124119286117825i	0.861537044016012 + 0.0961429907154911i
75	49.75	0.865587822397783 - 0.0963299649778499i	0.963135602663447 + 0.121581324365682i	1.08305667718528 - 0.0826091891684464i	0.877998257618170 + 1.85309883014240e-18i	1.08305667718528 + 0.0826091891684464i	0.963135602663447 - 0.121581324365682i	0.865587822397783 + 0.0963299649778499i
76	50	0.869634467610612 - 0.0962846704211674i	0.961238462874893 + 0.118918872929897i	1.08194537245692 - 0.0801517908375138i	0.880475301799415 - 1.40757754452556e-15i	1.08194537245691 + 0.0801517908375159i	0.961238462874896 - 0.118918872929898i	0.869634467610609 + 0.0962846704211658i
77	55	0.932925006644803 - 0.0560080837253349i	0.94947848520271 + 0.0512611414436798i	1.04091078610333 - 0.0304076948240229i	0.943488834162010 + 5.36614355217121e-15i	1.04091078610334 + 0.0304076948240139i	0.94947848520261 - 0.0512611414436753i	0.932925006644814 + 0.0560080837253364i
78	60	0.936689209935222 + 0.0118350187811910i	0.981540703099699 - 0.00926320347736364i	0.981940952400182 + 0.00507448115027707i	1.01242086424281 + 2.11327692168878e-14i	0.981940952400199 - 0.00507448115031564i	0.981540703099668 + 0.00926320347739180i	0.936689209935262 - 0.0118350187812038i
79	65	0.897264048970331 + 0.0525709464121683i	1.02985320256264 - 0.0377796154161863i	0.928164681039211 + 0.0197387100312448i	1.06803957061307 - 1.38266126994743e-14i	0.928164681039203 - 0.0197387100312184i	1.02985320256265 + 0.0377796154161633i	0.897264048970310 + 0.0525709464121508i
80	70	0.852840199448976 + 0.0559593788018865i	1.06985450289859 - 0.0384573688108197i	0.891176055644547 + 0.0195790346654699i	1.10396266994984 - 1.46605880830931e-14i	0.891176055644541 - 0.0195790346654412i	1.06985450289860 + 0.0384573688107925i	0.852840199448960 + 0.0559593788018618i
81	75	0.824172831359681 + 0.0386824162621152i	1.09301839353166 - 0.0260369595575071i	0.871430297621618 + 0.0130934275994120i	1.12254980804999 - 4.0817778776220e-15i	0.871430297621617 - 0.0130934275994039i	1.09301839353166 + 0.0260369595574991i	0.824172831359678 - 0.0386824162621075i
82	80	0.812029485239890 + 0.0185152894556403i	1.10243161655759 - 0.0123670033563117i	0.863670624405518 - 0.00619055121609261i	1.12975585201017 + 3.07925845551823e-15i	0.863670624405518 - 0.00619055121609877i	1.10243161655759 + 0.0123670033563178i	0.812029485239891 - 0.0185152894556464i



83	85	0.809092856424281 + 0.00471325080694968i	1.10467811182442 - 0.00314254146926612i	0.861838913909545 + 0.00157138302044192i	1.13144921813865 - 2.57010683223041e-16i	0.861838913909545 - 0.00157138302044140i	1.10467811182442 + 0.00314254146926561i	0.809092856424281 - 0.00471325080694917i
84	87	0.808920448802633 + 0.00169905317272966i	1.10480965933851 - 0.00113271961269752i	0.861731887142216 + 0.000566365055650950i	1.13154807258616 + 1.58124606892059e-16i	0.861731887142216 - 0.000566365055651267i	1.10480965933851 + 0.00113271961269783i	0.808920448802633 - 0.00169905317272998i
85	87.25	0.808912894161721 + 0.00142778738899409i	1.10481542269117 - 0.000951868642001049i	0.861727198674706 + 0.000475937435818329i	1.13155240282945 + 9.22869606535826e-20i	0.861727198674706 - 0.000475937435818329i	1.10481542269117 + 0.000951868642001050i	0.808912894161721 - 0.00142778738899409i
86	87.5	0.808907140935475 + 0.00118006581713670i	1.10481981171592 - 0.000786716406253699i	0.861723628251039 + 0.000393359961581899i	1.13155570044089 + 1.08930457077712e-16i	0.861723628251039 - 0.000393359961582117i	1.10481981171592 + 0.000786716406253917i	0.808907140935475 - 0.00118006581713692i
87	87.75	0.808902877259818 + 0.000955904291627476i	1.10482306436441 - 0.000637272643136763i	0.861720982275365 + 0.000318637256186071i	1.13155814423340 + 9.40878690380221e-17i	0.861720982275365 - 0.000318637256186259i	1.10482306436441 + 0.000637272643136951i	0.808902877259818 - 0.000955904291627664i
88	88	0.808899820833175 + 0.000755315329428021i	1.10482539601953 - 0.000503545089825598i	0.861719085522136 + 0.000251773005975506i	1.13155989604906 + 1.09303620238227e-16i	0.861719085522136 - 0.000251773005975725i	1.10482539601953 + 0.000503545089825817i	0.808899820833175 - 0.000755315329428239i
89	88.25	0.808897718965510 + 0.000578308671925019i	1.10482699946373 - 0.000385539804414718i	0.861717781158089 + 0.000192770109146963i	1.13156110074028 - 9.51665232573204e-17i	0.861717781158089 - 0.000192770109146773i	1.10482699946373 + 0.000385539804414528i	0.808897718965510 - 0.000578308671924829i
90	88.5	0.808896348618321 + 0.000424891770314038i	1.10482804485253 - 0.000283261453780816i	0.861716930760986 + 0.000141630808961917i	1.13156188615361 - 2.77033856229550e-17i	0.861716930760986 - 0.000141630808961862i	1.10482804485253 + 0.000283261453780760i	0.808896348618321 - 0.000424891770313983i
91	88.75	0.808895516436877 + 0.000295070214258698i	1.10482867969280 - 0.000196713567796218i	0.861716414335422 + 9.83568113852283e-05i	1.13156236311581 + 3.15120431328014e-18i	0.861716414335422 - 9.83568113852346e-05i	1.10482867969280 + 0.000196713567796225i	0.808895516436877 - 0.000295070214258704i
92	89	0.808895058775849 + 0.000188848103665525i	1.10482902882500 - 0.000125898759796775i	0.861716130325976 + 6.29493871042817e-05i	1.13156262542218 + 2.64130270458681e-17i	0.861716130325976 - 6.29493871043345e-05i	1.10482902882500 + 0.000125898759796828i	0.808895058775849 - 0.000188848103665578i
93	89.25	0.808894841719307 + 0.000106228363451057i	1.10482919440909 - 7.08189132425061e-05i	0.861715995627932 + 3.54094579037926e-05i	1.13156274982702 + 2.24210329868025e-18i	0.861715995627932 - 3.54094579037971e-05i	1.10482919440909 + 7.08189132425105e-05i	0.808894841719307 - 0.000106228363451061i
94	89.5	0.808894761095941 + 4.72130012056296e-05i	1.10482925591354 - 3.14753345123769e-05i	0.861715945595785 + 1.57376673687871e-05i	1.13156279603586 + 4.89571606170200e-19i	0.861715945595785 - 1.57376673687881e-05i	1.10482925591354 + 3.14753345123779e-05i	0.808894761095941 - 4.72130012056306e-05i
95	89.75	0.808894742490188 + 1.18033076751092e-05i	1.10482927010715 - 7.86887178927073e-06i	0.861715934049683 + 3.93443589639474e-06i	1.13156280669964 + 7.95285967131926e-21i	0.861715934049683 - 3.93443589639476e-06i	1.10482927010715 + 7.86887178927074e-06i	0.808894742490188 - 1.18033076751092e-05i
96	90	0.808894741249792 + 4.83348797073999e-17i	1.10482927105340 - 3.22232531382664e-17i	0.861715933279935 + 1.61116265691330e-17i	1.13156280741057 + 4.33215673256406e-31i	0.861715933279935 - 1.61116265691339e-17i	1.10482927105340 + 3.22232531382673e-17i	0.808894741249792 - 4.83348797074008e-17i

Tabla A.2 Pesos correspondientes a los ángulos negativos utilizando el ventaneo FPBN.

Índice	ANGULO PROPUESTO PARA LA ELIMINACION	PESOS OBTENIDOS AL INICIALIZAR CON LOS COEFICIENTES DEL FPBN A 15 ITERACIONES DEL ALGORITMO DE LA RNB.						
		W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7
1	-5	0.940448138295702 + 7.69700298594235e-06i	0.973258023742709 + 5.47381395305034e-06i	0.993266370094041 + 2.84280652071419e-06i	0.999990022713631 + 1.55339115044565e-22i	0.993266370094041 - 2.84280652071418e-06i	0.973258023742709 - 5.47381395305034e-06i	0.940448138295702 - 7.69700298594235e-06i
2	-10	0.940556689038593 + 0.00153660171107624i	0.972556391356802 + 0.00136610380159038i	0.991960212839172 + 0.000799029933204416i	0.998460737904632 + 2.27510315314759e-20i	0.991960212839172 - 0.000799029933204416i	0.972556391356802 - 0.00136610380159038i	0.940556689038593 - 0.00153660171107624i
3	-15	1.03005535543887 + 0.0758186828274384i	0.979768003929995 + 0.117193441474829i	0.912612315666490 + 0.0852629805224047i	0.882627407936854 + 8.62628712061947e-16i	0.912612315666489 - 0.0852629805224035i	0.979768003929994 - 0.117193441474829i	1.03005535543887 - 0.0758186828274397i

4	-20	0.799155361092843 + 0.0115943988851370i	0.895787442708391 - 0.118731392177794i	1.06078860855463 - 0.124670034900680i	1.14177728323963 + 2.50513528539281e-14i	1.06078860855459 + 0.124670034900703i	0.895787442708349 + 0.118731392177767i	0.799155361092847 - 0.0115943988851870i
5	-20.25	0.791648342889024 + 0.0180162049518415i	0.888146686091999 - 0.123380533203171i	1.06295235282702 - 0.132717042669084i	1.14989617443075 - 9.45448066482544e-16i	1.06295235282703 + 0.132717042669083i	0.888146686092000 + 0.123380533203172i	0.791648342889024 + 0.0180162049518396i
6	-20.5	0.784923068192924 + 0.0249457719707506i	0.880513514117162 - 0.127316505703697i	1.06469920139550 - 0.140398901749970i	1.15752272613178 + 3.16743108193314e-15i	1.06469920139549 + 0.140398901749973i	0.880513514117157 + 0.127316505703694i	0.784923068192925 - 0.0249457719707569i
7	-20.75	0.779002784252871 + 0.0323119126913350i	0.872930337734340 - 0.130551396500609i	1.06604505810072 - 0.147703218018807i	1.16465688404495 + 6.60779470553712e-15i	1.06604505810071 + 0.147703218018813i	0.872930337734329 + 0.130551396500600i	0.779002784252874 - 0.0323119126913479i
8	-21	0.773904931344767 + 0.0400429643619813i	0.865438176909596 - 0.133099768882416i	1.06700637039738 - 0.154618689526746i	1.17129929722672 - 2.68968815438795e-16i	1.06700637039738 + 0.154618689526746i	0.865438176909597 + 0.133099768882416i	0.773904931344767 + 0.0400429643619808i
9	-21.25	0.769641204731318 + 0.0480672373599310i	0.858076523989091 - 0.134978539931389i	1.06760007108818 - 0.161135117828822i	1.17745130581385 - 3.87236753017914e-15i	1.06760007108818 + 0.161135117828819i	0.858076523989097 + 0.134978539931394i	0.769641204731315 - 0.0480672373599236i
10	-21.5	0.766217650436237 + 0.0563134516402210i	0.850883217297989 - 0.136206850774176i	1.06784352043936 - 0.167243416077401i	1.18311492826040 - 5.70348663461010e-16i	1.06784352043937 + 0.167243416077401i	0.850883217297990 + 0.136206850774176i	0.766217650436237 - 0.0563134516402199i
11	-21.75	0.763634792539286 + 0.0647111585536462i	0.843894324463938 - 0.136805930373859i	1.06775444782921 - 0.172935613761798i	1.18829284699871 - 5.90562642585002e-15i	1.06775444782922 + 0.172935613761793i	0.843894324463947 + 0.136805930373867i	0.763634792539282 - 0.0647111585536351i
12	-22	0.761887790958817 + 0.0731911458155941i	0.837144036439497 - 0.136798953743495i	1.06735089395601 - 0.178204858273428i	1.19298839349950 + 1.02080976145244e-15i	1.06735089395601 + 0.178204858273429i	0.837144036439496 + 0.136798953743494i	0.761887790958818 - 0.0731911458155960i
13	-22.25	0.760966627737246 + 0.0816858235468787i	0.830664572270634 - 0.136210895323588i	1.06665115356612 - 0.183045413323118i	1.19720553254563 + 5.65587020794380e-17i	1.06665115356612 + 0.183045413323118i	0.830664572270634 + 0.136210895323588i	0.760966627737246 + 0.0816858235468788i
14	-22.5	0.760856319427064 + 0.0901295894445441i	0.824486094316065 - 0.135068378224908i	1.06567371828700 - 0.187452654175484i	1.20094884511410 - 2.02648219481606e-15i	1.06567371828701 + 0.187452654175483i	0.824486094316068 + 0.135068378224911i	0.760856319427062 - 0.0901295894445405i
15	-22.75	0.761537154238593 + 0.0984591714422049i	0.818636634811602 - 0.133399520246582i	1.06443722071085 - 0.191423059946501i	1.20422351100987 + 2.23900774170798e-15i	1.06443722071084 + 0.191423059946503i	0.818636634811599 + 0.133399520246578i	0.761537154238595 - 0.0984591714422088i
16	-23	0.762984951285844 + 0.106613946305878i	0.813142033318155 - 0.131233777352551i	1.06296037923269 - 0.194954202935051i	1.20703529057339 + 4.42304058330718e-15i	1.06296037923268 + 0.194954202935054i	0.813142033318149 + 0.131233777352544i	0.762984951285849 - 0.106613946305886i
17	-23.25	0.765171339596463 + 0.114536232834573i	0.808025884988447 - 0.128601785364357i	1.06126194370183 - 0.198044735061449i	1.20939050540477 + 1.25336616843914e-16i	1.06126194370183 + 0.198044735061449i	0.808025884988447 + 0.128601785364357i	0.765171339596463 - 0.114536232834573i
18	-23.5	0.768064054925482 + 0.122171558599261i	0.803309499980651 - 0.125535200687631i	1.05936064251050 - 0.200694371600846i	1.21129601869645 + 3.20123209927321e-16i	1.05936064251050 + 0.200694371600846i	0.803309499980650 + 0.125535200687631i	0.768064054925483 - 0.122171558599261i
19	-23.75	0.771627251843017 + 0.129468899297653i	0.799011873749926 - 0.122066540780143i	1.05727513103694 - 0.202903872276869i	1.21275921497943 + 1.00506673978690e-16i	1.05727513103694 + 0.202903872276869i	0.799011873749926 + 0.122066540780143i	0.771627251843017 - 0.129468899297653i
20	-24	0.775821828604960 + 0.136380890008036i	0.795149667979628 - 0.118229025069553i	1.05502394145396 - 0.204675019805506i	1.21378797920008 + 1.41227280145059e-17i	1.05502394145396 + 0.204675019805506i	0.795149667979628 + 0.118229025069553i	0.775821828604960 - 0.136380890008036i
21	-24.25	0.780605762474136 + 0.142864007854974i	0.791737202039889 - 0.114056417037099i	1.05262543413210 - 0.206010596030530i	1.21439067530359 + 1.92913257349674e-18i	1.05262543413210 + 0.206010596030530i	0.791737202039889 + 0.114056417037099i	0.780605762474136 - 0.142864007854974i
22	-24.5	0.785934453108514 + 0.148878725793140i	0.788786454756901 - 0.109582868146247i	1.05009775077925 - 0.206914355780529i	1.21457612441003 - 2.37603175120049e-18i	1.05009775077925 + 0.206914355780529i	0.788786454756901 + 0.109582868146247i	0.785934453108514 - 0.148878725793140i
23	-24.75	0.791761071614595 + 0.154389637402989i	0.786307076195341 - 0.104842764260585i	1.04745876939571 - 0.207390998569251i	1.21435358260506 - 1.83740094510250e-16i	1.04745876939571 + 0.207390998569251i	0.786307076195342 + 0.104842764260586i	0.791761071614594 - 0.154389637402989i
24	-25	0.798036912909015 + 0.159365552783222i	0.784306409127315 - 0.0998705751685317i	1.04472606112947 - 0.207446138268046i	1.21373271838314 - 1.95616817170902e-18i	1.04472606112947 + 0.207446138268046i	0.784306409127315 + 0.0998705751685317i	0.798036912909015 - 0.159365552783222i
25	-25.25	0.804711749088150 + 0.163779565810703i	0.782789519830687 - 0.0947007078029531i	1.04191684911747 - 0.207086270885909i	1.21272358979284 + 9.64891975481919e-18i	1.04191684911747 + 0.207086270885909i	0.782789519830687 + 0.0947007078029531i	0.804711749088150 - 0.163779565810703i
26	-25.5	0.811734181569243 + 0.167609093215149i	0.781759237825066 - 0.0893673637103843i	1.03904796939022 - 0.206318740596048i	1.21133662133397 - 4.77480804148142e-18i	1.03904796939022 + 0.206318740596048i	0.781759237825066 + 0.0893673637103843i	0.811734181569243 - 0.167609093215149i

27	-25.75	0.819051989848442 + 0.170835886084554i	0.781216204126581 - 0.0839044012895231i	1.03613583391312 - 0.205151704151360i	1.20958258066128 - 3.28001129694028e-18i	1.03613583391312 + 0.205151704151360i	0.781216204126581 + 0.0839044012895231i	0.819051989848442 - 0.170835886084554i
28	-26	0.826612474817319 + 0.173446014576441i	0.781158927580702 - 0.0783452032817981i	1.03319639583647 - 0.203594093833948i	1.20747255515739 - 5.84728274239738e-18i	1.03319639583647 + 0.203594093833948i	0.781158927580702 + 0.0783452032817981i	0.826612474817319 - 0.173446014576441i
29	-26.25	0.834362794660164 + 0.175429826752975i	0.781583848789565 - 0.0727225499559272i	1.03024511699236 - 0.201655579079023i	1.20501792840662 + 0.00000000000000i	1.03024511699236 + 0.201655579079023i	0.781583848789565 + 0.0727225499559272i	0.834362794660164 - 0.175429826752975i
30	-26.5	0.842250291425103 + 0.176781882586319i	0.782485411094349 - 0.0670684983867842i	1.02729693762420 - 0.199346526905372i	1.20223035654937 - 1.93321373263298e-18i	1.02729693762420 + 0.199346526905372i	0.782485411094349 + 0.0670684983867842i	0.842250291425103 - 0.176781882586319i
31	-26.75	0.850222806538504 + 0.177500864318534i	0.783856138108042 - 0.0614142681961040i	1.02436624839776 - 0.196677961300444i	1.19912174457929 - 2.01698196290694e-19i	1.02436624839776 + 0.196677961300444i	0.783856138108042 + 0.0614142681961040i	0.850222806538504 - 0.177500864318534i
32	-27	0.858228983768072 + 0.177589464497536i	0.785686717372919 - 0.0557901340885052i	1.02146686485685 - 0.193661521733065i	1.19570422278991 - 2.14053240956101e-18i	1.02146686485685 + 0.193661521733065i	0.785686717372919 + 0.0557901340885052i	0.858228983768072 - 0.177589464497536i
33	-27.25	0.866218558104431 + 0.177054253077019i	0.787966089550436 - 0.0502253254590152i	1.01861200427784 - 0.190309420925251i	1.19199012334181 - 3.46123869586196e-19i	1.01861200427784 + 0.190309420925251i	0.787966089550436 + 0.0502253254590152i	0.866218558104431 - 0.177054253077019i
34	-27.5	0.874142629016979 + 0.175905525024600i	0.790681542413202 - 0.0447479333018414i	1.01581426470605 - 0.186634401981510i	1.18799195672850 + 1.07516411587601e-17i	1.01581426470605 + 0.186634401981510i	0.790681542413202 + 0.0447479333018414i	0.874142629016979 - 0.175905525024600i
35	-27.75	0.881953917074422 + 0.174157130037971i	0.793818809249466 - 0.0393848246365896i	1.01308560639552 - 0.182649695060544i	1.18372238843944 + 1.43020265130760e-18i	1.01308560639552 + 0.182649695060544i	0.793818809249466 + 0.0393848246365896i	0.881953917074422 - 0.174157130037971i
36	-28	0.889607003045509 + 0.171826286026780i	0.797362171259184 - 0.0341615646169653i	1.01043733582532 - 0.178368973762555i	1.17919421607189 + 1.00321993093894e-16i	1.01043733582532 + 0.178368973762555i	0.797362171259184 + 0.0341615646169653i	0.889607003045509 - 0.171826286026780i
37	-30	0.940456164733079 + 0.135219189799434i	0.838048674867436 - 7.66089579517134e-17i	0.993277356763222 - 1.035219189799434i	1.13522059082347 - 7.00402051360406e-32i	0.993277356763222 + 1.035219189799434i	0.838048674867436 + 7.66089579517134e-17i	0.940456164733079 - 0.135219189799434i
38	-35	0.940004788928073 - 0.000542517122600573i	0.973898784415624 - 0.000314627046221913i	0.993438499547501 + 0.000686675683351156i	0.999295494756359 - 8.03977481690118e-20i	0.993438499547501 - 0.000686675683351156i	0.973898784415624 + 0.000314627046221913i	0.940004788928073 + 0.000542517122600573i
39	-40	0.834952669648039 - 0.0241531434579543i	1.04078628255402 - 0.0845900908416136i	1.04021596964899 + 0.0975243748213773i	0.891768485292890 - 2.50561860836052e-16i	1.04021596964899 - 0.0975243748213773i	1.04078628255402 + 0.0845900908416136i	0.834952669648039 + 0.0241531434579543i
40	-41	0.819244259869237 - 0.0121586121947224i	1.04106842833116 - 0.101208184171901i	1.05063796583892 + 0.107469909734971i	0.878181213053918 + 7.67434975003776e-17i	1.05063796583892 - 0.107469909734971i	1.04106842833116 + 0.101208184171901i	0.819244259869237 + 0.0121586121947224i
41	-41.25	0.816004758159291 - 0.00860044975330371i	1.04054310034006 - 0.105052455764512i	1.05314992182389 + 0.109440656662642i	0.875253172347558 - 8.08760727075867e-17i	1.05314992182389 - 0.109440656662642i	1.04054310034006 + 0.105052455764512i	0.816004758159291 + 0.00860044975330355i
42	-41.5	0.813061491363305 - 0.00486098215887374i	1.03979726227097 - 0.108750757308608i	1.05561179178073 + 0.111208404747990i	0.872514021180478 - 1.94484612604930e-15i	1.05561179178074 - 0.111208404747988i	1.03979726227097 + 0.108750757308610i	0.813061491363305 + 0.00486098215886986i
43	-41.75	0.810422281806243 - 0.000962064934567303i	1.03884069712254 - 0.112293351427630i	1.05801760463174 + 0.112775414192657i	0.869963959182953 + 6.8527362495955e-17i	1.05801760463174 - 0.112775414192657i	1.03884069712254 + 0.112293351427630i	0.810422281806243 + 0.000962064934567440i
44	-42	0.808093378563344 + 0.00307428406294368i	1.03768360472285 - 0.115671209806109i	1.06036161411194 + 0.114144280779773i	0.867602917607941 - 1.91733082673268e-16i	1.06036161411194 - 0.114144280779772i	1.03768360472285 + 0.115671209806110i	0.808093378563344 - 0.00307428406294406i
45	-42.25	0.806079476678508 + 0.00722599370841898i	1.03633655337315 - 0.118876024007539i	1.06263830810483 + 0.115317919353938i	0.865430566829039 + 7.00531643663439e-17i	1.06263830810483 - 0.115317919353938i	1.03633655337315 + 0.118876024007539i	0.806079476678508 - 0.00722599370841884i
46	-42.5	0.804383743443610 + 0.0114710449893961i	1.03481043183108 - 0.121900213237403i	1.06484241704210 + 0.116299547077993i	0.863446324045609 - 9.28652712341305e-17i	1.06484241704210 - 0.116299547077993i	1.03481043183108 + 0.121900213237404i	0.804383743443610 - 0.0114710449893963i
47	-42.75	0.803007851316226 + 0.0157875722979216i	1.03311640180819 - 0.124736929136218i	1.06696892137452 + 0.117092666517316i	0.861649361177778 - 2.61981447797716e-16i	1.06696892137452 - 0.117092666517316i	1.03311640180819 + 0.124736929136218i	0.803007851316226 - 0.0157875722979221i
48	-43	0.801952017037055 + 0.0201539602663423i	1.03126585114673 - 0.127380057694215i	1.06901305812276 + 0.117701048599416i	0.860038612936237 + 2.74783951060642e-16i	1.06901305812276 - 0.117701048599416i	1.03126585114673 + 0.127380057694215i	0.801952017037055 - 0.0201539602663418i
49	-43.25	0.801215046494618 + 0.0245489358204474i	1.02927034783105 - 0.129824218385959i	1.07097032651796 + 0.118128715494187i	0.858612785053270 - 6.83364686286355e-16i	1.07097032651796 - 0.118128715494186i	1.02927034783105 + 0.129824218385960i	0.801215046494619 - 0.0245489358204487i



50	-43.5	0.800794384872607 + 0.0289516551628955i	1.02714159498002 - 0.132064760630556i	1.07283649274416 + 0.118379923459198i	0.857370362661170 - 7.50954232875353e-17i	1.07283649274416 - 0.118379923459197i	1.02714159498002 + 0.132064760630556i	0.800794384872607 - 0.0289516551628957i
51	-43.75	0.800686171604407 + 0.0333417854397725i	1.02489138695832 - 0.134097757691446i	1.07460759379765 + 0.118459621769748e-15i	0.856309618802289 - 4.38459621769748e-15i	1.07460759379765 - 0.118459145694787i	1.02489138695832 + 0.134097757691449i	0.800686171604409 - 0.0333417854397810i
52	-44	0.800885299650710 + 0.0376995808836191i	1.02253156673544 - 0.135919998138577i	1.07627994048217 + 0.118371055254793i	0.855428623051975 - 1.59694339297817e-16i	1.07627994048217 - 0.118371055254793i	1.02253156673544 + 0.135919998138577i	0.800885299650710 - 0.0376995808836194i
53	-44.25	0.801385478610329 + 0.0420059532667518i	1.02007398461227 - 0.137528975004197i	1.07785011956277 + 0.118120508059781i	0.854725250232394 - 3.25712427357658e-17i	1.07785011956277 - 0.118120508059781i	1.02007398461227 + 0.137528975004197i	0.801385478610329 - 0.0420059532667519i
54	-44.5	0.802179301172201 + 0.0462425365395318i	1.01753045842467 - 0.138922872771197i	1.07931499510512 + 0.117712526060306i	0.854197189192355 - 3.48546925885253e-15i	1.07931499510513 - 0.117712526060302i	1.01753045842466 + 0.138922872771199i	0.802179301172203 - 0.0462425365395384i
55	-44.75	0.803258312418439 + 0.0503917455678381i	1.01491273532271 - 0.140100552338787i	1.08067170903055 + 0.117152280597066i	0.853841951626415 + 8.9474062777531e-16i	1.08067170903054 - 0.117152280597067i	1.01491273532271 + 0.140100552338786i	0.803258312418439 - 0.0503917455678364i
56	-45	0.804613081494717 + 0.0544368289225696i	1.01223245521238 - 0.141061534114019i	1.08191768091927 + 0.116445076003020i	0.853656880906321 - 3.98231546431687e-15i	1.08191768091928 - 0.116445076003015i	1.01223245521237 + 0.141061534114021i	0.804613081494720 - 0.0544368289225769i
57	-45.25	0.806233275175357 + 0.0583619157103628i	1.00950111593430 - 0.141805979378643i	1.08305060709574 + 0.115596333488739i	0.853639160899640 - 2.55825666690730e-15i	1.08305060709574 - 0.115596333488736i	1.00950111593429 + 0.141805979378645i	0.806233275175359 - 0.0583619157103674i
58	-45.5	0.808107732865275 + 0.0621520564677667i	1.00673004024178 - 0.142334670078994i	1.08406845902924 + 0.114611575347511i	0.853785824753994 - 1.81360120765060e-15i	1.08406845902924 - 0.114611575347508i	1.00673004024178 + 0.142334670078995i	0.808107732865276 - 0.0621520564677700i
59	-45.75	0.810224542599015 + 0.0657932581717974i	1.00393034462852 - 0.142648987183004i	1.08496948108194 + 0.113496409510723i	0.854093763630097 + 5.14253906411322e-17i	1.08496948108194 - 0.113496409510723i	1.00393034462852 + 0.142648987183004i	0.810224542599015 - 0.0657932581717973i
60	-46	0.812571117616443 + 0.0692725134467784i	1.00111291004558 - 0.142750887743644i	1.08575218763451 + 0.112256514478624i	0.854559735371698 - 1.24254844496439e-16i	1.08575218763451 - 0.112256514478624i	1.00111291004558 + 0.142750887743644i	0.812571117616444 - 0.0692725134467787i
61	-46.25	0.815134273114691 + 0.0725778240723011i	0.998288354537325 - 0.142642880803403i	1.08641535961742 + 0.110897624646597i	0.855180373104714 - 2.69408779053923e-15i	1.08641535961743 - 0.110897624646593i	0.998288354537319 + 0.142642880803404i	0.815134273114694 - 0.0725778240723058i
62	-46.5	0.817900302795417 + 0.0756982189199000i	0.995467007817412 - 0.142328002270621i	1.08695804047520 + 0.109425516043758i	0.855952193760433 - 3.40777987280792e-16i	1.08695804047520 - 0.109425516043757i	0.995467007817411 + 0.142328002270621i	0.817900302795417 - 0.0756982189199006i
63	-46.75	0.82085054845314 + 0.0786237664674797i	0.992658887798492 - 0.141809788895922i	1.08737953159030 + 0.107845992498718i	0.856871606518570 - 1.06910671133454e-15i	1.08737953159030 - 0.107845992498716i	0.992658887798490 + 0.141809788895923i	0.82085054845315 - 0.0786237664674814i
64	-47	0.823984007006287 + 0.0813455820610382i	0.989873679081713 - 0.141092251475645i	1.08767938719424 + 0.106164872246580i	0.857934921165228 + 1.56063605410317e-15i	1.08767938719424 - 0.106164872246582i	0.989873679081716 + 0.141092251475644i	0.823984007006285 - 0.0813455820610356i
65	-47.25	0.827272340410098 + 0.0838558301124888i	0.987120713405718 - 0.140179847408506i	1.08785740879486 + 0.104387974991406i	0.859138356359030 - 2.09007280976197e-15i	1.08785740879486 - 0.104387974991403i	0.987120713405713 + 0.140179847408507i	0.827272340410101 - 0.0838558301124922i
66	-47.5	0.830705011871609 + 0.0861477214407866i	0.984408952047630 - 0.139077452731206i	1.08791363915025 + 0.102521109438472i	0.860478047796604 + 3.12307196003656e-16i	1.08791363915025 - 0.102521109438472i	0.984408952047630 + 0.139077452731206i	0.830705011871609 - 0.0861477214407861i
67	-47.75	0.834266824354841 + 0.0882155059800326i	0.981746970161885 - 0.137790333757565i	1.08784835582179 + 0.100570061310758i	0.861950056266629 + 1.50747709897430e-15i	1.08784835582178 - 0.100570061310760i	0.981746970161888 + 0.137790333757565i	0.834266824354840 - 0.0882155059800303i
68	-48	0.837942495347726 + 0.0900544610932691i	0.979142943035519 - 0.136324118443901i	1.08766206433968 + 0.0985405818634139i	0.863550375580302 - 2.36157277656553e-15i	1.08766206433968 - 0.0985405818634106i	0.979142943035514 + 0.136324118443901i	0.837942495347729 - 0.0900544610932727i
69	-48.25	0.841716722903923 + 0.0916608757431952i	0.976604634231857 - 0.134684767600342i	1.08735549101555 + 0.0964383769089444i	0.865274940365444 + 2.62028496965437e-15i	1.08735549101555 - 0.0964383769089481i	0.976604634231862 + 0.134684767600342i	0.841716722903920 - 0.0916608757431913i
70	-48.5	0.845574249133658 + 0.0930320307814475i	0.974139385587888 - 0.132878546063742i	1.08692957543670 + 0.0942690963641901i	0.867119633711565 + 3.41475984140592e-15i	1.08692957543669 - 0.0942690963641949i	0.974139385587895 + 0.132878546063742i	0.845574249133654 - 0.0930320307814426i
71	-48.75	0.84949920949808 + 0.0941661756262082i	0.971754109024099 - 0.130911993942799i	1.08638546267639 + 0.0920383243278570i	0.869080294654031 + 5.61786786910292e-15i	1.08638546267638 - 0.0920383243278650i	0.971754109024110 + 0.130911993942799i	0.84949920949800 - 0.0941661756262004i
72	-49	0.853478747899696 + 0.0950625016032274i	0.969455280120089 - 0.128791898040051i	1.08572449525375 + 0.0897515696950720i	0.871152725486863 - 4.07028545820401e-15i	1.08572449525375 - 0.0897515696950661i	0.969455280120081 + 0.128791898040050i	0.853478747899702 - 0.0950625016032329i

73	-49.25	0.857495956937564 + 0.0957211122289359i	0.967248933403796 - 0.126525263548969i	1.08494820487540 + 0.0874142573125804i	0.873332698895440 - 3.61347991363190e-15i	1.08494820487541 - 0.0874142573125751i	0.967248933403788 + 0.126525263548969i	0.857495956937570 - 0.0957211122289407i
74	-49.5	0.861537044016024 + 0.0961429907155009i	0.965140659297989 - 0.124119286117824i	1.08405830398999 + 0.0850317196760250i	0.875615964902008 + 7.70278239822957e-15i	1.08405830398998 - 0.0850317196760362i	0.965140659298005 + 0.124119286117825i	0.861537044016012 + 0.0961429907154911i
75	-49.75	0.865587822397783 + 0.0963299649778499i	0.963135602663447 - 0.121581324365682i	1.08305667718528 + 0.0826091891684464i	0.877998257618170 + 1.85309883014240e-18i	1.08305667718528 - 0.0826091891684464i	0.963135602663447 + 0.121581324365682i	0.865587822397783 - 0.0963299649778499i
76	-50	0.869634467610612 + 0.0962846704211674i	0.961238462874893 - 0.118918872929897i	1.08194537245692 + 0.0801517908375138i	0.880475301799415 + 1.40757754452556e-15i	1.08194537245691 - 0.0801517908375159i	0.961238462874896 + 0.118918872929898i	0.869634467610609 - 0.0962846704211658i
77	-55	0.932925006644803 + 0.0560080837253349i	0.949478485240271 - 0.0512611414436798i	1.04091078610333 + 0.0304076948240229i	0.943488834162010 - 5.36614355217121e-15i	1.04091078610334 - 0.0304076948240139i	0.949478485240261 + 0.0512611414436753i	0.932925006644814 - 0.0560080837253364i
78	-60	0.936689209935222 - 0.0118350187811910i	0.981540703099699 + 0.00926320347736364i	0.981940952400182 - 0.00507448115027707i	1.01242086424281 - 2.11327692168878e-14i	0.981940952400199 + 0.00507448115031564i	0.981540703099668 - 0.00926320347739180i	0.936689209935262 + 0.0118350187812038i
79	-65	0.897264048970331 - 0.0525709464121683i	1.02985320256264 + 0.0377796154161863i	0.928164681039211 - 0.0197387100312448i	1.06803957061307 + 1.38266126994743e-14i	0.928164681039203 + 0.0197387100312184i	1.02985320256265 + 0.0377796154161633i	0.897264048970310 + 0.0525709464121508i
80	-70	0.852840199448976 - 0.0559593788018865i	1.06985450289859 + 0.0384573688108197i	0.891176055644547 - 0.0195790346654699i	1.10396266994984 + 1.46605880830931e-14i	0.891176055644541 + 0.0195790346654412i	1.06985450289860 - 0.0384573688107925i	0.852840199448960 + 0.0559593788018618i
81	-75	0.824172831359681 - 0.0386824162621152i	1.09301839353166 + 0.0260369595575071i	0.871430297621618 - 0.0130934275994120i	1.12254980804999 + 4.0817778776220e-15i	0.871430297621617 + 0.0130934275994039i	1.09301839353166 + 0.0260369595574991i	0.824172831359678 + 0.0386824162621075i
82	-80	0.812029485239890 - 0.0185152894556403i	1.10243161655759 + 0.0123670033563117i	0.863670624405518 - 0.00619055121609261i	1.12975585201017 - 3.07925845551823e-15i	0.863670624405518 + 0.00619055121609877i	1.10243161655759 - 0.0123670033563178i	0.812029485239891 + 0.0185152894556464i
83	-85	0.809092856424281 - 0.00471325080694968i	1.10467811182442 + 0.00314254146926612i	0.861838913909545 - 0.00157138302044192i	1.13144921813865 + 2.57010683223041e-16i	0.861838913909545 + 0.00157138302044140i	1.10467811182442 - 0.00314254146926561i	0.809092856424281 + 0.00471325080694917i
84	-87	0.808920448802633 - 0.00169905317272966i	1.10480965933851 + 0.00113271961269752i	0.861731887142216 - 0.000566365055650950i	1.13154807258616 - 1.58124606892059e-16i	0.861731887142216 + 0.000566365055651267i	1.10480965933851 - 0.00113271961269783i	0.808920448802633 + 0.00169905317272998i
85	-87.25	0.808912894161721 - 0.00142778738899409i	1.10481542269117 + 0.000951868642001049i	0.861727198674706 - 0.000475937435818329i	1.13155240282945 - 9.22869606535826e-20i	0.861727198674706 + 0.000475937435818329i	1.10481542269117 - 0.000951868642001050i	0.808912894161721 + 0.00142778738899409i
86	-87.5	0.808907140935475 - 0.00118006581713670i	1.10481981171592 + 0.000786716406253699i	0.861723628251039 - 0.000393359961581899i	1.13155570044089 - 1.08930457077712e-16i	0.861723628251039 + 0.000393359961582117i	1.10481981171592 - 0.000786716406253917i	0.808907140935475 + 0.00118006581713692i
87	-87.75	0.808902877259818 - 0.000955904291627476i	1.10482306436441 + 0.000637272643136763i	0.861720982275365 - 0.000318637256186071i	1.13155814423340 - 9.40878690380221e-17i	0.861720982275365 + 0.000318637256186259i	1.10482306436441 - 0.000637272643136951i	0.808902877259818 + 0.000955904291627664i
88	-88	0.80889820833175 - 0.000755315329428021i	1.10482539601953 + 0.000503545089825598i	0.861719085522136 - 0.000251773005975506i	1.13155989604906 - 1.09303620238227e-16i	0.861719085522136 + 0.000251773005975725i	1.10482539601953 - 0.000503545089825817i	0.80889820833175 + 0.000755315329428239i
89	-88.25	0.808897718965510 - 0.000578308671925019i	1.10482699946373 + 0.000385539804414718i	0.861717781158089 - 0.000192770109146963i	1.13156110074028 + 9.51665232573204e-17i	0.861717781158089 + 0.000192770109146773i	1.10482699946373 - 0.000385539804414528i	0.808897718965510 + 0.000578308671924829i
90	-88.5	0.808896348618321 - 0.000424891770314038i	1.10482804485253 + 0.000283261453780816i	0.861716930760986 - 0.000141630808961917i	1.13156188615361 + 2.77033856229550e-17i	0.861716930760986 + 0.000141630808961862i	1.10482804485253 - 0.000283261453780760i	0.808896348618321 + 0.000424891770313983i
91	-88.75	0.808895516436877 - 0.000295070214258698i	1.10482867969280 + 0.000196713567796218i	0.861716414335422 - 9.83568113852283e-05i	1.13156236311581 - 3.15120431328014e-18i	0.861716414335422 + 9.83568113852346e-05i	1.10482867969280 - 0.000196713567796225i	0.808895516436877 + 0.000295070214258704i
92	-89	0.808895058775849 - 0.000188848103665525i	1.10482902882500 + 0.000125898759796775i	0.861716130325976 - 6.29493871042817e-05i	1.13156262542218 - 2.64130270458681e-17i	0.861716130325976 + 6.29493871043345e-05i	1.10482902882500 - 0.000125898759796828i	0.808895058775849 + 0.000188848103665578i
93	-89.25	0.808894841719307 - 0.000106228363451057i	1.10482919440909 + 7.08189132425061e-05i	0.861715995627932 - 3.54094579037926e-05i	1.13156274982702 - 2.24210329868025e-18i	0.861715995627932 + 3.54094579037971e-05i	1.10482919440909 - 7.08189132425105e-05i	0.808894841719307 + 0.000106228363451061i
94	-89.5	0.808894761095941 - 4.72130012056296e-05i	1.10482925591354 + 3.14753345123769e-05i	0.861715945595785 - 1.57376673687871e-05i	1.13156279603586 - 4.89571606170200e-19i	0.861715945595785 + 1.57376673687881e-05i	1.10482925591354 - 3.14753345123779e-05i	0.808894761095941 + 4.72130012056306e-05i
95	-89.75	0.808894742490188 - 1.18033076751092e-05i	1.10482927010715 + 7.86887178927073e-06i	0.861715934049683 - 3.93443589639474e-06i	1.13156280699964 - 7.952887131926e-21i	0.861715934049683 + 3.93443589639476e-06i	1.10482927010715 - 7.86887178927074e-06i	0.808894742490188 + 1.18033076751092e-05i

96	-90	0.808894741249792 - 4.83348797073999e-17i	1.10482927105340 + 3.22232531382664e-17i	0.861715933279935 - 1.61116265691330e-17i	1.13156280741057 - 4.33215673256406e-31i	0.861715933279935 + 1.61116265691339e-17i	1.10482927105340 - 3.22232531382673e-17i	0.808894741249792 + 4.83348797074008e-17i
----	-----	--	---	--	---	--	---	--

Tabla A.3 Pesos correspondientes a los ángulos positivos utilizando el ventaneo Kaiser.



Índice	ANGULO PROPUUESTO PARA LA ELIMINACION	PESOS OBTENIDOS AL INICIALIZAR CON VENTANA DE KAISER A 15 ITERACIONES DEL ALGORITMO DE LA RNB.						
		W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7
1	5	0.940299564875515 - 7.70072862200000e-06i	0.973231781891278 - 5.47646348265221e-06i	0.993265875333068 - 2.84418254483441e-06i	0.999990018060899 + 1.55998843237930e-22i	0.993265875333068 + 2.84418254483441e-06i	0.973231781891278 + 5.47646348265221e-06i	0.940299564875515 + 7.70072862174801e-06i
2	10	0.940408118968946 - 0.00153659828154281i	0.972530155546484 - 0.00136610075259035i	0.991959726025689 - 0.000799028149853630i	0.998460741887829 + 2.34487031000490e-20i	0.991959726025689 + 0.000799028149853630i	0.972530155546484 + 0.00136610075259035i	0.940408118968946 + 0.00153659828154281i
3	15	1.02993176574734 - 0.0758398206368203i	0.979743579151534 - 0.117226114327143i	0.912589337385933 - 0.0852867513472507i	0.882594685711031 - 1.94735568321026e-16i	0.912589337385933 + 0.0852867513472504i	0.979743579151534 + 0.117226114327143i	1.02993176574734 + 0.0758398206368206i
4	20	0.799052973067059 - 0.0115906094954862i	0.895786528756721 + 0.118692587275841i	1.06076605471570 + 0.124629289076101i	1.14173094783877 + 5.55990179814929e-16i	1.06076605471570 - 0.124629289076101i	0.895786528756721 - 0.118692587275842i	0.799052973067059 + 0.0115906094954850i
5	20.25	0.791545770495348 - 0.0180106361038846i	0.888146760466060 + 0.123342396013268i	1.06293032701345 + 0.132676019543889i	1.14984984280814 - 4.11034534996468e-15i	1.06293032701344 - 0.132676019543892i	0.888146760466054 - 0.123342396013264i	0.791545770495348 + 0.0180106361038927i
6	20.5	0.784820178713060 - 0.0249384454611791i	0.880514519126825 + 0.127279113170842i	1.06467773592060 + 0.140357666950781i	1.15747646375698 - 5.88497255371888e-16i	1.06467773592060 - 0.140357666950782i	0.880514519126824 - 0.127279113170842i	0.784820178713060 + 0.0249384454611803i
7	20.75	0.778899447572611 - 0.0323028602589314i	0.872932211421748 + 0.130514821516506i	1.06602418266377 + 0.147661837819171i	1.16461075583263 + 3.65281178542888e-17i	1.06602418266377 - 0.147661837819171i	0.872932211421748 - 0.130514821516506i	0.778899447572611 + 0.0323028602589313i
8	21	0.773801020695748 - 0.0400322274004148i	0.865440853345378 + 0.133064080038540i	1.06698611204845 + 0.154577230684881i	1.17125336744260 + 2.97795088255458e-15i	1.06698611204846 - 0.154577230684878i	0.865440853345383 - 0.133064080038544i	0.773801020695746 + 0.0400322274004090i
9	21.25	0.769536597400988 - 0.0480548665759077i	0.858079933579904 + 0.134943801293251i	1.06758045419903 + 0.161093647425062i	1.17740563798007 + 1.82721242009516e-15i	1.06758045419903 - 0.161093647425061i	0.858079933579907 + 0.134943801293253i	0.769536597400987 + 0.0480548665759042i
10	21.5	0.766112228443874 - 0.0562995066600076i	0.850887287105762 + 0.136173121677779i	1.06782456668241 + 0.167202001352146i	1.18306958506306 - 5.23455433090365e-16i	1.06782456668241 - 0.167202001352146i	0.850887287105762 - 0.136173121677778i	0.766112228443875 + 0.0562995066600086i
11	21.75	0.763528443277398 - 0.0646957074814531i	0.843898978538418 + 0.136773265245421i	1.06773617616860 + 0.172894321955071i	1.18824789020198 - 6.04880975670635e-16i	1.06773617616860 - 0.172894321955071i	0.843898978538417 - 0.136773265245420i	0.763528443277399 + 0.0646957074814543i
12	22	0.761780407788996 - 0.0731742647468562i	0.837149196154286 + 0.136767401941486i	1.06733332064055 + 0.178163756464889i	1.19294388385544 + 1.48072764673198e-16i	1.06733332064055 - 0.178163756464889i	0.837149196154286 - 0.136767401941486i	0.761780407788996 + 0.0731742647468559i
13	22.25	0.760858110546252 - 0.0816675960406935i	0.830670156670665 + 0.136180501005096i	1.06663429213577 + 0.183004568274874i	1.19716152971283 + 1.10105745655811e-15i	1.06663429213577 - 0.183004568274873i	0.830670156670667 - 0.136180501005097i	0.760858110546251 + 0.0816675960406915i
14	22.5	0.760746575135844 - 0.0901101059590211i	0.824492020469751 + 0.135039180235575i	1.06565757958646 + 0.187412132177148i	1.20090540757828 - 7.94748755762936e-16i	1.06565757958646 - 0.187412132177149i	0.824492020469750 - 0.135039180235574i	0.760746575135845 + 0.0901101059590225i
15	22.75	0.761426097258952 - 0.0984385287363470i	0.818642818163102 + 0.133371552033788i	1.06442181290627 + 0.191382926662184i	1.20418069600238 - 4.23272533670910e-16i	1.06442181290627 - 0.191382926662184i	0.818642818163102 - 0.133371552033787i	0.761426097258953 + 0.0984385287363477i
16	23	0.762872503930183 - 0.106592246813008i	0.813148388045925 + 0.131207066903163i	1.06294570784129 + 0.194914523254449i	1.20699315399870 - 4.10488429514729e-16i	1.06294570784129 - 0.194914523254449i	0.813148388045925 - 0.131207066903163i	0.762872503930184 + 0.106592246813008i

17	23.25	0.765057432434721 - 0.114513584011257i	0.808032324363896 + 0.128576355166046i	1.06124801162822 + 0.198005572954384i	1.20934910177050 + 4.39491231734511e-18i	1.06124801162822 - 0.198005572954384i	0.808032324363896 - 0.128576355166046i	0.765057432434721 + 0.114513584011257i
18	23.5	0.767948627086051 - 0.122148072253795i	0.803315936723398 + 0.125511067713268i	1.05934745008711 + 0.200655789975150i	1.21125540104334 + 1.55865043311613e-17i	1.05934745008711 - 0.200655789975150i	0.803315936723398 - 0.125511067713268i	0.767948627086051 + 0.122148072253795i
19	23.75	0.771510251259760 - 0.129444690902912i	0.799018220381328 + 0.122043716495547i	1.05726267607239 + 0.202865932840748i	1.21271943481582 + 2.77146315413063e-17i	1.05726267607239 - 0.202865932840748i	0.799018220381328 - 0.122043716495547i	0.771510251259760 + 0.129444690902912i
20	24	0.775703212209901 - 0.136356078003233i	0.795155837173045 + 0.118207515464081i	1.05501221928913 + 0.204637782934752i	1.21374908644121 + 7.97941437595641e-17i	1.05501221928913 - 0.204637782934752i	0.795155837173045 - 0.118207515464081i	0.775703212209901 + 0.136356078003233i
21	24.25	0.780485496334543 - 0.142838712940540i	0.791743106965183 + 0.114036222676371i	1.05261443770211 + 0.205974120640560i	1.21435271821390 - 1.61717767817638e-17i	1.05261443770211 - 0.205974120640560i	0.791743106965183 - 0.114036222676371i	0.780485496334543 + 0.142838712940540i
22	24.5	0.785812512508494 - 0.148853070223048i	0.788792009417711 + 0.109563984246351i	1.05008747068096 + 0.206878699203476i	1.21453914954847 - 5.45210805367018e-19i	1.05008747068096 - 0.206878699203476i	0.788792009417711 - 0.109563984246351i	0.785812512508494 + 0.148853070223048i
23	24.75	0.791637441081946 - 0.154363744278861i	0.786312195758065 + 0.104825180783128i	1.04744919396076 + 0.207356216436465i	1.21431763477381 + 1.37832880900010e-17i	1.04744919396076 - 0.207356216436465i	0.786312195758065 - 0.104825180783128i	0.791637441081946 + 0.154363744278861i
24	25	0.797911586188216 - 0.159339545354444i	0.784311010240555 + 0.099854276935787i	1.04471717650261 + 0.207412284398297i	1.21369784057992 - 1.85643341165205e-17i	1.04471717650261 - 0.207412284398297i	0.784311010240555 - 0.099854276935787i	0.797911586188216 + 0.159339545354444i
25	25.25	0.804584729060606 - 0.163753566784619i	0.782793520933933 + 0.0946856746322380i	1.04190863933989 + 0.207053397179523i	1.21268982316681 - 6.78163834864322e-16i	1.04190863933989 - 0.207053397179523i	0.782793520933933 - 0.0946856746322392i	0.804584729060606 + 0.163753566784619i
26	25.5	0.811605480122300 - 0.167583224081276i	0.781762559445516 + 0.0893535705667583i	1.03904041648746 + 0.206286896935190i	1.21130400514527 - 9.45499140566442e-17i	1.03904041648746 - 0.206286896935190i	0.781762559445515 - 0.0893535705667581i	0.811605480122300 + 0.167583224081276i
27	25.75	0.818921627695040 - 0.170810266456583i	0.781218769163164 + 0.0838918184558138i	1.03612891798750 + 0.205120938306675i	1.20955115224448 - 4.08497470615547e-18i	1.03612891798750 - 0.205120938306675i	0.781218769163164 - 0.0838918184558138i	0.818921627695040 + 0.170810266456583i
28	26	0.826480481268265 - 0.173420761555558i	0.781160661574305 + 0.0783337965448987i	1.03319009516342 + 0.203564451377673i	1.20744234988860 - 6.32495697549958e-17i	1.03319009516342 - 0.203564451377673i	0.781160661574305 - 0.0783337965448985i	0.826480481268265 + 0.173420761555558i
29	26.25	0.834229207350811 - 0.175405054315742i	0.781584680178144 + 0.0727122808082138i	1.03023940811989 + 0.201627103304590i	1.20498897967379 + 2.94796963854477e-16i	1.03023940811989 - 0.201627103304590i	0.781584680178145 - 0.0727122808082143i	0.834229207350810 + 0.175405054315742i
30	26.5	0.842115155998803 - 0.176757701000212i	0.782485271452042 + 0.0670593242415319i	1.02729179547498 + 0.199319258753596i	1.20220269572544 + 6.38013816602626e-18i	1.02729179547498 - 0.199319258753596i	0.782485271452042 - 0.0670593242415319i	0.842115155998803 + 0.176757701000212i
31	26.75	0.850086176290615 - 0.177477379588270i	0.783854962368527 + 0.0614061426158232i	1.02436164637469 + 0.196651939292677i	1.19909540099989 - 2.24486005758254e-17i	1.02436164637469 - 0.196651939292677i	0.783854962368527 - 0.0614061426158232i	0.850086176290615 + 0.177477379588270i
32	27	0.858090919253684 - 0.177566777844878i	0.785684444036617 + 0.0557830070249859i	1.02146277495210 + 0.193636781911425i	1.19567922373580 - 8.14528545594518e-18i	1.02146277495210 - 0.193636781911425i	0.785684444036617 - 0.0557830070249858i	0.858090919253684 + 0.177566777844878i
33	27.25	0.866079126710949 - 0.177032460456037i	0.787962660873336 + 0.0502191435036970i	1.01860839718276 + 0.190285996799552i	1.19196649402353 + 1.64717483679286e-17i	1.01860839718276 - 0.190285996799552i	0.787962660873336 - 0.0502191435036970i	0.866079126710949 + 0.177032460456037i
34	27.5	0.874001904505034 - 0.175884716674546i	0.790676904577125 + 0.0447426399453070i	1.01581110992197 + 0.186612324482989i	1.18796972027359 + 9.65313278652434e-18i	1.01581110992197 - 0.186612324482989i	0.790676904577125 - 0.0447426399453070i	0.874001904505034 + 0.175884716674546i
35	27.75	0.881811979092554 - 0.174137390076011i	0.793812912515323 + 0.0393803605360389i	1.01308287234753 + 0.182628992502850i	1.18370156588512 + 7.29248158753043e-18i	1.01308287234753 - 0.182628992502850i	0.793812912515323 - 0.0393803605360389i	0.881811979092554 + 0.174137390076011i
36	28	0.889463936620532 - 0.171807692081839i	0.797354970101626 + 0.0341578678702931i	1.01043498997691 + 0.178349671809670i	1.17917482636105 - 2.98254901113047e-15i	1.01043498997690 - 0.178349671809671i	0.797354970101625 - 0.0341578678702872i	0.889463936620537 + 0.171807692081841i
37	30	0.940307595459093 - 0.135211693402630i	0.838029934437289 + 7.66047108389453e-17i	0.993276867581313 + 0.135211693402630i	1.13521309554257 + 3.63680490408789e-33i	0.993276867581313 - 0.135211693402630i	0.838029934437289 - 7.66047108389453e-17i	0.940307595459093 + 0.135211693402630i
38	35	0.939869252924911 + 0.000526835464625211i	0.973854296706436 + 0.000305532635146000i	0.993433338560169 - 0.00066827068887720i	0.999315886440196 + 3.61671489924396e-19i	0.993433338560169 + 0.00066827068887720i	0.973854296706436 - 0.000305532635146001i	0.939869252924911 - 0.000526835464625210i
39	40	0.834839816780575 + 0.0241449667086136i	1.04073718769523 + 0.0845614539078492i	1.04019958947485 - 0.0974913591450198i	0.891805126827067 - 8.88411907164539e-16i	1.04019958947485 + 0.0974913591450206i	1.04073718769523 - 0.0845614539078481i	0.834839816780575 - 0.0241449667086154i

40	41	0.819133498835339 + 0.0121548196512830i	1.04102104252237 + 0.101176615072671i	1.05061958413082 - 0.107436387463304i	0.878219212147030 - 2.35984391198207e-16i	1.05061958413082 + 0.107436387463304i	1.04102104252237 - 0.101176615072671i	0.819133498835339 - 0.0121548196512830i
41	41.25	0.815894335067464 + 0.00859781355749440i	1.04049624195822 + 0.105020255257462i	1.05313108014161 - 0.1094071111091418i	0.875291410627044 - 6.62154159583745e-15i	1.05313108014159 + 0.109407111091425i	1.04049624195823 - 0.105020255257455i	0.815894335067465 - 0.00859781355750761i
42	41.5	0.812951330894864 + 0.00485951658177362i	1.03975096650229 + 0.108717969157237i	1.05559250843053 - 0.111174875620474i	0.872552459052753 - 4.34132109948455e-15i	1.05559250843053 + 0.111174875620478i	1.03975096650229 - 0.108717969157233i	0.812951330894864 - 0.00485951658178229i
43	41.75	0.810312308551041 + 0.000961779375889766i	1.03879499662064 + 0.112260020682413i	1.05799789890139 - 0.112741940362291i	0.870002557373989 + 2.46733042811495e-15i	1.05799789890139 + 0.112741940362289i	1.03879499662063 - 0.112260020682416i	0.810312308551041 - 0.000961779375884832i
44	42	0.807983517330450 - 0.00307338501222319i	1.03763852957064 + 0.115637382650565i	1.06034150621742 - 0.114110900162871i	0.867641637204318 - 5.67183039758009e-15i	1.06034150621741 + 0.114110900162876i	1.03763852957065 - 0.115637382650559i	0.807983517330450 + 0.00307338501221185i
45	42.25	0.805969652797599 - 0.00722391018422387i	1.03629213105388 + 0.118841747604568i	1.06261781913600 - 0.115284668885591i	0.865469369317609 + 1.08407264448562e-16i	1.06261781913600 + 0.115284668885591i	1.03629213105388 - 0.118841747604568i	0.805969652797599 + 0.00722391018422408i
46	42.5	0.804273883056015 - 0.0114677817546740i	1.03476668720821 + 0.121865535576489i	1.06482156890751 - 0.116266462671075i	0.863485171351765 + 2.60060537478007e-17i	1.06482156890751 + 0.116266462671075i	1.03476668720821 - 0.121865535576489i	0.804273883056015 + 0.0114677817546740i
47	42.75	0.802897881654631 - 0.0157831386255758i	1.03307335711401 + 0.124701898881863i	1.06694773674552 - 0.117059783024676i	0.861688215702333 + 4.50967324188897e-17i	1.06694773674552 + 0.117059783024676i	1.03307335711401 - 0.124701898881863i	0.802897881654631 + 0.0157831386255758i
48	43	0.801841866692944 - 0.0201483698061592i	1.03122352597950 + 0.127344724036154i	1.06899156037707 - 0.117668399779185i	0.860077437590879 + 3.04889254384802e-18i	1.06899156037707 + 0.117668399779185i	1.03122352597950 - 0.127344724036154i	0.801841866692944 + 0.0201483698061592i
49	43.25	0.801104645672613 - 0.0245422064511012i	1.02922875916032 + 0.129788630891591i	1.07094853968278 - 0.118096333978247i	0.858651543294547 + 3.54474001437734e-15i	1.07094853968279 + 0.118096333978243i	1.02922875916031 - 0.129788630891594i	0.801104645672614 + 0.0245422064511082i
50	43.5	0.800683665630920 - 0.0289438088302102i	1.02710075716001 + 0.132028969100085i	1.07281444143909 - 0.118347840724807i	0.857409018522948 - 2.81074417358945e-16i	1.07281444143909 + 0.118347840724807i	1.02710075716001 - 0.132028969100085i	0.800683665630920 + 0.0289438088302096i
51	43.75	0.800575068080724 - 0.0333328479824064i	1.02485131174896 + 0.134061812016165i	1.07458530317757 - 0.118427392039406i	0.856348136926616 + 3.91485558958747e-16i	1.07458530317757 + 0.118427392039406i	1.02485131174896 - 0.134061812016165i	0.800575068080724 + 0.0333328479824072i
52	44	0.800773748272917 - 0.0376895818474316i	1.02249226333090 + 0.135883948162736i	1.07625743618026 - 0.118339659774065i	0.855466968718287 - 3.48177014711066e-16i	1.07625743618026 + 0.118339659774065i	1.02249226333090 - 0.135883948162736i	0.800773748272917 + 0.0376895818474310i
53	44.25	0.801273418291617 - 0.0419949257091020i	1.02003545967648 + 0.137492870390864i	1.07782742763377 - 0.118089498628714i	0.854763389385022 + 1.43805862157070e-16i	1.07782742763377 + 0.118089498628714i	1.02003545967648 - 0.137492870390864i	0.801273418291617 + 0.0419949257091023i
54	44.5	0.802066673490162 - 0.0462305168247113i	1.01749271613366 + 0.138886762872429i	1.07929214196911 - 0.117681929317557i	0.854235088466307 - 1.07644958982496e-16i	1.07929214196911 + 0.117681929317558i	1.01749271613366 - 0.138886762872429i	0.802066673490162 + 0.0462305168247111i
55	44.75	0.803145061777912 - 0.0503787731548972i	1.01487577741324 + 0.140064486070444i	1.08064872141726 - 0.117122121932320i	0.853879578371428 + 1.46011271130071e-15i	1.08064872141726 + 0.117122121932318i	1.01487577741324 - 0.140064486070445i	0.803145061777913 + 0.0503787731549000i
56	45	0.804499155274268 - 0.0544229461468048i	1.01219628103658 + 0.141025559835460i	1.08189458581314 - 0.116415379547302i	0.853694203209225 + 7.98329177575271e-16i	1.08189458581314 + 0.116415379547301i	1.01219628103658 - 0.141025559835461i	0.804499155274269 + 0.0544229461468063i
57	45.25	0.806118623857341 - 0.0583471675595323i	1.00946572251984 + 0.141770144777475i	1.08302743168166 - 0.115567122107628i	0.853676147605102 - 7.83008573488219e-16i	1.08302743168166 + 0.115567122107629i	1.00946572251984 - 0.141770144777474i	0.806118623857340 + 0.0583471675595309i
58	45.5	0.807992310149575 - 0.0621364903543005i	1.00669542235719 + 0.142299022061040i	1.08404523063924 - 0.114582870637030i	0.853822445483706 - 2.05996219958036e-16i	1.08404523063924 + 0.114582870637030i	1.00669542235719 - 0.142299022061040i	0.807992310149574 + 0.0621364903543001i
59	45.75	0.810108305500583 - 0.0657769237020261i	1.00389649485327 + 0.142613571767603i	1.08494622714274 - 0.113468231795842i	0.854129988800515 + 2.74866982659291e-15i	1.08494622714274 + 0.113468231795838i	1.00389649485326 - 0.142613571767605i	0.810108305500586 + 0.0657769237020310i
60	46	0.812454026546851 - 0.0692554621882886i	1.00107981884450 + 0.142715749964380i	1.08572893561602 - 0.112228882814198i	0.854595536210383 + 1.53845066263684e-16i	1.08572893561602 + 0.112228882814197i	1.00107981884450 - 0.142715749964380i	0.812454026546851 + 0.0692554621882889i
61	46.25	0.815016291947898 - 0.0725601093204045i	0.998256010338999 + 0.142608064614359i	1.08639213698231 - 0.110870556820690i	0.855215721665335 + 1.95982796865777e-15i	1.08639213698231 + 0.110870556820688i	0.998256010338995 - 0.142608064614359i	0.815016291947900 + 0.0725601093204079i
62	46.5	0.817781398918064 - 0.0756798954642824i	0.995435397096222 + 0.142293550458280i	1.08693487462952 - 0.109399028583216i	0.855987062936448 - 1.40389441681117e-16i	1.08693487462952 + 0.109399028583216i	0.995435397096223 - 0.142293550458280i	0.817781398918064 + 0.0756798954642821i

63	46.75	0.820735199191831 - 0.0786048903599697i	0.992627995159824 + 0.141775742996807i	1.08735644983537 - 0.107820100676938i	0.856905970055589 + 2.86358358316903e-16i	1.08735644983537 + 0.107820100676938i	0.992627995159824 - 0.141775742996807i	0.820735199191832 + 0.0786048903599702i
64	47	0.823863174079163 - 0.0813262103854526i	0.989843487350079 + 0.141058651699803i	1.08765641667978 - 0.106139590093434i	0.857968753672032 + 1.24973308597842e-15i	1.08765641667978 + 0.106139590093433i	0.989843487350076 - 0.141058651699804i	0.823863174079164 + 0.0813262103854546i
65	47.25	0.827150508285740 - 0.0838360207574881i	0.987091203715354 + 0.140146732568933i	1.08783457647349 - 0.104363315305229i	0.859171633317230 + 3.67205649459004e-16i	1.08783457647349 + 0.104363315305229i	0.987091203715353 - 0.140146732568933i	0.827150508285740 + 0.0838360207574887i
66	47.5	0.830582162192201 - 0.0861275328765585i	0.984380103935287 + 0.139044860179253i	1.08789097173353 - 0.102497083800097i	0.860510745568918 + 3.54223277402603e-15i	1.08789097173354 + 0.102497083800092i	0.984380103935280 - 0.139044860179253i	0.830582162192205 + 0.0861275328765641i
67	47.75	0.834142942306787 - 0.0881949970397109i	0.981718761661320 + 0.137758299324388i	1.08782587973778 - 0.100546680099460i	0.861982152103767 + 2.25047410043798e-15i	1.08782587973779 + 0.100546680099457i	0.981718761661316 - 0.137758299324388i	0.834142942306790 + 0.0881949970397144i
68	48	0.837817569627157 - 0.0900336907597589i	0.979115350773460 + 0.136292676387936i	1.08763980569214 - 0.0985178542747442i	0.863581847626467 + 2.37190392886168e-15i	1.08763980569214 + 0.0985178542747409i	0.979115350773455 - 0.136292676387937i	0.837817569627160 + 0.0900336907597625i
69	48.25	0.841590745669938 - 0.0916399029421608i	0.976577633525013 + 0.134653950560792i	1.08733347554479 - 0.0964163109743319i	0.865305767662463 + 2.28309065749580e-16i	1.08733347554479 + 0.0964163109743322i	0.976577633525013 - 0.134653950560792i	0.841590745669938 + 0.0916399029421604i
70	48.5	0.845447215949939 - 0.0930109141811143i	0.974112950540644 + 0.132848385019999i	1.08690782848224 - 0.0942476989721875i	0.867149796201677 - 1.44386251212793e-15i	1.08690782848224 + 0.0942476989721895i	0.974112950540646 - 0.132848385019999i	0.845447215949937 + 0.0930109141811123i
71	48.75	0.849371830715257 - 0.0941449734445089i	0.971728212626618 + 0.130882518179736i	1.08636400914133 - 0.0920176012469694i	0.869109773181373 + 4.50214328701577e-15i	1.08636400914133 + 0.0920176012469630i	0.971728212626609 - 0.130882518179736i	0.849371830715264 + 0.0941449734445151i
72	49	0.853349602768881 - 0.0950412714228787i	0.969429894346409 + 0.128763135119058i	1.08570335957091 - 0.0897315255979854i	0.871181501797703 + 2.36393701597715e-15i	1.08570335957092 + 0.0897315255979820i	0.969429894346405 - 0.128763135119058i	0.853349602768885 + 0.0950412714228819i
73	49.25	0.857365762231569 - 0.0956999108207850i	0.967224029309756 + 0.126497239284606i	1.08492741097531 - 0.0873948958017831i	0.873360755637211 + 5.34314951372645e-17i	1.08492741097531 + 0.0873948958017831i	0.967224029309756 - 0.126497239284606i	0.857365762231569 + 0.0956999108207851i
74	49.5	0.861405808124576 - 0.0961218738706669i	0.965116207118520 + 0.124092024559954i	1.08403787527062 - 0.0850130433105824i	0.875643285621187 + 4.38471921413341e-16i	1.08403787527062 + 0.0850130433105817i	0.965116207118520 - 0.124092024559954i	0.861405808124576 + 0.0961218738706675i
75	49.75	0.865455556673360 - 0.0963089873489443i	0.963111571909004 + 0.121554847786921i	1.08303663648364 - 0.0825911994918639i	0.878024826757055 - 4.86832710133597e-15i	1.08303663648363 + 0.0825911994918711i	0.963111571909014 - 0.121554847786922i	0.865455556673352 + 0.0963089873489383i
76	50	0.869501186255154 - 0.0962638853728080i	0.961214822426906 + 0.118893201818236i	1.08192574202241 - 0.0801344884066820i	0.880501104691844 - 1.37917835550583e-14i	1.08192574202239 + 0.0801344884067025i	0.961214822426933 - 0.118893201818238i	0.869501186255132 + 0.0962638853727916i
77	55	0.932777595571506 - 0.0559994670700687i	0.949455907886616 + 0.0512532550894993i	1.04090296823590 - 0.0304030167024421i	0.943497529103537 - 2.27241668400456e-14i	1.04090296823587 + 0.0304030167024804i	0.949455907886658 - 0.0512532550895185i	0.932777595571461 + 0.0559994670700627i
78	60	0.936543068636806 + 0.0118273885765378i	0.981509132022350 - 0.00925723135862241i	0.981947771325400 + 0.00507120956035218i	1.01241285727054 - 1.38681488037402e-13i	0.981947771325287 - 0.00507120956009903i	0.981509132022557 + 0.00925723135843765i	0.936543068636542 - 0.0118273885764536i
79	65	0.897128712996952 + 0.0525548391673182i	1.02980962816017 - 0.0377680400964463i	0.928184141411837 + 0.0197326622757223i	1.06801872511329 - 1.19965751057225e-13i	0.928184141411767 - 0.0197326622754927i	1.02980962816030 + 0.0377680400962467i	0.897128712996767 - 0.0525548391671659i
80	70	0.852716025948689 + 0.0559437973443765i	1.06980137205087 - 0.0384466606530242i	0.891203995566402 + 0.0195735830342367i	1.10393372363592 - 5.85333200613496e-16i	0.891203995566401 - 0.0195735830342356i	1.06980137205087 + 0.0384466606530232i	0.852716025948688 - 0.0559437973443755i
81	75	0.824055662431251 + 0.0386719706890737i	1.09295981984909 - 0.0260299286895011i	0.871462711181174 + 0.0130898919269366i	1.12251671678764 + 1.64518111384390e-17i	0.871462711181174 - 0.0130898919269366i	1.09295981984909 + 0.0260299286895011i	0.824055662431251 - 0.0386719706890737i
82	80	0.811915252525062 + 0.0185103391376869i	1.10237084593587 - 0.0123636968674301i	0.863704787286173 + 0.00618889608686227i	1.12972116139975 - 1.63496382530012e-16i	0.863704787286173 - 0.00618889608686194i	1.10237084593587 - 0.0123636968674297i	0.811915252525062 - 0.0185103391376866i
83	85	0.808979331429068 + 0.00471199343280196i	1.10461681804703 - 0.00314170311998985i	0.861873489050374 + 0.00157096381584841i	1.13141415228142 + 5.51548813672694e-16i	0.861873489050374 - 0.00157096381584952i	1.10461681804703 + 0.00314170311999096i	0.808979331429068 - 0.00471199343280306i
84	87	0.808806965330195 + 0.00169859996678381i	1.10474833494014 - 0.00113241747073295i	0.861766486363557 + 0.000566213983268411i	1.13151298482977 + 2.67153651793639e-16i	0.861766486363557 - 0.000566213983268946i	1.10474833494014 + 0.00113241747073348i	0.808806965330195 - 0.00169859996678435i
85	87.25	0.808799412508680 + 0.00142740654268849i	1.10475409695126 - 0.000951614741694517i	0.861761798950911 + 0.000475810484834220i	1.13151731411380 + 2.16929657234257e-19i	0.861761798950911 - 0.000475810484834220i	1.10475409695126 + 0.000951614741694517i	0.808799412508680 - 0.00142740654268849i



86	87.5	0.808793660667989 + 0.00117975104912508i	1.10475848495439 - 0.000786506559349154i	0.861758229330556 + 0.000393255037660604i	1.13152061099474 + 6.25049871633235e-17i	0.861758229330556 - 0.000393255037660729i	1.10475848495439 + 0.000786506559349279i	0.808793660667989 - 0.00117975104912521i
87	87.75	0.808789398019156 + 0.000955649316742395i	1.10476173684576 - 0.000637102659049005i	0.861755583950202 + 0.000318552263892820i	1.13152305424589 + 2.42769200892807e-16i	0.861755583950202 - 0.000318552263893306i	1.10476173684576 + 0.000637102659049490i	0.808789398019156 - 0.000955649316742880i
88	88	0.808786342328593 + 0.000755113859462710i	1.10476406795815 - 0.000503410776105491i	0.861753687623723 + 0.000251705848992529i	1.13152480567347 - 9.17369082168757e-18i	0.861753687623723 - 0.000251705848992511i	1.10476406795815 + 0.000503410776105472i	0.808786342328593 - 0.000755113859462692i
89	88.25	0.808784240967122 + 0.000578154416287940i	1.10476567102911 - 0.000385436967139332i	0.861752383553146 + 0.000192718690454064i	1.13152601009783 - 7.87308146043471e-17i	0.861752383553146 - 0.000192718690453906i	1.10476567102911 + 0.000385436967139175i	0.808784240967122 - 0.000578154416287782i
90	88.5	0.808782870949953 + 0.000424778436574528i	1.10476671617458 - 0.000283185897881515i	0.861751533347373 + 0.000141593030990392i	1.13152679533718 - 5.98831662284342e-17i	0.861751533347373 - 0.000141593030990272i	1.10476671617458 + 0.000283185897881395i	0.808782870949953 - 0.000424778436574408i
91	88.75	0.808782038968923 + 0.000294991508591493i	1.10476735086708 - 0.000196661097326968i	0.861751017038000 + 9.83305761432589e-05i	1.13152727219371 + 2.74851587622314e-17i	0.861751017038000 - 9.83305761433139e-05i	1.10476735086708 + 0.000196661097327022i	0.808782038968923 - 0.000294991508591548i
92	89	0.808781581418113 + 0.000188797731210944i	1.10476769991801 - 0.000125865178153988i	0.861750733092453 + 6.29325962809774e-05i	1.13152753444198 + 3.89321373314830e-18i	0.861750733092453 - 6.29325962809852e-05i	1.10476769991801 + 0.000125865178153996i	0.808781581418113 - 0.000188797731210952i
93	89.25	0.808781364413845 + 0.000106200028601752i	1.10476786546356 - 7.08000233418274e-05i	0.861750598424715 + 3.54000129531088e-05i	1.13152765881925 + 7.00396344985995e-18i	0.861750598424715 - 3.54000129531228e-05i	1.10476786546356 + 7.08000233418414e-05i	0.808781364413845 - 0.000106200028601766i
94	89.5	0.808781283809895 + 4.72004078345973e-05i	1.10476792695370 - 3.14669389315869e-05i	0.861750548403825 + 1.57334695783594e-05i	1.13152770501786 + 5.69605815665673e-18i	0.861750548403825 - 1.57334695783708e-05i	1.10476792695370 + 3.14669389315983e-05i	0.808781283809895 - 4.72004078346087e-05i
95	89.75	0.808781265208623 + 1.18001593170918e-05i	1.10476794114400 - 7.86677288392417e-06i	0.861750536860321 + 3.9338644372087e-06i	1.13152771567928 + 2.54217471894449e-19i	0.861750536860321 - 3.9338644372138e-06i	1.10476794114400 + 7.86677288392468e-06i	0.808781265208623 - 1.18001593170923e-05i
96	90	0.808781263968526 + 4.83219870920497e-17i	1.10476794209003 - 3.22146580613713e-17i	0.861750536090746 + 1.61073290306930e-17i	1.13152771639005 - 1.46118910276212e-29i	0.861750536090746 - 1.61073290306637e-17i	1.10476794209003 + 3.22146580613421e-17i	0.808781263968526 - 4.83219870920205e-17i

Tabla A.4 Pesos correspondientes a los ángulos negativos utilizando el ventaneo Kaiser.

Índice	ANGULO PROPUESTO PARA LA ELIMINACION	PESOS OBTENIDOS AL INICIALIZAR CON VENTANA DE KAISER A 15 ITERACIONES DEL ALGORITMO DE LA RNB.						
		W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7
1	-5	0.940299564875515 + 7.70072862200000e-06i	0.973231781891278 + 5.47646348265221e-06i	0.993265875333068 + 2.84418254483441e-06i	0.999990018060899 - 1.55998843237930e-22i	0.993265875333068 - 2.84418254483441e-06i	0.973231781891278 - 5.47646348265221e-06i	0.940299564875515 - 7.70072862174801e-06i
2	-10	0.940408118968946 + 0.00153659828154281i	0.972530155546484 + 0.00136610075259035i	0.991959726025689 + 0.000799028149853630i	0.998460741888729 - 2.34487031000490e-20i	0.991959726025689 - 0.000799028149853630i	0.972530155546484 - 0.00136610075259035i	0.940408118968946 - 0.00153659828154281i
3	-15	1.02993176574734 + 0.0758398206368203i	0.979743579151534 + 0.117226114327143i	0.912589337385933 + 0.0852867513472507i	0.882594685711031 + 1.94735568321026e-16i	0.912589337385933 - 0.0852867513472504i	0.979743579151534 - 0.117226114327143i	1.02993176574734 - 0.0758398206368206i
4	-20	0.799052973067059 + 0.0115906094954862i	0.895786528756721 - 0.118692587275841i	1.06076605471570 - 0.124629289076101i	1.14173094783877 - 5.55990179814929e-16i	1.06076605471570 + 0.124629289076101i	0.895786528756721 + 0.118692587275842i	0.799052973067059 - 0.0115906094954850i
5	-20.25	0.791545770495348 + 0.0180106361038846i	0.888146760466060 - 0.123342396013268i	1.06293032701345 - 0.132676019543889i	1.14984984280814 + 4.11034534996468e-15i	1.06293032701344 + 0.132676019543892i	0.888146760466054 + 0.123342396013264i	0.791545770495348 - 0.0180106361038927i
6	-20.5	0.784820178713060 + 0.0249384454611791i	0.880514519126825 - 0.127279113170842i	1.06467773592060 - 0.140357666950781i	1.15747646375698 + 5.88497255371888e-16i	1.06467773592060 + 0.140357666950782i	0.880514519126824 + 0.127279113170842i	0.784820178713060 - 0.0249384454611803i

7	-20.75	0.778899447572611 + 0.0323028602589314i	0.872932211421748 - 0.130514821516506i	1.06602418266377 - 0.147661837819171i	1.16461075583263 - 3.65281178542888e-17i	1.06602418266377 + 0.147661837819171i	0.872932211421748 + 0.130514821516506i	0.778899447572611 - 0.0323028602589313i
8	-21	0.773801020695748 + 0.0400322274004148i	0.865440853345378 - 0.133064080038540i	1.06698611204845 - 0.15457723068488i	1.17125336744260 - 2.97795088255458e-15i	1.06698611204846 + 0.154577230684878i	0.865440853345383 + 0.133064080038544i	0.773801020695746 - 0.0400322274004090i
9	-21.25	0.769536597400988 + 0.0480548665759077i	0.858079933579904 - 0.134943801293251i	1.06758045419903 - 0.161093647425062i	1.17740563798007 - 1.82721242009516e-15i	1.06758045419903 + 0.161093647425061i	0.858079933579907 + 0.134943801293253i	0.769536597400987 - 0.0480548665759042i
10	-21.5	0.766112228443874 + 0.056299506660076i	0.850887287105762 - 0.136173121677779i	1.06782456668241 - 0.167202001352146i	1.18306958506306 + 5.23455433090365e-16i	1.06782456668241 + 0.167202001352146i	0.850887287105762 + 0.136173121677778i	0.766112228443875 - 0.056299506660086i
11	-21.75	0.763528443277398 + 0.0646957074814531i	0.843898978538418 - 0.136773265245421i	1.06773617616860 - 0.172894321955071i	1.18824789020198 + 6.04880975670635e-16i	1.06773617616860 + 0.172894321955071i	0.843898978538417 + 0.136773265245420i	0.763528443277399 - 0.0646957074814543i
12	-22	0.761780407788996 + 0.0731742647468562i	0.837149196154286 - 0.136767401941486i	1.06733332064055 - 0.178163756464889i	1.19294388385544 - 1.48072764673198e-16i	1.06733332064055 + 0.178163756464889i	0.837149196154286 + 0.136767401941486i	0.761780407788996 - 0.0731742647468559i
13	-22.25	0.760858110546252 + 0.0816675960406935i	0.830670156670665 - 0.136180501005096i	1.06663429213577 - 0.183004568274874i	1.19716152971283 - 1.10105745655811e-15i	1.06663429213577 + 0.183004568274873i	0.830670156670667 + 0.136180501005097i	0.760858110546251 - 0.0816675960406915i
14	-22.5	0.760746575135844 + 0.0901101059590211i	0.824492020469751 - 0.135039180235575i	1.06565757958646 - 0.187412132177148i	1.20090540757828 + 7.94748755762936e-16i	1.06565757958646 + 0.187412132177149i	0.824492020469750 + 0.135039180235574i	0.760746575135845 - 0.0901101059590225i
15	-22.75	0.761426097258952 + 0.0984385287363470i	0.818642818163102 - 0.133371552033788i	1.06442181290627 - 0.191382926662184i	1.20418069600238 + 4.23272533670910e-16i	1.06442181290627 + 0.191382926662184i	0.818642818163102 + 0.133371552033787i	0.761426097258953 - 0.0984385287363477i
16	-23	0.762872503930183 + 0.106592246813008i	0.813148388045925 - 0.131207066903163i	1.06294570784129 - 0.194914523254449i	1.20699315399870 + 4.10488429514729e-16i	1.06294570784129 + 0.194914523254449i	0.813148388045925 + 0.131207066903163i	0.762872503930184 - 0.106592246813008i
17	-23.25	0.765057432434721 + 0.114513584011257i	0.808032324363896 - 0.128576355166046i	1.06124801162822 - 0.198005572954384i	1.20934910177050 - 4.39491231734511e-18i	1.06124801162822 + 0.198005572954384i	0.808032324363896 + 0.128576355166046i	0.765057432434721 - 0.114513584011257i
18	-23.5	0.767948627086051 + 0.122148072253795i	0.803315936723398 - 0.125511067713268i	1.05934745008711 - 0.200655789975150i	1.21125540104334 - 1.55865043311613e-17i	1.05934745008711 + 0.200655789975150i	0.803315936723398 + 0.125511067713268i	0.767948627086051 - 0.122148072253795i
19	-23.75	0.771510251259760 + 0.129444690902912i	0.799018220381328 - 0.122043716495547i	1.05726267607239 - 0.202865932840748i	1.21271943481582 - 2.77146315413063e-17i	1.05726267607239 + 0.202865932840748i	0.799018220381328 + 0.122043716495547i	0.771510251259760 - 0.129444690902912i
20	-24	0.775703212209901 + 0.136356078003233i	0.795155837173045 - 0.118207515464081i	1.05501221928913 - 0.204637782934752i	1.21374908644121 - 7.97941437595641e-17i	1.05501221928913 + 0.204637782934752i	0.795155837173045 + 0.118207515464082i	0.775703212209901 - 0.136356078003233i
21	-24.25	0.780485496334543 + 0.142838712940540i	0.791743106965183 - 0.114036222676371i	1.05261443770211 - 0.205974120640560i	1.21435271821390 + 1.61717767817638e-17i	1.05261443770211 + 0.205974120640560i	0.791743106965183 + 0.114036222676371i	0.780485496334543 - 0.142838712940540i
22	-24.5	0.785812512508494 + 0.148853070223048i	0.788792009417711 - 0.109563984246351i	1.05008747068096 - 0.206878699203476i	1.21453914954847 + 5.45210805367018e-19i	1.05008747068096 + 0.206878699203476i	0.788792009417711 + 0.109563984246351i	0.785812512508494 - 0.148853070223048i
23	-24.75	0.791637441081946 + 0.154363744278861i	0.786312195758065 - 0.104825180783128i	1.04744919396076 - 0.207356216436465i	1.21431763477381 - 1.37832880900010e-17i	1.04744919396076 + 0.207356216436465i	0.786312195758065 + 0.104825180783128i	0.791637441081946 - 0.154363744278861i
24	-25	0.797911586188216 + 0.159339545354444i	0.784311010240555 - 0.0998542769357871i	1.04471717650261 - 0.207412284398297i	1.21369784057992 + 1.85643341165205e-17i	1.04471717650261 + 0.207412284398297i	0.784311010240555 + 0.0998542769357871i	0.797911586188216 - 0.159339545354444i
25	-25.25	0.804584729060606 + 0.163753566784619i	0.782793520933933 - 0.0946856746322380i	1.04190863933989 - 0.207053397179523i	1.21268982316681 - 6.78163834864322e-16i	1.04190863933989 + 0.207053397179523i	0.782793520933933 + 0.0946856746322392i	0.804584729060605 - 0.163753566784618i
26	-25.5	0.811605480122300 + 0.167583224081276i	0.781762559445516 - 0.0893535705667583i	1.03904041648746 - 0.206286896935190i	1.21130400514527 + 9.45499140566442e-17i	1.03904041648746 + 0.206286896935190i	0.781762559445515 + 0.0893535705667581i	0.811605480122300 - 0.167583224081276i
27	-25.75	0.818921627695040 + 0.170810266456583i	0.781218769163164 - 0.0838918184558138i	1.03612891798750 - 0.205120938306675i	1.20955115224448 + 4.08497470615547e-18i	1.03612891798750 + 0.205120938306675i	0.781218769163164 + 0.0838918184558138i	0.818921627695040 - 0.170810266456583i
28	-26	0.826480481268265 + 0.173420761555558i	0.781160661574305 - 0.0783337965448987i	1.03319009516342 - 0.203564451377673i	1.20744234988860 + 6.32495697549958e-17i	1.03319009516342 + 0.203564451377673i	0.781160661574305 + 0.0783337965448985i	0.826480481268265 - 0.173420761555558i
29	-26.25	0.834229207350811 + 0.175405054315742i	0.781584680178144 - 0.0727122808082138i	1.03023940811989 - 0.201627103304590i	1.20498897967379 - 2.94796963854477e-16i	1.03023940811989 + 0.201627103304590i	0.781584680178145 + 0.0727122808082143i	0.834229207350810 - 0.175405054315742i

30	-26.5	0.842115155998803 + 0.176757701000212i	0.782485271452042 - 0.0670593242415319i	1.02729179547498 - 0.199319258753596i	1.20220269572544 - 6.38013816602626e-18i	1.02729179547498 + 0.199319258753596i	0.782485271452042 + 0.0670593242415319i	0.842115155998803 - 0.176757701000212i
31	-26.75	0.850086176290615 + 0.17477379588270i	0.783854962368527 - 0.0614061426158232i	1.02436164637469 - 0.196651939292677i	1.19909540099989 + 2.24486005758254e-17i	1.02436164637469 + 0.196651939292677i	0.783854962368527 + 0.0614061426158232i	0.850086176290615 - 0.17477379588270i
32	-27	0.858090919253684 + 0.177566777844878i	0.785684444036617 - 0.0557830070249859i	1.02146277495210 - 0.193636781911425i	1.19567922373580 + 8.14528545594518e-18i	1.02146277495210 + 0.193636781911425i	0.785684444036617 + 0.0557830070249859i	0.858090919253684 - 0.177566777844878i
33	-27.25	0.866079126710949 + 0.177032460456037i	0.787962660873336 - 0.0502191435036970i	1.01860839718276 - 0.190285996799552i	1.19196649402353 - 1.64717483679286e-17i	1.01860839718276 + 0.190285996799552i	0.787962660873336 + 0.0502191435036970i	0.866079126710949 - 0.177032460456037i
34	-27.5	0.874001904505034 + 0.175884716674546i	0.790676904577125 - 0.0447426399453070i	1.01581110992197 - 0.186612324482989i	1.18796972027359 - 9.65313278652434e-18i	1.01581110992197 + 0.186612324482989i	0.790676904577125 + 0.0447426399453070i	0.874001904505034 - 0.175884716674546i
35	-27.75	0.881811979092554 + 0.174137390076011i	0.793812912515323 - 0.0393803605360389i	1.01308287234753 - 0.182628992502850i	1.18370156588512 - 7.29248158753043e-18i	1.01308287234753 + 0.182628992502850i	0.793812912515323 + 0.0393803605360389i	0.881811979092554 - 0.174137390076011i
36	-28	0.889463936620532 + 0.171807692081839i	0.797354970101626 - 0.0341578678702931i	1.01043498997691 - 0.178349671809670i	1.17917482636105 + 2.98254901113047e-15i	1.01043498997690 + 0.178349671809671i	0.797354970101626 + 0.0341578678702872i	0.889463936620532 - 0.171807692081841i
37	-30	0.940307595459093 + 0.135211693402630i	0.838029934437289 - 7.66047108389453e-17i	0.993276867581313 - 0.135211693402630i	1.13521309554257 - 3.63680490408789e-33i	0.993276867581313 + 0.135211693402630i	0.838029934437289 + 7.66047108389453e-17i	0.940307595459093 - 0.135211693402630i
38	-35	0.939869252924911 - 0.000526835464625211i	0.973854296706436 - 0.000305532635146000i	0.993433338560169 + 0.000666827068887720i	0.999315886440196 - 3.61671489924396e-19i	0.993433338560169 - 0.000666827068887720i	0.973854296706436 + 0.000305532635146000i	0.939869252924911 + 0.000526835464625210i
39	-40	0.834839816780575 - 0.0241449667086136i	1.04073718769523 - 0.0845614539078492i	1.04019958947485 + 0.0974913591450198i	0.891805126827067 + 8.88411907164539e-16i	1.04019958947485 - 0.0974913591450206i	1.04073718769523 + 0.0845614539078481i	0.834839816780575 + 0.0241449667086154i
40	-41	0.819133498835339 - 0.0121548196512830i	1.04102104252237 - 0.101176615072671i	1.05061958413082 + 0.107436387463304i	0.878219212147030 + 2.35984391198207e-16i	1.05061958413082 - 0.107436387463304i	1.04102104252237 + 0.101176615072671i	0.819133498835339 + 0.0121548196512834i
41	-41.25	0.815894335067464 - 0.00859781355749440i	1.04049624195822 - 0.105020255257462i	1.05313108014161 + 0.109407111091418i	0.875291410627044 + 6.62154159583745e-15i	1.05313108014159 - 0.109407111091425i	1.04049624195823 + 0.105020255257455i	0.815894335067465 + 0.00859781355750761i
42	-41.5	0.812951330894864 - 0.00485951658177362i	1.03975096650229 - 0.108717969157237i	1.0559250843053 + 0.111174875620474i	0.872552459052753 + 4.34132109948455e-15i	1.0559250843053 - 0.111174875620478i	1.03975096650229 + 0.108717969157233i	0.812951330894864 + 0.00485951658178229i
43	-41.75	0.810312308551041 - 0.000961779375889766i	1.03879499662064 - 0.112260020682413i	1.05799789890139 + 0.112741940362291i	0.870002557373989 + 2.46733042811495e-15i	1.05799789890139 - 0.112741940362289i	1.03879499662063 + 0.112260020682416i	0.810312308551041 + 0.000961779375884832i
44	-42	0.807983517330450 + 0.00307338501222319i	1.03763852957064 - 0.115637382650565i	1.06034150621742 + 0.114110900162871i	0.867641637204318 + 5.67183039758009e-15i	1.06034150621741 - 0.114110900162876i	1.03763852957065 + 0.115637382650559i	0.807983517330450 - 0.00307338501221185i
45	-42.25	0.805969652797599 + 0.00722391018422387i	1.03629213105388 - 0.118841747604568i	1.06261781913600 + 0.115284668885591i	0.865469369317609 - 1.08407264448562e-16i	1.06261781913600 - 0.115284668885591i	1.03629213105388 + 0.118841747604568i	0.805969652797599 - 0.00722391018422408i
46	-42.5	0.804273883056015 + 0.0114677817546740i	1.03476668720821 - 0.121865535576489i	1.06482156890751 + 0.116266462671075i	0.863485171351765 + 2.60060537740807e-17i	1.06482156890751 - 0.116266462671075i	1.03476668720821 + 0.121865535576489i	0.804273883056015 - 0.0114677817546740i
47	-42.75	0.802897881654631 + 0.0157831386255758i	1.03307335711401 - 0.124701898881863i	1.06694773674552 + 0.117059783024676i	0.861688215702333 - 4.50967324188897e-17i	1.06694773674552 - 0.117059783024676i	1.03307335711401 + 0.124701898881863i	0.802897881654631 - 0.0157831386255758i
48	-43	0.801841866692944 + 0.0201483698061592i	1.03122352597950 - 0.127344724036154i	1.06899156037707 + 0.117668399779185i	0.860077437590879 - 3.04889254384802e-18i	1.06899156037707 - 0.117668399779185i	1.03122352597950 + 0.127344724036154i	0.801841866692944 - 0.0201483698061592i
49	-43.25	0.801104645672613 + 0.0245422064511012i	1.02922875916032 - 0.129788630891591i	1.07094853968278 + 0.118096333978247i	0.858651543294547 - 3.54474001437734e-15i	1.07094853968279 - 0.118096333978243i	1.02922875916031 + 0.129788630891594i	0.801104645672614 - 0.0245422064511082i
50	-43.5	0.800683665630920 + 0.0289438088302102i	1.02710075716001 - 0.132028969100085i	1.07281444143909 + 0.118347840724807i	0.857409018522948 + 2.81074417358945e-16i	1.07281444143909 - 0.118347840724807i	1.02710075716001 + 0.132028969100085i	0.800683665630920 - 0.0289438088302096i
51	-43.75	0.800575068080724 + 0.0333328479824064i	1.02485131174896 - 0.134061812016165i	1.07458530317757 + 0.118427392039406i	0.856348136926616 - 3.91485558958747e-16i	1.07458530317757 - 0.118427392039406i	1.02485131174896 + 0.134061812016165i	0.800575068080724 - 0.0333328479824072i
52	-44	0.800773748272917 + 0.0376895818474316i	1.02249226333090 - 0.135883948162736i	1.07625743618026 + 0.118339659774065i	0.855466968718287 + 3.48177014711066e-16i	1.07625743618026 - 0.118339659774065i	1.02249226333090 + 0.135883948162736i	0.800773748272917 - 0.0376895818474310i



53	-44.25	0.801273418291617 + 0.0419949257091020i	1.02003545967648 - 0.137492870390864i	1.07782742763377 + 0.118089498628714i	0.854763389385022 - 1.43805862157070e-16i	1.07782742763377 - 0.118089498628714i	1.02003545967648 + 0.137492870390864i	0.801273418291617 - 0.0419949257091020i
54	-44.5	0.802066673490162 + 0.0462305168247113i	1.01749271613366 - 0.138886762872429i	1.07929214196911 + 0.117681929317557i	0.854235088466307 + 1.07644958982496e-16i	1.07929214196911 - 0.117681929317558i	1.01749271613366 + 0.138886762872429i	0.802066673490162 - 0.046230516824711i
55	-44.75	0.803145061777912 + 0.0503787731548972i	1.01487577741324 - 0.140064486070444i	1.08064872141726 + 0.117122121932320i	0.853879578371428 + 1.46011271130071e-15i	1.08064872141726 - 0.117122121932318i	1.01487577741324 + 0.140064486070445i	0.803145061777913 - 0.0503787731549000i
56	-45	0.804499155274268 + 0.0544229461468048i	1.01219628103658 - 0.141025559835460i	1.08189458581314 + 0.116415379547302i	0.853694203209225 - 7.98329177575271e-16i	1.08189458581314 - 0.116415379547301i	1.01219628103658 + 0.141025559835461i	0.804499155274269 - 0.0544229461468063i
57	-45.25	0.806118623857341 + 0.0583471675595323i	1.00946572251984 - 0.141770144777475i	1.08302743168166 + 0.115567122107628i	0.853676147605102 + 7.83008573488219e-16i	1.08302743168166 - 0.115567122107629i	1.00946572251984 + 0.141770144777474i	0.806118623857340 - 0.0583471675595309i
58	-45.5	0.807992310149575 + 0.0621364903543005i	1.00669542235719 - 0.142299022061040i	1.08404523063924 + 0.114582870637030i	0.853822445483706 + 2.05996219958036e-16i	1.08404523063924 - 0.114582870637030i	1.00669542235719 + 0.142299022061040i	0.807992310149574 - 0.0621364903543001i
59	-45.75	0.810108305500583 + 0.0657769237020261i	1.00389649485327 - 0.142613571767603i	1.08494622714274 + 0.113468231795842i	0.854129988800515 - 2.74866982659291e-15i	1.08494622714274 - 0.113468231795838i	1.00389649485326 + 0.142613571767605i	0.810108305500586 - 0.0657769237020310i
60	-46	0.812454026546851 + 0.0692554621882886i	1.00107981884450 - 0.142715749964380i	1.08572893561602 + 0.112228882814198i	0.854595536210383 - 1.53845066263684e-16i	1.08572893561602 - 0.112228882814197i	1.00107981884450 + 0.142715749964380i	0.812454026546851 - 0.0692554621882889i
61	-46.25	0.815016291947898 + 0.0725601093204045i	0.998256010338999 - 0.142608064614359i	1.08639213698231 + 0.110870556820690i	0.855215721665335 - 1.95982796685777e-15i	1.08639213698231 - 0.110870556820688i	0.998256010338995 + 0.142608064614359i	0.815016291947900 - 0.0725601093204079i
62	-46.5	0.817781398918064 + 0.0756798954642824i	0.995435397096222 - 0.142293550458280i	1.08693487462952 + 0.109399028583216i	0.855987062936448 + 1.40389441681117e-16i	1.08693487462952 - 0.109399028583216i	0.995435397096223 + 0.142293550458280i	0.817781398918064 - 0.0756798954642821i
63	-46.75	0.820735199191831 + 0.0786048903599697i	0.992627995159824 - 0.141775742996807i	1.08735644983537 + 0.107820100676938i	0.856905970055589 - 2.86358358316903e-16i	1.08735644983537 - 0.107820100676938i	0.992627995159824 + 0.141775742996807i	0.820735199191832 - 0.0786048903599702i
64	-47	0.823863174079163 + 0.0813262103854526i	0.989843487350079 - 0.141058651699803i	1.08765641667978 + 0.106139590093434i	0.857968753672032 - 1.24973308597842e-15i	1.08765641667978 - 0.106139590093433i	0.989843487350076 + 0.141058651699804i	0.823863174079164 - 0.0813262103854546i
65	-47.25	0.827150508285740 + 0.0838360207574881i	0.987091203715354 - 0.140146732568933i	1.08783457647349 + 0.104363315305229i	0.859171633317230 - 3.67205649459004e-16i	1.08783457647349 - 0.104363315305229i	0.987091203715353 + 0.140146732568933i	0.827150508285740 - 0.0838360207574887i
66	-47.5	0.830582162192201 + 0.0861275328765585i	0.984380103935287 - 0.139044860179253i	1.08789097173353 + 0.102497083800097i	0.860510745568918 - 3.54223277402603e-15i	1.08789097173353 - 0.102497083800092i	0.984380103935280 + 0.139044860179253i	0.830582162192205 - 0.0861275328765641i
67	-47.75	0.834142942306787 + 0.0881949970397109i	0.981718761661320 - 0.137758299324388i	1.08782587973778 + 0.100546680099460i	0.861982152103767 - 2.25047410043798e-15i	1.08782587973779 - 0.100546680099457i	0.981718761661316 + 0.137758299324388i	0.834142942306790 - 0.0881949970397144i
68	-48	0.837817569627157 + 0.0900336907597589i	0.979115350773460 - 0.136292676387936i	1.08763980569214 + 0.0985178542747442i	0.863581847626467 - 2.37190392886168e-15i	1.08763980569214 - 0.0985178542747409i	0.979115350773455 + 0.136292676387937i	0.837817569627160 - 0.0900336907597625i
69	-48.25	0.841590745669938 + 0.0916399029421608i	0.976577633525013 - 0.134653950560792i	1.08733347554479 + 0.0964163109743319i	0.865305767662463 + 2.28309065749580e-16i	1.08733347554479 - 0.0964163109743322i	0.976577633525013 + 0.134653950560792i	0.841590745669938 - 0.0916399029421604i
70	-48.5	0.845447215949939 + 0.0930109141811143i	0.974112950540644 - 0.132848385019999i	1.08690782848224 + 0.0942476989721875i	0.867149796201677 + 1.44386251212793e-15i	1.08690782848224 - 0.0942476989721895i	0.974112950540646 + 0.132848385019999i	0.845447215949937 - 0.0930109141811123i
71	-48.75	0.849371830715257 + 0.0941449734445089i	0.971728212626618 - 0.130882518179736i	1.08636400914133 + 0.0920176012469694i	0.869109773181373 - 4.50214328701577e-15i	1.08636400914133 - 0.0920176012469630i	0.971728212626609 + 0.130882518179736i	0.849371830715264 - 0.0941449734445151i
72	-49	0.853349602768881 + 0.0950412714228787i	0.969429894346409 - 0.128763135119058i	1.08570335957091 + 0.0897315255979854i	0.871181501797703 - 2.36393701597715e-15i	1.08570335957092 - 0.0897315255979820i	0.969429894346405 + 0.128763135119058i	0.853349602768885 - 0.0950412714228819i
73	-49.25	0.857365762231569 + 0.0956999108207850i	0.967224029309756 - 0.126497239284606i	1.08492741097531 + 0.0873948958017831i	0.873360755637211 - 5.34314951372645e-17i	1.08492741097531 - 0.0873948958017831i	0.967224029309756 + 0.126497239284606i	0.857365762231569 - 0.0956999108207851i
74	-49.5	0.861405808124576 + 0.0961218738706669i	0.965116207118520 - 0.124092024559954i	1.08403787527062 + 0.0850130433105824i	0.875643285621187 - 4.38471921413341e-16i	1.08403787527062 - 0.0850130433105817i	0.965116207118520 + 0.124092024559954i	0.861405808124576 - 0.0961218738706675i
75	-49.75	0.865455556673360 + 0.0963089873489443i	0.963111571909004 - 0.121554847786921i	1.08303663648364 + 0.0825911994918639i	0.878024826757055 + 4.86832710133597e-15i	1.08303663648363 - 0.0825911994918711i	0.963111571909014 + 0.121554847786922i	0.865455556673352 - 0.0963089873489383i



76	-50	0.869501186255154 + 0.0962638853728080i	0.961214822426906 - 0.118893201818236i	1.08192574202241 + 0.0801344884066820i	0.880501104691844 + 1.37917835550583e-14i	1.08192574202239 - 0.0801344884067025i	0.961214822426933 + 0.118893201818238i	0.869501186255132 - 0.0962638853727916i
77	-55	0.932777595571506 + 0.0559994670700687i	0.949455907886616 - 0.0512532550894993i	1.04090296823590 + 0.0304030167024421i	0.943497529103537 + 2.27241668400456e-14i	1.04090296823587 - 0.0304030167024804i	0.949455907886658 + 0.0512532550895185i	0.932777595571461 - 0.0559994670700627i
78	-60	0.936543068636806 - 0.0118273885765378i	0.981509132022350 + 0.0092572313586224i	0.981947771325400 - 0.00507120956035218i	1.01241285772054 + 1.38681488037402e-13i	0.981947771325287 + 0.00507120956009903i	0.981509132022557 - 0.00925723135843765i	0.936543068636542 + 0.0118273885764536i
79	-65	0.897128712996952 - 0.0525548391673182i	1.02980962816017 + 0.0377680400964463i	0.928184141411837 - 0.0197326622757223i	1.06801872511329 + 1.19965751057225e-13i	0.928184141411767 + 0.0197326622754927i	1.02980962816030 + 0.0377680400962467i	0.897128712996767 + 0.0525548391671659i
80	-70	0.852716025948689 - 0.0559437973443765i	1.06980137205087 + 0.0384466606530242i	0.891203995566402 - 0.0195735830342367i	1.10393372363592 + 5.85333200613496e-16i	0.891203995566401 + 0.0195735830342356i	1.06980137205087 - 0.0384466606530232i	0.852716025948688 + 0.0559437973443755i
81	-75	0.824055662431251 - 0.0386719706890737i	1.09295981984909 + 0.0260299286895011i	0.871462711181174 - 0.0130898919269366i	1.12251671678764 - 1.64518111384390e-17i	0.871462711181174 + 0.0130898919269366i	1.09295981984909 - 0.0260299286895011i	0.824055662431251 + 0.0386719706890737i
82	-80	0.811915252525062 - 0.0185103391376869i	1.10237084593587 + 0.0123636968674301i	0.863704787286173 - 0.00618889608686227i	1.12972116139975 + 1.63496382530012e-16i	0.863704787286173 + 0.00618889608686194i	1.10237084593587 - 0.0123636968674297i	0.811915252525062 + 0.0185103391376866i
83	-85	0.808979331429068 - 0.00471199343280196i	1.10461681804703 + 0.00314170311998985i	0.861873489050374 - 0.00157096381584841i	1.13141415228142 - 5.51548813672694e-16i	0.861873489050374 + 0.00157096381584952i	1.10461681804703 - 0.00314170311999096i	0.808979331429068 + 0.00471199343280306i
84	-87	0.808806965330195 - 0.00169859996678381i	1.10474833494014 + 0.00113241747073295i	0.861766486363557 - 0.000566213983268411i	1.13151298482977 - 2.67153651793639e-16i	0.861766486363557 + 0.000566213983268946i	1.10474833494014 - 0.00113241747073348i	0.808806965330195 + 0.00169859996678435i
85	-87.25	0.808799412508680 - 0.00142740654268849i	1.10475409695126 + 0.000951614741694517i	0.861761798950911 - 0.000475810484834220i	1.13151731411380 - 2.16929657234257e-19i	0.861761798950911 + 0.000475810484834220i	1.10475409695126 - 0.000951614741694517i	0.808799412508680 + 0.00142740654268849i
86	-87.5	0.808793660667989 - 0.00117975104912508i	1.10475848495439 + 0.000786506559349154i	0.861758229330556 - 0.000393255037660604i	1.13152061099474 - 6.25049871633235e-17i	0.861758229330556 + 0.000393255037660729i	1.10475848495439 - 0.000786506559349279i	0.808793660667989 + 0.00117975104912521i
87	-87.75	0.808789398019156 - 0.000955649316742395i	1.10476173684576 + 0.000637102659049005i	0.861755583950202 - 0.000318552263892820i	1.13152305424589 - 2.42769200892807e-16i	0.861755583950202 + 0.000318552263893306i	1.10476173684576 - 0.000637102659049490i	0.808789398019156 + 0.000955649316742880i
88	-88	0.808786342328593 - 0.000755113859462710i	1.10476406795815 + 0.000503410776105491i	0.861753687623723 - 0.000251705848992529i	1.13152480567347 + 9.17369082168757e-18i	0.861753687623723 + 0.000251705848992511i	1.10476406795815 - 0.000503410776105472i	0.808786342328593 + 0.000755113859462692i
89	-88.25	0.808784240967122 - 0.000578154416287940i	1.10476567102911 + 0.000385436967139332i	0.861752383553146 - 0.000192718690454064i	1.13152601009783 + 7.87308146043471e-17i	0.861752383553146 + 0.000192718690453906i	1.10476567102911 - 0.000385436967139175i	0.808784240967122 + 0.000578154416287782i
90	-88.5	0.808782870949953 - 0.000424778436574528i	1.10476671617458 + 0.000283185897881515i	0.861751533347373 - 0.000141593030990392i	1.13152679533718 + 5.98831662284342e-17i	0.861751533347373 + 0.000141593030990272i	1.10476671617458 - 0.000283185897881395i	0.808782870949953 + 0.000424778436574408i
91	-88.75	0.808782038968923 - 0.000294991508591493i	1.10476735086708 + 0.000196661097326968i	0.861751017038000 - 9.83305761432589e-05i	1.13152727219371 - 2.74851587622314e-17i	0.861751017038000 + 9.83305761433139e-05i	1.10476735086708 - 0.000196661097327022i	0.808782038968923 + 0.000294991508591548i
92	-89	0.808781581418113 - 0.000188797731210944i	1.10476769991801 + 0.000125865178153988i	0.861750733092453 - 6.29325962809774e-05i	1.13152753444198 - 3.89321373314830e-18i	0.861750733092453 + 6.29325962809852e-05i	1.10476769991801 - 0.000125865178153996i	0.808781581418113 + 0.000188797731210952i
93	-89.25	0.808781364413845 - 0.000106200028601752i	1.10476786546356 + 7.08000233418274e-05i	0.861750598424715 - 3.54000129531088e-05i	1.13152765881925 - 7.00396344985995e-18i	0.861750598424715 + 3.54000129531228e-05i	1.10476786546356 - 7.08000233418414e-05i	0.808781364413845 + 0.000106200028601766i
94	-89.5	0.808781283809895 - 4.72004078345973e-05i	1.10476792695370 + 3.14669389315869e-05i	0.861750548403825 - 1.57334695783594e-05i	1.13152770501786 - 5.69605815665673e-18i	0.861750548403825 + 1.57334695783708e-05i	1.10476792695370 - 3.14669389315983e-05i	0.808781283809895 + 4.72004078346087e-05i
95	-89.75	0.808781265208623 - 1.18001593170918e-05i	1.10476794114400 + 7.86677288392417e-06i	0.861750536860321 - 3.9338644372087e-06i	1.13152771567928 - 2.54217471894449e-19i	0.861750536860321 + 3.9338644372138e-06i	1.10476794114400 - 7.86677288392468e-06i	0.808781265208623 + 1.18001593170923e-05i
96	-90	0.808781263968526 - 4.83219870920497e-17i	1.10476794209003 + 3.22146580613713e-17i	0.861750536090746 - 1.61073290306930e-17i	1.13152771639005 + 1.46118910276212e-29i	0.861750536090746 + 1.61073290306637e-17i	1.10476794209003 - 3.22146580613421e-17i	0.808781263968526 + 4.83219870920205e-17i